Inhaltsverzeichnis

Das Newton-Verfahren ist ein weiteres Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung.

Dabei wird in der stetigen Umgebung der Nullstelle x* ein Startwert $x_{n=0}$ gewählt und die dortige Steigung der Funktion bestimmt. Der Schnittpunkt der zugehörigen Tangente mit der x-Achse bildet nun den nächsten Näherungswert x_{n+1}.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{20}x^2$ mit dem Newton-Verfahren auf zwei Nachkommastellen genau. Verwende als Anfangswert $x_0 = 3$.

zum Video

Die Berechnungsformel aus der Beschreibung zeigt dir, dass du jeweils den Funktionswert und die Steigung an der Stelle x_n bestimmen musst, um den nächsten Näherungswert ermitteln zu können. Dafür wird als Erstes die Ableitung gebildet: $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} - 0{,}1x$

Für das anschließende Vorgehen bietet es sich an, eine Tabelle zu erstellen, in der die benötigten Werte festgehalten werden. Dabei wird der folgende (n + 1) x-Wert unter Verwendung der berechneten Werte aus der vorherigen (n-ten) Spalte eben nach der obigen Formel berechnet. Man bestimmt also zunächst Funktionswert und Steigung:

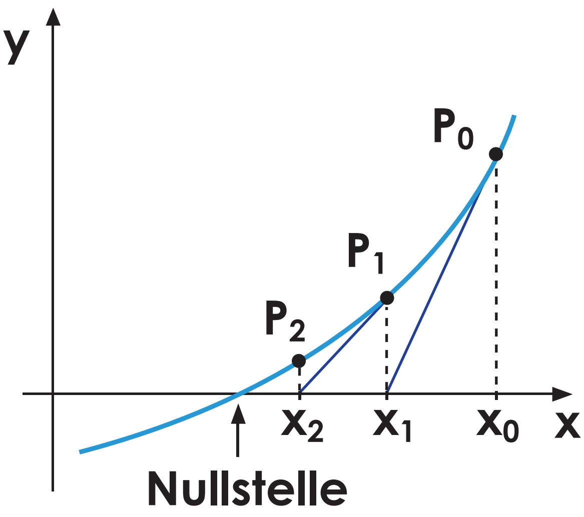
$$f(x_0 = 3) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{20} \cdot 3^2 = 0{,}416$$

$$f'(x_0 = 3) = \frac{1}{4\sqrt{3}} - 0{,}1 \cdot 3 = -0{,}156$$

Diese trägt man ein und erhält daraufhin

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{0{,}416}{-0{,}156} = 5{,}673$$

n	0	1	2	3	4
x_n	3	5,673	4,768	4,644	4,642
$f(x_n)$	0,416	-0,418	-0,045	-0,001	0,000
$f'(x_n)$	-0,156	-0,462	-0,362	-0,348	-0,348



Wenn du schon einmal mit einem Tabellenkalkulationsprogramm wie z.B. Microsoft Excel oder einer ähnlichen Funktion deines Taschenrechners gearbeitet hast, ist es sinnvoll, diese auch hier zu verwenden. Bei wiederkehrenden Rechenoperationen sparst du dir viel Zeit damit.

In der Tabelle sehen wir, dass bereits nach vier Verfahrensschritten keine Änderung der zweiten Nachkommastelle auftritt (rot markiert) und die Nullstelle somit ausreichend genau bestimmt wurde.

Da das Newton-Verfahren auch das Steigungsverhalten einer Funktion im Bereich der Nullstelle berücksichtigt, kann es zu schnellen Lösungen führen.

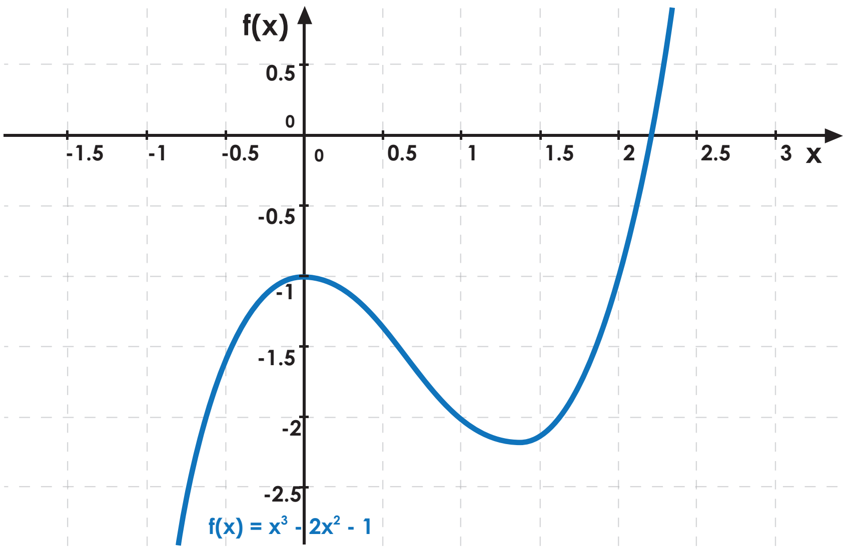
Übungen

1.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 + 1$. Bestimme die Nullstelle in dem Intervall [1;5] auf eine Nachkommastelle genau, indem du einmal den Startwert $x_0 = 5$ wählst und danach $x_0 = 3$. Vergleiche deine Ergebnisse auch mit der Lösung von Aufgabe 2 des Kapitels A02 (Intervallhalbierung).

2.

In der Abbildung wird der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ gezeigt. Skizziere darin zunächst graphisch, was in den ersten drei Schritten beim Newton-Verfahren passiert, wenn du als Startwert $x_0 = 1$ wählst. Führe anschließend rechnerisch drei Schritte nach dem Startwert $x_0 = 1{,}5$ aus. Was fällt dir auf?



3.

Dir wird gesagt, dass du für die Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 6$ im Intervall [-3; 3] nach einer Nullstelle suchen sollst. Welches Problem tritt auf und warum? Wann führt das Newton-Verfahren zu keiner Lösung?

Mit Hilfe von Ober- und Untersummen nähert man Flächen unterhalb von Kurven an. Der exakte Flächeninhalt A kann bestimmt werden, wenn man die Unter- bzw. Obersumme für ein Intervall [a; b] als allgemeine Formel aufstellt.

Die Unter- bzw. Obersumme berechnet sich weiterhin aus der Formel:

$$S_n = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \ldots + h \cdot f(x_n) \qquad \text{mit} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Die Intervallbreite h soll nun unendlich klein werden. Dementsprechend muss die Anzahl an Intervallen n unendlich groß werden.

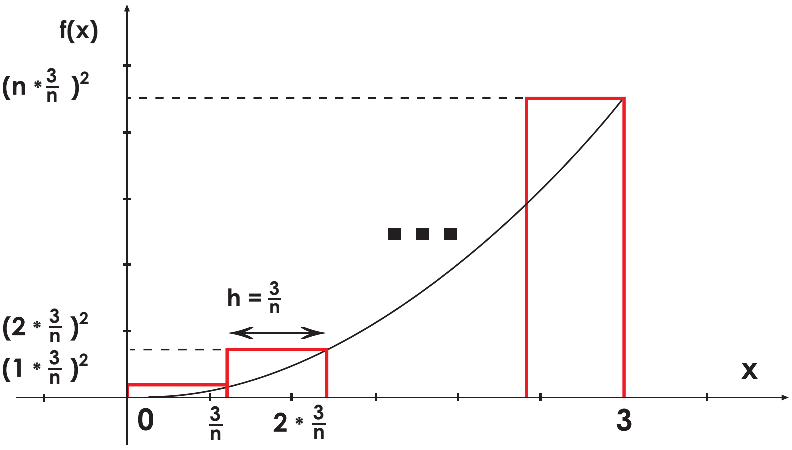
$$h \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad n \to \infty$$

Deswegen kann der Grenzwert von S_n für $n \to \infty$ bestimmt werden.
Der exakte Flächeninhalt A ergibt sich somit zu:

$$A = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Berechne die exakte Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall [0; 3]. Bestimme dafür die Formel für Unter- und Obersumme und bilde jeweils den Grenzwert.

Zunächst kannst du dir wie immer einen Überblick verschaffen, indem du dir den Graphen der Funktion anschaust. Dabei teilst du die Funktion bereits in n Intervalle und beschriftest jeden x- sowie y-Wert. In diesem Fall ist zum Beispiel die Obersumme gezeigt.



Damit kannst du dir ganz einfach die Formel für die Obersumme aufstellen. Die Intervallbreite h ist $\frac{3}{n}$. Du multiplizierst den jeweiligen x-Wert mit dem zugehörigen y-Wert und erhälst:

$$O_n = \frac{3}{n} \cdot \left[\left(1 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \left(n \cdot \frac{3}{n}\right)^2\right]$$

Diese Form der Obersumme muss nun in eine Reihe umgewandelt werden. Dafür bedarf es ein wenig Übung. Als Erstes schaust du dir einen Term an, der in der eckigen Klammer in jedem Glied vorkommt.

$$O_n = \frac{3}{n} \cdot \left[\left(1 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \left(n \cdot \frac{3}{n}\right)^2\right]$$

Diesen Term kannst du nun aus der eckigen Klammer ausklammern, da er in jedem Glied vorkommt. Dabei musst du allerdings daran denken, dass er quadriert wird. Du kannst also nur das Quadrat aus der Klammer ziehen.

$$O_n = \frac{3}{n} \cdot \frac{9}{n^2} \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]$$

Jetzt gilt es nur noch die Reihe in der eckigen Klammer umzuformen.

Die Herleitung dafür ist sehr kompliziert und soll deshalb vernachlässigt werden. Solche Reihen kannst du jedoch im Internet suchen und du wirst dort schnell ein Ergebnis finden. In diesem Fall gilt:

$$[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mit dieser Umformung kannst du den Grenzwert bilden:

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \cdot \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} \frac{27n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{54n^3 + 54n^2 + 27n^2 + 27n}{6n^3}$$

Jetzt teilst du wieder durch die höchste Potenz:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{54 + \frac{54}{n} + \frac{27}{n} + \frac{27}{n^2}}{6} = \frac{54 + 0 + 0 + 0}{6} = 9$$

Die Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall von 0 bis 3 beträgt also 9.

Wichtig ist zu wissen, wie man aus der allgemeinen Form einer Unter- bzw. Obersumme einen exakten Flächeninhalt bestimmen kann. Die Umformung der Reihen ist kompliziert, aber meistens sollten diese als Hinweis gegeben sein.

Übungen

1.

Berechne den Flächeninhalt der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall [0, 4] indem du den Grenzwert der Obersumme bildest.

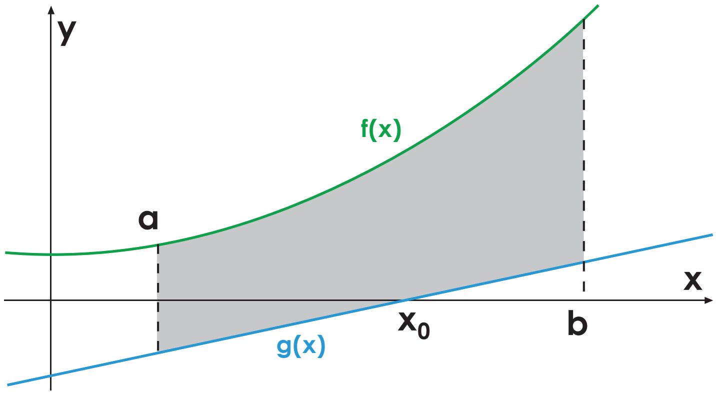
2.

Berechne den Flächeninhalt der Funktion $f(x) = x^3$ im Intervall [0, 5] indem du den Grenzwert der Obersumme bildest. Überprüfe, ob sich mit der Untersumme ein anderes Ergebnis ergibt.

Hinweis: $[1^3 + 2^3 + \ldots + n^3] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$[0^3 + 1^3 + \ldots + (n-1)^3] = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$

Um die Fläche zwischen zwei Funktionen zu bestimmen, müssen die Integrale der einzelnen Funktionen miteinander verrechnet werden. Dabei ist ebenfalls die Vorzeichenregelung bei Integralen zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Intervall [a; b], so wird die Funktion mit den niedrigeren Funktionswerten von der mit den höheren subtrahiert.



Der Gesamtflächeninhalt zwischen den Funktionen ergibt sich also aus der logischen Verrechnung der Teilintegrale:

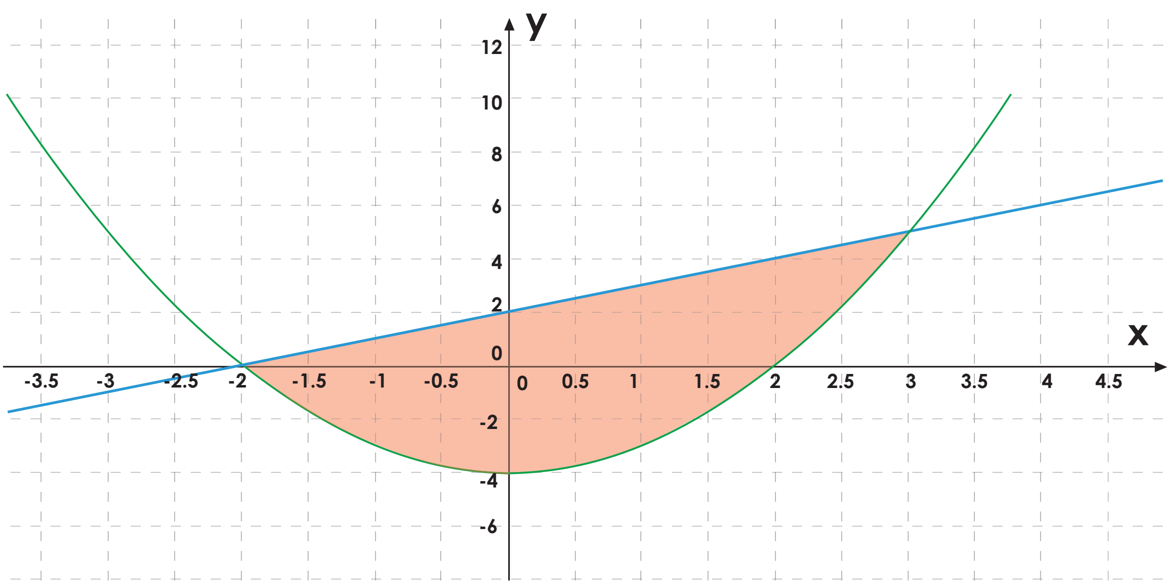
$$A = \int_a^b f(x)\,dx + (-1)\int_a^{x_0} g(x)\,dx - \int_{x_0}^b g(x)\,dx$$

Der erste Summand beschreibt die Fläche der Funktion f(x) oberhalb der x-Achse. Der zweite ist der Teil der Funktion g(x), welcher sich unterhalb der x-Achse befindet. Dieser soll zum ersten Integral addiert werden, dabei muss jedoch ein Vorzeichenwechsel vorgenommen werden. Als Letztes wird nun der positive Teil des Integrals von g(x) subtrahiert.

Berechne die eingeschlossene Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2 - 4$. Erstelle dir hierfür zunächst eine Übersichtsskizze.

Die Funktion f(x) ist eine Gerade, bei g(x) handelt es sich um eine nach unten verschobene Normalparabel. Beides kannst du ziemlich leicht in einer Skizze darstellen, notfalls nimmst du die Graph-Funktion deines Taschenrechners zur Hilfe (z.B. bei schwierigeren Funktionen) und verschaffst dir so einen Überblick. In der Graphik erkennst du die Lage der beiden Funktionen zueinander. Die Fläche zwischen den Funktionen, die berechnet werden soll, ist rot markiert.

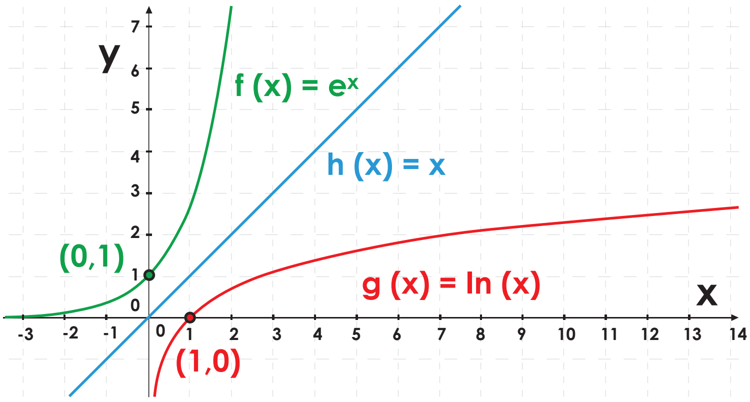
zum Video



Der ln(x) ist der natürliche Logarithmus. Er ist die Umkehrfunktion zur e-Funktion. Bekannt ist bereits $\log_a(x)$ zur Bestimmung des Exponenten einer beliebigen Basis a. Weil die e-Funktion häufig verwendet wird, wird der natürliche Logarithmus als eigene Funktion mit der Basis e eingeführt.

$\log_e(x) = \ln(x)$

$y = e^x \qquad \ln(y) = x$



Die natürliche Logarithmusfunktion existiert nur für $x > 0$. Allgemein gilt weiterhin für Logarithmusfunktionen $\log_a(1) = 0$ und somit auch $\ln(1) = 0$.
Der natürliche Logarithmus ist eine streng monoton steigende Funktion. Auch wenn die Funktion eine Rechtskrümmung besitzt, existiert kein Grenzwert für $x \to \infty$.

$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$f(x) = \ln(x)$ lautet $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Oft wird der natürliche Logarithmus benötigt, um ein Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ zu bilden.

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \to \quad F(x) = \ln(x)$

Skizziere die Funktion $f(x) = 2\ln(2x + 1) + 1$ und vergleiche sie mit dem natürlichen Logarithmus $g(x) = \ln(x)$. Bestimme den Definitionsbereich von f(x) und gib das Grenzverhalten an. Berechne anschließend mögliche Nullstellen.
Wie groß ist zudem die Steigung an der Stelle $x = 1$? Gibt es noch weitere Tangenten von f(x) mit der gleichen Steigung?

Zunächst ist es sinnvoll, sich den groben Verlauf der natürlichen Logarithmusfunktion zu überlegen. Dabei hilft es den Definitionsbereich zu bestimmen und das Randverhalten der Funktion zu untersuchen.

Allgemein gilt für eine Logarithmusfunktion, dass sie nur für ein Argument > 0 definiert ist.

Definitionsbereich $f(x) = 2\ln(2x + 1) + 1$:

$2x + 1 > 0 \quad \to \quad x > -0{,}5$

Das Argument entscheidet dementsprechend über den Definitionsbereich der Logarithmusfunktion. An dieser Stelle liegt zudem eine Asymptote vor:

$\lim_{x\to -0{,}5} f(x) = -\infty$