

Beispiel 3: Aufgaben zur Kompetenz *Mathematisch modellieren*

Aufgabe 6 (AFB II-III)

Wie viele Liter Sand befinden sich in den Händen?



Mögliche Lösung

Teilschritte :

1. Die reale Sachsituation verstehen.

In den aneinandergehaltenen Händen befindet sich Sand. Das Volumen des Sandes soll in der Einheit Liter bestimmt werden.

2. Die reale Sachsituation strukturieren und vereinfachen.

Es wird angenommen, dass der Sand nicht gehäuft ist, d.h., die Sandoberfläche ist eben und somit ist nur das Volumen der Handmulde zu bestimmen. Experimentell wurden bei einer Schülerhand verschiedene Tiefen gemessen. Die mittlere Tiefe der Handmulde beträgt danach etwa 2,0 cm (Annahme).

3. Die reale vereinfachte Sachsituation in ein mathematisches Modell übertragen (mathematisieren).

Die Längen auf dem Bild werden durch einen geeigneten Maßstab, der durch Ausmessen an einer Schülerhand aufgefunden wird, in die reale Welt übertragen. Die Sandoberfläche wird durch zwei gleichschenklige Dreiecke mit einer Hypotenuse gleicher Länge von 14,0 cm (von Daumenknick zu Daumenknick) angenähert. Die Seitenlänge des oberen Dreiecks (Länge von den sich berührenden Handgelenken bis zum Daumenknick) beträgt 11,0 cm, die des unteren Dreiecks (Daumenknick bis zum Mittelfinger) 10,3 cm.

4. Die mathematische Sachsituation mithilfe mathematischer Mittel lösen.

$$\text{Höhe des oberen Dreiecks: } h_o = \sqrt{11,0^2 - 7,0^2} \approx 8,5 \text{ cm}$$

$$\text{Höhe des unteren Dreiecks: } h_u = \sqrt{10,3^2 - 7,0^2} \approx 7,6 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen } V = \left(\frac{1}{2} \cdot 14,0 \cdot 8,5 + \frac{1}{2} \cdot 14,0 \cdot 7,6 \right) \text{ cm}^2 \cdot 2,0 \text{ cm} = 112,7 \text{ cm}^2 \cdot 2,0 \text{ cm} = 225,4 \text{ cm}^3 \approx 0,23 \text{ Liter}$$

5. Das Ergebnis bezogen auf die reale Sachsituation überprüfen, interpretieren und reflektieren.

In den aneinandergehaltenen Händen befindet sich etwa ein Viertelliter Sand. Das Volumen entspricht etwa dem Inhalt eines Trinkbechers bzw. Glases. Aufgrund der mittleren Tiefe der Handmulde kann die Sandmenge etwas größer bzw. kleiner sein. Die ebene Sandoberfläche ist mit den beiden Dreiecken recht genau erfasst worden. Das berechnete Volumen von etwa einem Viertelliter erscheint deswegen realistisch zu sein.

Kommentar

Die Aufgabenstellung ist als Frage formuliert und als Antwort wird ein Volumen in der Einheit Liter erwartet. Als handlungsinitiierende Operatoren kommen hier *Bestimmen* bzw. *Berechnen* in Frage. Der Operator *Bestimmen* ist der weitestgehende und verlangt, dass Zusammenhänge bzw. Lösungswege aufgezeigt, das Vorgehen dargestellt und die Ergebnisse formuliert werden. Der Operator *Berechnen* verlangt, durch Rechenoperationen zu einem Ergebnis zu gelangen und die Rechenschritte zu dokumentieren. Da vorrangig die Kompetenz *Mathematisch modellieren* verlangt ist, ist die Berechnung des Sandvolumens Teil des vierten Schritts. Um die erwartete Leistung des Operators *Bestimmen* zu erfüllen, erfolgt die Aufgabenbearbeitung in den fünf Teilschritten der Modellierung.

Die Aufgabenstellung könnte auch so formuliert werden: Bestimme, wie viel Liter Sand sich in den Händen befinden.

Die Größe der Sandoberfläche kann auch durch andere geometrische Formen (einen Viertelkreis mit dem Radius 11,0 cm; einen Drachen; einen Achtelkreis und eine Spiegelung; mehrere Dreiecke; ...) abgeschätzt werden.

Zur Modellierung sind mehrere Schritte erforderlich, dies entspricht dem Anforderungsbereich II. Für einige Schüler kann dies eine unvertraute Sachsituation darstellen, deswegen kommt auch der Anforderungsbereich III in Frage.

3.2 Praxisbeispiel: Planung einer Unterrichtsstunde

In diesem Kapitel werden an einem Beispiel die einzelnen Schritte der Unterrichtsplanung exemplarisch dargestellt. Thema ist die Einführung der proportionalen und antiproportionalen Zuordnung. Die Studentenplanung für den **Unterrichtsverlauf A** (Partnerpuzzle, parallele Bearbeitung) finden Sie als **Praxisbeispiel 10** im Anhang (S. 96). Die Arbeitsblätter sind im Anhang (ab S. 93) zu finden. Die Idee für das Praxisbeispiel stammt von Iris Goldbeck und ist Kratz (2011, S. 156–171) entnommen.

3.2.1 Lernausgangslage und Lernbedingungen

a) Fachliche Ausgangslage

- Die Lernenden können einfache Zuordnungstabellen und -graphen erstellen und Zuordnungen sprachlich beschreiben.
- Die Lernenden haben bis jetzt nur wenige und nur einfache Aufgaben mit dem Dreisatz bearbeitet.
- Etwa ein Drittel der Lernenden hat eine niedrige Frustrationstoleranz, d. h., sie stellen bei auftretenden Problemen und Schwierigkeiten die Aufgabenbearbeitung ein und benötigen dann teilweise eine persönliche Ansprache.
- Einigen Lernenden sind Begriffe aus der Bildungssprache (Skonto, Chocolaterie, ...) nicht bekannt.
- Dort, wo sprachliche Formulierungen wichtig sind, erhalten die Lernenden Hilfen (Wortgeländer, Satzanfänge, ...).
- Fachbegriffe und fachliche Formulierungen werden gezielt eingeübt.

b) Weitere Lernbedingungen

- In der Klasse 7b befinden sich 28 Lernende, 12 Mädchen und 16 Jungen.
- Trotz der auftretenden Schwierigkeiten sind die Lernenden bemüht, die an sie gestellten Arbeitsaufträge zu bearbeiten.
- Das Arbeiten in festen Lernpartnerschaften (in der Mehrzahl lernstarker und lernschwacher Schüler) hat sich bewährt.
- Das Partnerpuzzle kennen die Lernenden aus verschiedenen Fächern.

c) Örtliche und räumliche Lernbedingungen

- Eine Tafel mit zwei ausklappbaren Flügeln ist vorhanden.
- Im Klassenraum sind Dokumentenkamera und Beamer vorhanden und werden regelmäßig im Unterricht eingesetzt.
- Der Raum ist groß, sodass die Tische für zwei Lernende in 4er- und 6er-Formation für Gruppenarbeiten gestellt werden können.

3.2.2 Unterrichtsinhalt

- Das schulinterne Fachcurriculum sieht für die Klasse 7 das Thema „Zuordnungen und ihre Darstellungen“ vor. Im Einzelnen gehören hierzu: Zuordnungen, Graphen von Zuordnungen, Gesetzmäßigkeiten bei Zuordnungen, proportionale und antiproportionale Zuordnungen, Dreisatzrechnung bei proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen.
- Die Aspekte Zuordnungen und Graphen von Zuordnungen wurden bereits mit der Lerngruppe bearbeitet. Als Nächstes steht die Erarbeitung der proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen an.
- Die Zuordnungen sollten an einfachen, gut überblickbaren Beispielen erarbeitet werden.
- Bei der Einführung sollte der Zusammenhang von Wertetabelle und Graph im Vordergrund stehen.
- Die Zuordnung der beiden Werte sollte von den Lernenden sprachlich beschrieben werden können (z.B. proportionale Zuordnung: „Wird der eine Wert verdoppelt, dann wird auch der andere Wert verdoppelt“, antiproportionale Zuordnung: „Wird der eine Wert verdoppelt, dann wird der andere Wert halbiert“).
- Die verschiedenen Rechenwege der Lernenden sollten in der Lerngruppe präsentiert und besprochen werden.
- Erst nachdem die einfachen Beispiele durchgearbeitet und verstanden wurden, sollten die Fachbegriffe eingeführt werden.

3.3.3 Eine Klassenarbeit konzipieren

Übersichtsartig werden im Folgenden Aspekte bei der Konzeption, bei der Durchführung und bei der Korrektur einer Klassenarbeit (vgl. *Praxisbeispiel 5: Klassenarbeit zur Unterrichtseinheit Geometrische Figuren – Vierecke*) beschrieben. Bei der Erstellung von Aufgaben können Sie sich an den Aufgaben in den Kapiteln 2.1 und 2.3 orientieren.

Jede Klassenarbeit sollte die drei testtheoretischen Gütekriterien *Objektivität*, *Reliabilität* und *Validität* erfüllen. Die Objektivität ist die Voraussetzung für die Reliabilität und diese Voraussetzung für die Validität. Objektivität bedeutet, dass die Leistungserfassung unabhängig von der Lehrkraft ist, die die Klassenarbeit durchführt, auswertet und bewertet. Die Reliabilität macht eine Aussage darüber, wie zuverlässig die fachliche Leistung ohne störende oder zufällige Einflüsse gemessen wird. Die Validität gibt an, inwieweit die Aufgabe tatsächlich das gewünschte Merkmal, das gemessen werden soll, auch misst. (Drüke-Noe/Schmidt 2015, S. 3)

Es ist klar, dass Lehrkräfte keine ausgebildeten Testaufgabenersteller sind. Allerdings ist es möglich, durch die Beachtung einiger Aspekte Klassenarbeiten so zu konzipieren, dass ein möglichst hoher Grad an Objektivität, Reliabilität und Validität erreicht wird.

Bei der Konzeption einer Klassenarbeit zu beachtende Aspekte (vgl. auch Sturm 2016, S. 75 f.):

- Nicht alle Inhalte und erlernte Kompetenzen müssen abgefragt werden, d. h., nicht alle Aussagen des Selbsteinschätzungsbohens müssen in der Klassenarbeit vorkommen.
- Es sollten verschiedene Aufgabenformate (geschlossene und offene Aufgaben, Begründungs-, Problem- und Umkehraufgaben) und Darstellungsformen (Graph, Tabelle, Bild, Text, Symbolik) enthalten sein.
- Gleiche Kompetenzen und Inhalte sollten nicht mehrfach abgefragt werden, damit die Aufgabenauswahl ausgewogen bleibt. Ähnliche Inhalte können allerdings methodisch geändert abgeprüft werden (z. B. zeichnerisch, rechnerisch, erklärend, begründend, durch eine Umkehraufgabe). Die Tabelle zur kriteriellen Konzeption einer Klassenarbeit (vgl. *Praxisbeispiel 6* und Material 6 auf S. 98) kann helfen, die Klassenarbeit ausgewogen zu gestalten. Zu jeder Teilaufgabe wird erfasst, welche allgemeine mathematische Kompetenz (K1 bis K6) zur Bearbeitung benötigt wird und in welchem Anforderungsbereich (AFB) diese Kompetenz erforderlich ist. Weitere Merkmale können sein: inner-/außermathematischer Kontext, Schwierigkeitsgrad, Grad der Offenheit, Anzahl der geforderten Lösungswege. Es können aber auch andere Merkmale in der Tabelle ergänzt werden. (Drüke-Noe/Schmidt 2015, S. 7)
- Die Aufgabenformulierung (Arbeitsauftrag, Operator, Fragestellung) sollte eindeutig und nicht anders zu verstehen sein (Reliabilität), damit mit dieser Aufgabe tatsächlich nur das gewünschte Merkmal, das gemessen werden soll, auch erfasst wird (Validität).
- Da in Schulbüchern Operatoren eher selten verwendet werden, sollten im Unterricht Aufgabenformulierungen mit Operatoren eingesetzt werden. Die Aufgabenformulierungen in der Klassenarbeit sollten den Lernenden vertraut sein.
- Die Aufgabenstellung sollte für die Lernenden verständlich und angemessen formuliert sein (kurze, nicht verschachtelte Sätze, ggf. verwendete Begriffe erklären, möglichst kurze Texte). Dies gilt im Besonderen für die unteren Jahrgangsstufen und Lerngruppen mit überwiegend schwachen Lernern.
- Einzelne Aufgabenteile sollten voneinander unabhängig sein und nicht aufeinander aufbauen, d. h., in einer nachfolgenden Teilaufgabe soll nicht mit dem Ergebnis der vorhergehenden Teilaufgabe weitergearbeitet werden. Es kann jedoch ein Zwischenergebnis angegeben werden, mit dem weitergearbeitet wird und mit dem die Teilaufgaben entkoppelt werden.
- Aufgabenstellungen mit Teilaufgaben sind auch optisch übersichtlich zu strukturieren.
- Die verwendete Schriftgröße sollte gut lesbar sein (z. B. Arial, 12 Punkt).
- Die Klassenarbeit sollte so gestaltet sein, dass mit den ersten Aufgaben Grundkompetenzen (AFB I) abgeprüft werden. Schwache Lerner können sich so gut in eine Klassenarbeit hineinfinden. Das Gefühl „schon einige Punkte abgearbeitet zu haben“ stärkt das Zutrauen, auch die anderen Aufgaben zu bewältigen. Aufgrund des Ermüdungseffektes der Lernenden sollten schwere Aufgaben im mittleren Teil und am Schluss wieder einfache Aufgaben platziert werden.
- Bei schwierigen Aufgaben kann ein Hinweis auf das zu benutzende Verfahren oder das zu wählende Vorgehen angegeben werden.