Inhaltsverzeichnis

1 Graphen einer Zuordnung

Ein Graph ist eine besondere Art der Darstellung. Dabei setzen sich Punkte aus einer x- und einer y-Koordinate zusammen. Die zugeordnete Größe wird auf der senkrechten Achse (y-Achse) aufgetragen. Die horizontale Achse wird als x-Achse bezeichnet. Dabei trägt man den y-Wert über dem zugehörigen x-Wert auf. Anschließend werden die Punkte zu einem Graphen verbunden.

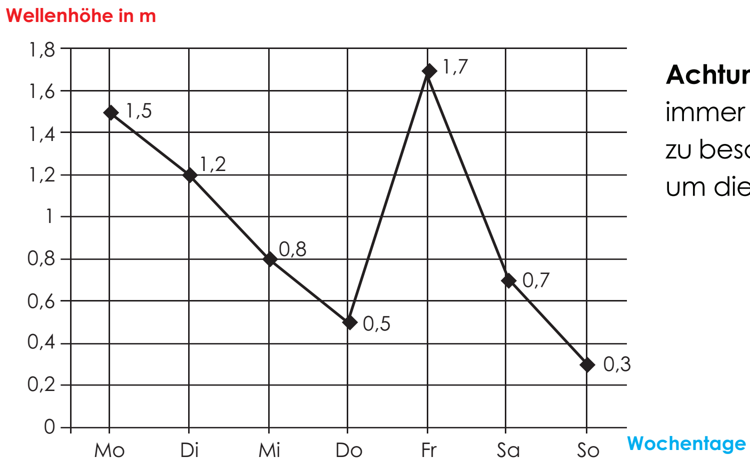
Steffen möchte die Zuordnung mit Hilfe eines Graphen darstellen. Dafür erstellst du als erstes eine Tabelle mit den jeweiligen Werten.

zum Video

x-Achse	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
y-Achse	1,5 m	1,2 m	0,8 m	0,5 m	1,7 m	0,7 m	0,3 m

Die zugeordnete Größe trägst du auf die y-Achse auf. In diesem Fall ist es die Wellenhöhe. Auf der x-Achse stehen die Wochentage. Den Graphen erstellst du, indem du jedem x-Wert den entsprechenden y-Wert zuordnest. Der erste Punkt ist zum Beispiel

x-Wert: Mo → y-Wert 1,5
x-Wert: Di → y-Wert 1,2



Achtung! Wichtig ist, dass du immer daran denkst, die Achsen zu beschriften. Das ist sehr wichtig, um die Graphik zu verstehen.

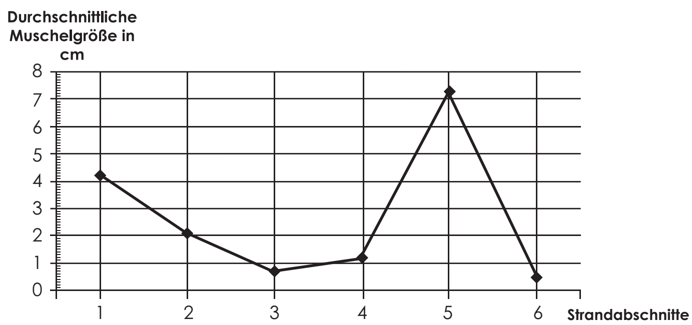
Steffen
Freitag kommen ja noch höhere Wellen als Montag!

Jetzt Du!

1. **Bilde aus der folgenden Tabelle einen Graphen:**

Tag	1	2	3	4	5	6
Windgeschwindigkeiten	2,5	0,3	2	1,2	4	1,5

2. **Erstelle aus dem Graphen eine Tabelle:**



2 Proportionale Zuordnung

Eine besondere Art der Zuordnung ist die proportionale Zuordnung. Proportional bedeutet, dass sich die Zuordnung konstant ändert. Die Werte folgen einer geordneten Zuordnungsvorschrift. Diese lautet für proportionale Zuordnungen:

$$y = k \cdot x \qquad \text{und daher } k = \frac{y}{x}$$

Dabei ist k der Proportionalitätsfaktor. Dieser Faktor beschreibt den Zusammenhang zwischen den beiden Werten x und y. Bildet man den Quotienten y/x, so ergibt sich für jedes Wertepaar das gleiche k. Proportionale Zuordnungen sind quotientengleich.

Wenn du also Werte mit Hilfe einer Zuordnungsvorschrift umrechnen möchtest, so kannst du dir zunächst überlegen, was für eine Zuordnung vorliegt. In diesem Fall ist es eine proportionale Zuordnung. Dafür schaust du dir die Form der Zuordnungsvorschrift an. Der y-Wert (km/h) lässt sich mit Hilfe der Multiplikation eines konstanten Proportionalitätsfaktors k (8/5) mit dem x-Wert (mph) berechnen.

zum Video

$$\text{km/h} = \frac{8}{5} \cdot \text{mph}$$

Willst du nun einen bestimmten x-Wert umrechnen, so musst du ihn lediglich mit dem Proportionalitätsfaktor multiplizieren. Für mehrere Werte geht das am besten mit Hilfe einer Tabelle:

x-Wert	mph	10	30	60	90
y-Wert	km/h	16	48	96	144

Jeden einzelnen y-Wert kannst du mit Hilfe der Zuordnungsvorschrift berechnen.

z.B. $y = \frac{8}{5} \cdot 10 = 16$ $\quad y = \frac{8}{5} \cdot 30 = 48$ $\quad y = \frac{8}{5} \cdot 60 = 96$

Steffen

So kannst du jeden Wert umrechnen. Zum Beispiel entsprechen 10 mph in den USA 16 km/h in Deutschland.

Jetzt Du!

1. Vervollständige die Tabelle mit der Zuordnungsvorschrift: $y = k \cdot x$ und $k = \frac{7}{3}$

x-Achse	1	2	3	4	5	6
y-Achse						

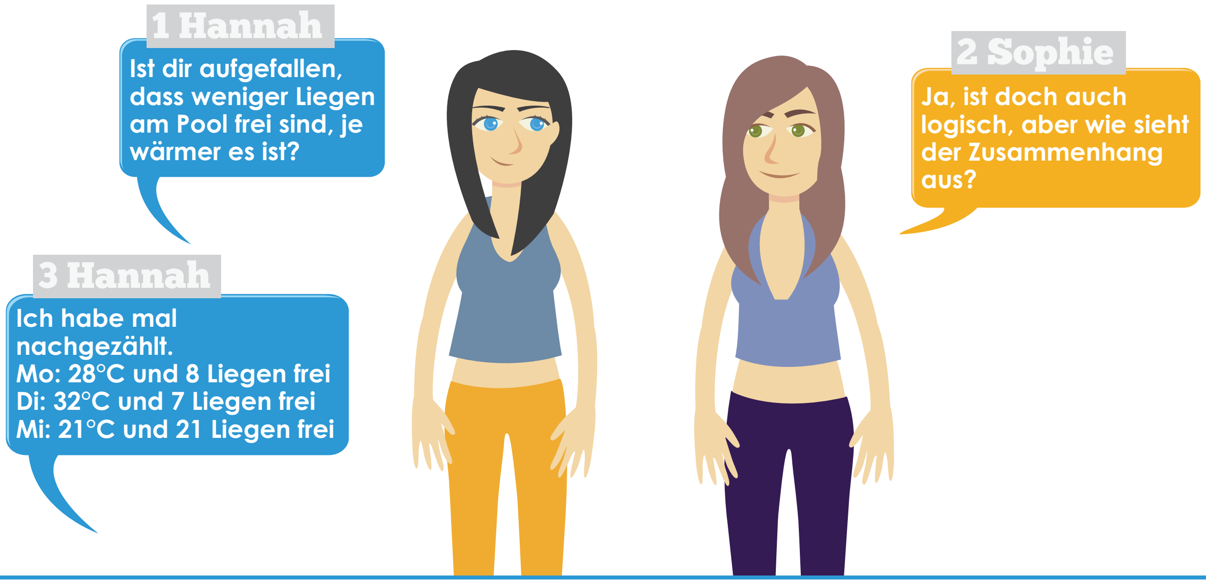
2. Vervollständige die Tabelle einer proportionalen Zuordnung. Berechne dabei zunächst die Zuordnungsvorschrift. Runde auf zwei Nachkommastellen.

x-Wert	4	8		13	17
y-Wert		13	17		

3 Antiproportionale Zuordnung

Im Gegensatz zu den proportionalen Zuordnungen sind antiproportionale Zuordnungen jene, bei denen die Proportionalitätskonstante k produktgleich ist. Das bedeutet, dass für jedes Wertepaar x und y die Multiplikation denselben Wert ergibt. Die Zuordnungsvorschrift lautet:

$$y = \frac{k}{x} \qquad \text{und daher} \quad k = y \cdot x$$



zum Video

Bei dieser Beschreibung könnte es sich um eine antiproportionale Zuordnung handeln, da bei steigender Temperatur die Anzahl freier Liegen abnimmt. Du musst aber überprüfen, ob diese Zuordnung produktgleich ist.

Dafür überprüfst du bei allen Wertepaaren x (Temperatur) und y (Anzahl freier Liegen), ob der gleiche Proportionalitätsfaktor k entsteht.

Produkte bilden: $28 \cdot 8 = 224$ $\quad 32 \cdot 7 = 224$ $\quad 21 \cdot 21 = 441$

Da nicht alle Proportionalitätsfaktoren gleich sind, ist diese Zuordnung nicht produktgleich und somit keine antiproportionale Zuordnung.

Hannah
Also gibt es keine regelmäßige Zuordnungsvorschrift.

Jetzt Du!

1. **Vervollständige die Tabelle mit der Zuordnungsvorschrift:** $y = \frac{k}{x}$ $\quad k = \frac{7}{3}$

x-Achse	1	2	3	4	5	6
y-Achse						

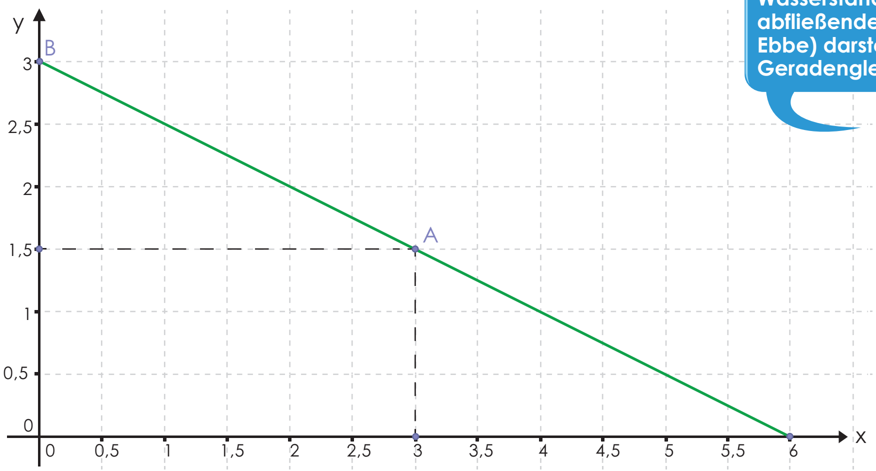
2. **Überprüfe, ob es sich um eine antiproportionale Zuordnung handelt:**

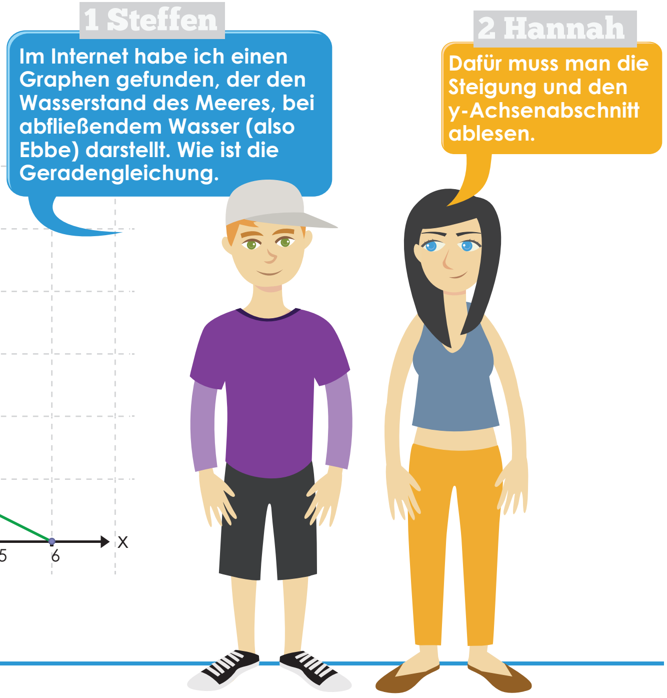
x-Wert	4	8	11	13	17
y-Wert	60	30	$21{,}\overline{81}$	18	7

1 Bestimmen von linearen Funktionen

Wenn eine Graphik mit einer Geraden gegeben ist, kann man aus dieser die Geradengleichung erstellen. Eine Geradengleichung setzt sich immer aus der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b zusammen. Den y-Achsenabschnitt kannst du an der y-Achse ablesen. Die Steigung kannst du mit Hilfe von zwei Wertepaaren $(x_1 ; y_1)$ und $(x_2 ; y_2)$ bestimmen: $\mathbf{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Damit kann dann die Geradengleichung der Form: $\mathbf{y = m \cdot x + b}$ aufgestellt werden.





zum Video

Die Geradengleichung kannst du mit Hilfe der Steigung und dem y-Achsenabschnitt aufstellen. Den y-Achsenabschnitt b kannst du direkt ablesen. Wie der Name schon sagt, ist es der Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse. In diesem Fall kann man bei Punkt B ablesen: **b = 3**

Um die Steigung m zu berechnen, benötigst du zwei Punkte. In der Graphik sind die Punkte B(0 ; 3) und A(3 ; 1,5) eingezeichnet. Die Formel der Steigung lautet:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dabei ist es egal, ob du A als $(x_1; y_1)$ oder $(x_2; y_2)$ wählst. Du kannst ja beide Methoden mal versuchen:

$$m = \frac{1{,}5 - 3}{3 - 0} = -0{,}5 \qquad \text{oder} \qquad m = \frac{3 - 1{,}5}{0 - 3} = -0{,}5$$

So erhältst du aus zwei Punkten die Steigung m. Jetzt kannst du ganz einfach die Geradengleichung aufstellen, indem du deine Werte einsetzt.

$y = m \cdot x + b$
$y = -0{,}5 \cdot x + 3$

2 Gleichungen mit zwei Variablen

Gleichungen mit zwei Variablen sind Gleichungen der Form: **ax + by = c**

Dabei sind a, b und c konstante Werte und x und y die Variablen. Die Gleichung wird durch bestimmte Kombinationen der Variablen x und y gelöst. Die Lösung besteht also aus verschiedenen Wertepaaren (x ; y). Um diese Wertepaare zu bestimmen, muss die Gleichung nach y aufgelöst werden. Daraus erhält man eine Geradengleichung der Form: $\mathbf{y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}}$

Die Wertepaare, die die Lösung der Gleichung bilden, liegen also auf einer Geraden. Es gibt unendlich viele Lösungen. Für jeden Wert x kann der zugehörige Wert y bestimmt werden.

Steffen möchte sich eine bunte Tüte zusammenstellen. Insgesamt hat er 1,20 €, die er ausgeben kann. Die Anzahl an Schlümpfen bezeichnen wir mit x und die Anzahl an Kirschen mit y. Die Gleichung die gelöst werden muss ist.

zum Video

0,05 € · x + 0,1 € · y = 1,20 €

Einzelne Lösungen kannst du durch ausprobieren finden. So könntest du zum Beispiel für dich festlegen, dass Steffen für jeweils 60 Cent Schlümpfe und Kirschen kauft. Das würde bedeuten, dass er 12 Schlümpfe und 6 Kirschen kaufen könnte.

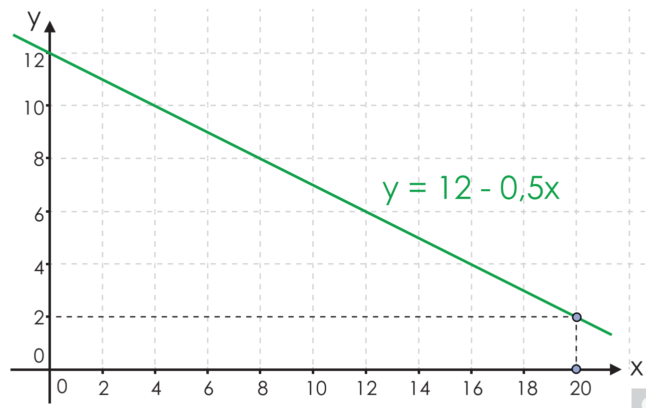
0,05 € · 12 + 0,1 € · 6 = 1,20 €

Das Wertepaar (12 ; 6) ist also eine Lösung der Gleichung. Um allerdings eine allgemeine Lösung zu finden, kannst du die Gleichung in eine Geradengleichung umformen. Das machst du mit Hilfe der Äquivalenzumformung.

0,05 € · x + 0,1 € · y = 1,20 € | - 0,05 € · x
0,1 € · y = 1,20 € - 0,05 € · x | : 0,1 €
y = 12 - 0,5x

Alle Wertepaare, die auf dieser Geraden liegen sind eine Lösung der Gleichung.

Ein weiteres Wertepaar ist z.B. (20 ; 2).



Steffen
Ich hätte mir auch 20 Schlümpfe und 2 Kirschen kaufen können.

Jetzt Du!

1. Überprüfe, ob die Wertepaare Lösungen der Gleichung -4x + 5y = 40 sind:
(10 ; 0) (-10 ; 0) (5 ; 12) (-2 ; 10) (20 ; 24)

2. Finde die Lösungen der jeweiligen Gleichung mit Hilfe der Geradengleichung und zeichne dafür die Geraden.
a) 2y - 5x = 78
b) 6x + 8y = 42
c) 22x - 10y = 12 - 8y

3 Lineare Gleichungssysteme

Gleichungen mit zwei Variablen lassen sich als Geradengleichung darstellen. Sollen zwei dieser Gleichungen gleichzeitig gelten, so nennt man dies ein lineares Gleichungssystem. Die beiden Gleichungen müssen jeweils nach y umgestellt werden.

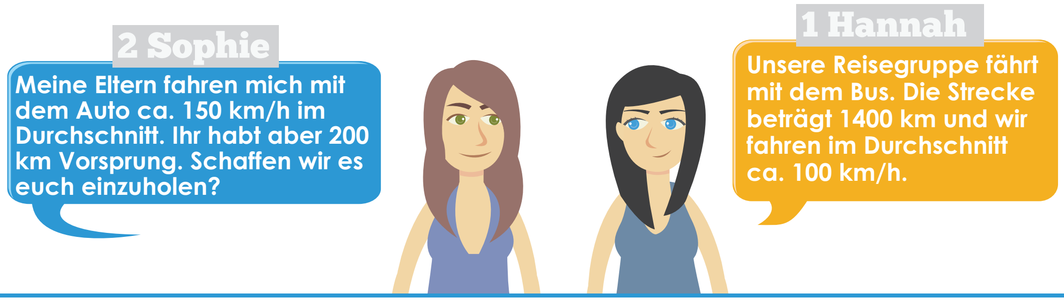
Beispiel: **$3x + 7y = 14$ und $5x + 2y = 20$**

Umgeformt:

$y = 2 - \frac{3}{7}x$ und $y = 10 - \frac{5}{2}x$

Jetzt können beide Geraden in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Der Schnittpunkt S von beiden Geraden ist genau der Punkt, an dem beide Gleichungen gelöst sind. Allgemein kann es drei verschieden Arten von Lösungen geben:

1. Geraden sind parallel: keine Lösung
2. Geraden liegen aufeinander: unendlich viele Lösungen
3. Geraden haben einen Schnittpunkt: eine Lösung



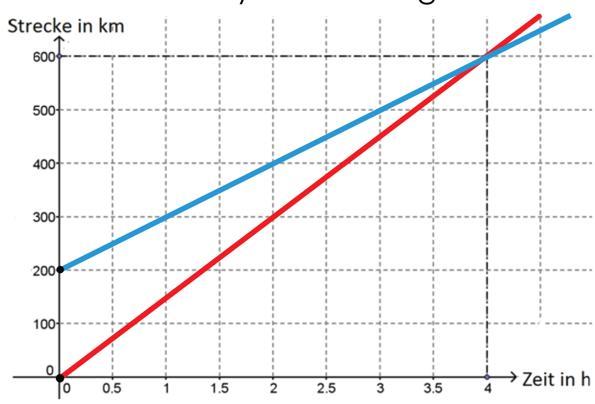
zum Video

Aus der Fragestellung, die Sophie und Hannah gestellt haben, kann man zwei Geradengleichungen bilden:

Die Strecke des Autos ist: Strecke $S_{Auto} = 150 \frac{km}{h} \cdot$ Zeit x

Die Strecke des Busses ist: Strecke $S_{Bus} = 100 \frac{km}{h} \cdot$ Zeit x + 200 km

Diese beiden Gleichungen sind jeweils bereits nach der Variablen y (Strecke) umgestellt. Also kannst du beide Graphen in ein Koordinatensystem eintragen. Die Variable x ist dabei in Stunden aufgetragen.



Jetzt kannst du den Schnittpunkt S ablesen. Nach 4 Stunden hat das Auto den Bus eingeholt. Die beiden treffen sich bei 600 Kilometern.

Jetzt Du!

1. **Bestimme grafisch den Schnittpunkt der beiden Geraden, falls es einen gibt.**
   a) $8x + 4y = 28$ und $16x - 2y = 20$
   b) $12x - 6y = 36$ und $12x - 6y = 42$
   c) $20x = 5y - 15$ und $14x = 7y - 21$

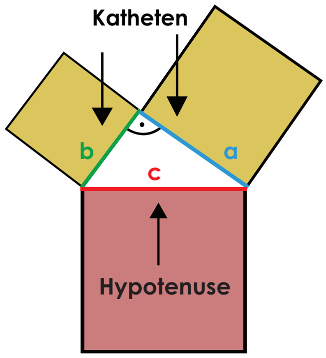
2. **Zwei Flugzeuge fliegen auf gleicher Höhe. Die beiden Gleichungen für die Positionen in dieser Ebene lauten:**
   Flugzeug 1: $8y - 4x = 28$
   Flugzeug 2: $48x = 144 - 12y$
   An welchem Punkt könnte es zu einer Kollision kommen, wenn die Flugbahn eines Flugzeugs nicht geändert wird?

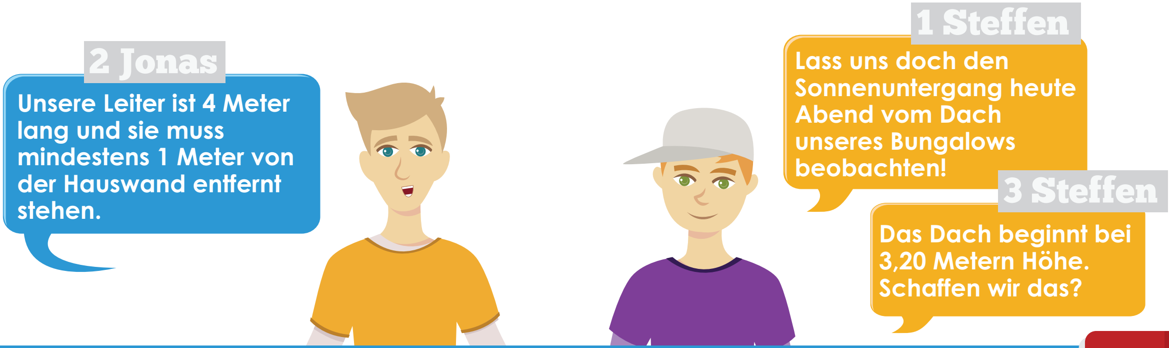
1 Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die längste Seite, die stets gegenüber vom rechten Winkel liegt, als Hypotenuse und die beiden anderen Seiten als Katheten. Zusätzlich gilt in einem rechtwinkligen Dreieck der Satz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

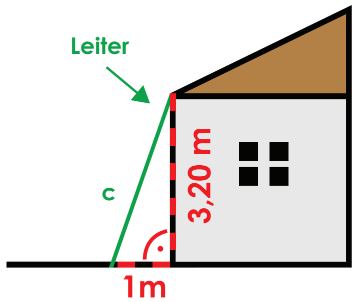
Die Summe der Quadrate über den Katheten (Seite a und Seite b) entspricht dem Quadrat über der Hypotenuse c.





zum Video

Erstelle zunächst eine kleine Skizze zu dem Problem. Markiere darin die bekannten Seiten und den rechten Winkel und überleg dir, welche Seite die Hypotenuse (grün) und welche die Katheten (rot) sind. In unserem Fall ist die Leiter die Hypotenuse. Stelle als Nächstes den Satz des Pythagoras auf und setze die Werte ein. Zuletzt erfolgt die eigentliche Berechnung.



$(3{,}2\ \text{m})^2 + (1\ \text{m})^2 = c^2$

$10{,}24\ \text{m}^2 + 1\ \text{m}^2 = c^2 = 11{,}24\ \text{m}^2 \quad | \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{(11{,}24\ \text{m}^2)} \approx 3{,}35\ \text{m}$

Wie ist das Ergebnis zu verstehen? Steffen weiß es!

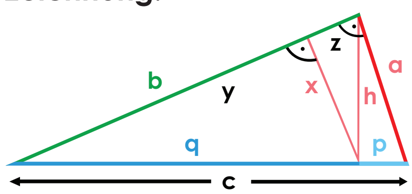
Steffen

Die Leiter muss mindestens 3,35 Meter lang sein. Unsere reicht also ;-) !

TIPP: Man kann auch umgekehrt schließen, dass es sich bei einem Dreieck, in dem die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.

Jetzt Du!

1. Notiere den Satz des Pythagoras zu den rechtwinkligen Dreiecken in der Zeichnung.



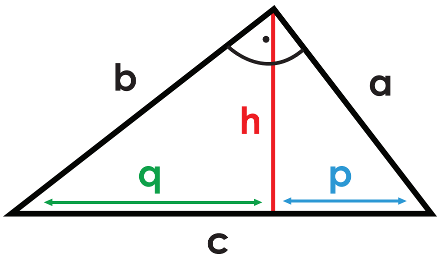
2. Berechne die fehlende Seite des Dreiecks mit den Seiten a = 4,5 m, c = 3,7 m und β = 90°. Erstelle vorher eine Planskizze. Kann man mit der errechneten Seite den Flächeninhalt bestimmen?
3. An steilen Straßen findet man oftmals Schilder, die einen darauf hinweisen, dass beispielsweise eine 8-prozentige Steigung vorliegt. Auf 100 Meter in der Ebene kommen also 8 Höhenmeter. Wie lang ist die Strecke, die man tatsächlich zurücklegt?

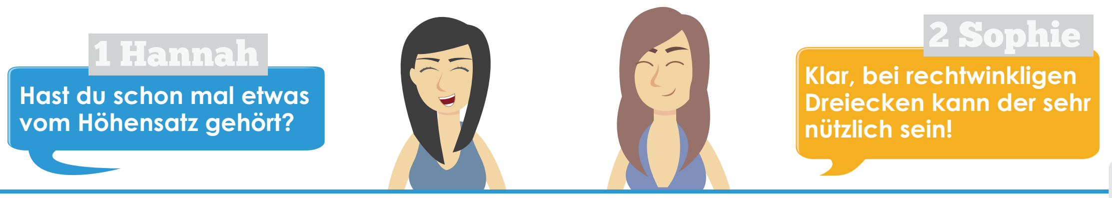
2 Kathetensatz und Höhensatz

Neben dem Satz des Pythagoras können noch weitere Zusammenhänge zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks festgehalten werden.

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ oder $b^2 = c \cdot q$
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

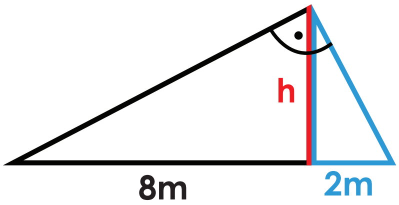
Achtung: Beachte stets die Lage des rechten Winkels, um Katheten und die Hypotenuse festzulegen, bevor du mit den Dreieckssätzen rechnest.





zum Video

In der Skizze ist der Querschnitt der Dachkonstruktion eines Hauses zu sehen. Der linke Abschnitt ist 8 m und der rechte Abschnitt 2 m lang. Wie hoch befindet sich der höchste Punkt oberhalb der unteren Dachkante?



Du erkennst bestimmt schnell, dass man für die Fragestellung die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks berechnen soll. Hierfür bietet es sich an, den Höhensatz anzuwenden. Nun muss man lediglich in die Formel einsetzen.

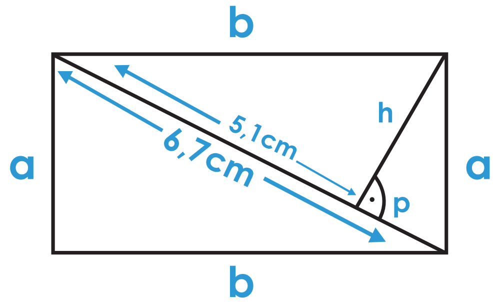
$$h^2 = 8\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 16\text{ m}^2 \quad | \sqrt{}$$
$$h = \sqrt{(16\text{ m}^2)} = 4\text{ m}$$

So lassen sich mit den Hypotenusenabschnitten auch die anderen beiden Längen bestimmen.

Hannah
Die Höhe des Daches beträgt im Beispiel 4 Meter.

Jetzt Du!

1. **Berechne jeweils die Seitenlänge der Dachflächen aus dem Rechenbeispiel oben.**
2. **Berechne die fehlenden Seiten des Rechtecks in der Skizze.**

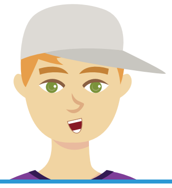


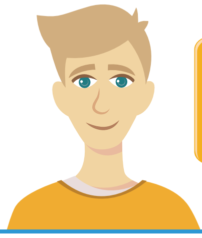
3. **Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe h_a = 2,8 cm und der Hypotenusenabschnitt p = 1,6 cm bekannt. Fertige eine Planskizze an und berechne die fehlenden Seiten.**

Häufig findet der Satz des Pythagoras oder auch der Katheten- und Höhensatz Anwendung, um in Figuren und Körpern unbekannte Seitenlängen zu bestimmen. Hierbei muss man versuchen, rechtwinklige Dreiecke zu finden, in denen man mit den gegebenen Größen die weitere Berechnung durchführen kann.

1 Steffen

Hast du dir mal überlegt, wie man die Höhe einer Pyramide ausrechnet?

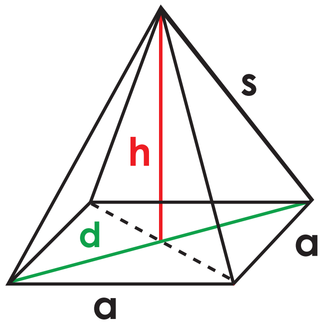




2 Jonas

Mit einer Skizze und den gegebenen Seitenlängen lässt sich da bestimmt etwas berechnen ;-)!

In der Abbildung siehst du die Planskizze einer Pyramide. Die Kantenlänge a beträgt 30 m und s sei 60 m lang. Nun überlegst du dir, wie die gesuchte Höhe mit diesen Angaben bestimmt werden kann. Vermutlich erkennst du auch mit einem scharfen Blick, dass sich ein rechtwinkliges Dreieck zwischen der Höhe h, der Seite s und der halben Diagonalen d verbirgt. Da die Länge der Diagonalen nicht gegeben ist, muss man außerdem noch einen Weg suchen, um diese zu berechnen. Hierfür bietet es sich an, das Dreieck aus den beiden Seiten a und der Diagonalen zu verwenden. Die Rechnung sieht dann folgendermaßen aus:

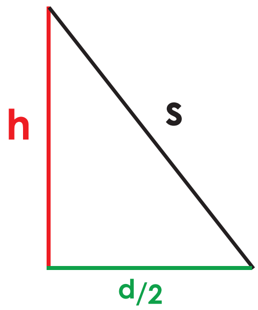


zum Video

$$a^2 + a^2 = d^2 \quad | \sqrt{}$$

$$d = \sqrt{(a^2 + a^2)} = \sqrt{(30\text{ m})^2 + (30\text{ m})^2} \approx 42{,}4\text{ m}$$

Nun bildest du den Satz des Pythagoras für die Höhe h, stellst die Gleichung nach h frei und errechnest die Länge.



$$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 \quad | - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(60\text{ m})^2 - (21{,}2\text{ m})^2} \approx 56{,}1\text{ m}$$

Steffen

In solchen Figuren findet man fast immer Dreiecke zur Berechnung.

TIPP zu anderen geometrischen Körpern: Die Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a berechnet sich immer nach der Formel $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a und die Länge einer Diagonalen d durch einen Würfel mit der Kantenlänge a errechnet sich zu = $\sqrt{3}$ a .

Jetzt Du!

1. Ein Kleiderschrank mit einer Höhe von 200 cm und einer Tiefe von 60 cm wird auf der Rückseite liegend montiert. Beim Aufrichten wird er über die hintere Kante gekippt. Ist das in einem Raum mit 220 cm Deckenhöhe möglich? Zeichne eine Skizze.

2. In der Skizze ist der Querschnitt eines Deiches zu sehen. Berechne die fehlenden Längen und runde dabei das Ergebnis auf ganze Meter.
   TIPP: Die Winkelangabe ist eine wichtige Information zur Lösung der Aufgabe!