Ist die quadratische Gleichung in der allgemeinen Form $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ gegeben, so ist sie zunächst durch Division durch a zu **normieren,** damit sie auf die Form $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ gebracht und dann die p-q-Formel angewendet werden kann.

► Beispiel:

Gegeben ist die Gleichung $2x^2 - 4x - 6 = 0$. Berechnen Sie die Lösungsmenge L.

▼ Lösung:

Zunächst wird die Gleichung normiert.

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad | : 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad p = -2,\ q = -3$

Anwenden der p-q-Formel ergibt die Lösungen.

$$x_1 = -\left(\frac{-2}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 3 \vee x_2 = -\left(\frac{-2}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = -1;\ L = \{-1; 3\}$$

Merke

Jede gemischtquadratische Gleichung kann auf die Form $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ gebracht werden. Die Lösung erfolgt in einem Schritt mit der **p-q-Formel:**

$$\mathbf{x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \text{ und } \mathbf{x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Je nach dem Wert unter der Wurzel hat die Gleichung zwei, ein oder kein Lösungselement.

Übung

Ü1 Berechnen Sie die Lösungsmenge. Wenden Sie die p-q-Formel an.

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$
b) $x^2 + x - 20 = 0$
c) $x^2 - 4x - 5 = 0$
d) $2x^2 + x - 6 = 0$
e) $3x^2 - 18x + 15 = 0$

Aufgaben 1.3

Lineare Gleichungen

A1 Berechnen Sie die Werte für x der folgenden Gleichungen:

a) $3(x + 5) = 0$
b) $x - 1 = 24 - 4x$
c) $9 + 5x = 3 - 3x$
d) $2x(4x + 2) = -4x(3 - 2x) + 12$
e) $x - 5x + 3{,}5 = 2$
f) $0{,}3\overline{3}\,x + 0{,}7\overline{7} = 0{,}1\overline{1}\,x - 0{,}3\overline{3}$
g) $22(x + 2) = 10x$

A2 Ein Team von vier Mitarbeitern erhält für einen Verbesserungsvorschlag 6900 €. Diese Prämie wird nach einem bestimmten Schlüssel untereinander aufgeteilt. Der zweite Mitarbeiter erhält 200 € mehr als der erste. Der dritte Mitarbeiter erhält 200 € mehr als der zweite und der vierte Mitarbeiter erhält 200 € mehr als der dritte. Wie viel € erhält jeder?

A3 Eine Schülergruppe will eine Besichtigung durchführen und mietet einen Bus, der 510 € kosten soll. Jeder Teilnehmer zahlt 25,50 €. Berechnen Sie die Schülerzahl, die an der Busfahrt teilnimmt.

Lineare Gleichungssysteme

A4 Ermitteln Sie die Lösungsmenge mit einem geeigneten Lösungsverfahren.

a) $2x + 2y = 20$
$2x - 2y = 4$

b) $2x - y = 65$
$2x - 2y = 214$

c) $4x - 2y = 30$
$y = x - 10$

A5 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichungssysteme.

a) $2x + 8y + 14z = 178$
$7x + y + 4z = 74$
$4x + 7y + z = 77$

b) $2x + 8y - 6z = 2$
$x + y + z = 18$
$2x - 3z = -14$

c) $x + y + z = 4$
$x - y = 0$
$2x + 4y - 3z = 4$

A6 Thomas kauft eine Jeans und eine passende Jacke dazu. Er bezahlt für beide Kleidungsstücke zusammen 100 €. Die Jeans ist 20 € billiger als die Jacke. Wie teuer sind Jeans und Jacke?

A7 Ein Jugendgruppe plant einen mehrtägigen Ausflug mit dem Bus. Der Gruppe liegen zwei Angebote vor: 1. Angebot 50 € pro Tag und 2,50 €/km. 2. Angebot 100 € pro Tag und 2,00 €/km. Bei welcher Anzahl gefahrener km sind beide Angebote gleich? Welches Angebot ist bei 500 km günstiger?

A8 Ein Einzelhändler bezieht von einem Großmarkt zwei Sorten Apfelsinen der Marken „Sonne“ und „Saftig“. In der ersten Woche bezieht er 40 kg „Sonne“ und 30 kg „Saftig“, in der zweiten Woche 50 kg „Sonne“ und 20 kg „Saftig“. Für die Lieferung der ersten Woche bezahlt er 292 €, für die Lieferung der zweiten Woche 302 €. Berechnen Sie den jeweiligen kg-Preis der einzelnen Apfelsinensorten.

Quadratische Gleichungen

A9 Gegeben sind die quadratischen Gleichungen. Berechnen Sie ihre Lösungsmenge.

a) $x(4x + 3) = 6x^2 + 2x$
b) $4x^2 - x = x(2x + 1)$
c) $x(x + 2) = 4x^2 - x$
d) $x^2 + x - 6 = 0$
e) $x^2 - 16x + 15 = 0$
f) $x^2 - 3x - 7 = 0$
g) $3x^2 - 6x - 9 = 0$
h) $2x^2 + 12x - 14 = 0$
i) $-2x^2 + 8x + 10 = 0$
j) $x^2 - 5x + 4 = 0$
k) $x^2 - 10x + 25 = 0$
l) $-x^2 - 16x + 60 = 0$

A10 Eine Terrasse wird mit 108 quadratischen Platten ausgelegt. Die Kantenlängen einer Platte sind 50 x 50 cm. Welche Abmessungen hat die Terrasse, wenn ihr Längenmaß dreimal so groß ist wie ihr Breitenmaß?

A11 Die Klasse FGW 11a macht mit einem Reisebus einen Ausflug zu einem Gesamtkostenpreis von 175 €. Der Anteil der Reisekosten ist für alle Teilnehmer gleich. In dem Bus sind noch 10 Plätze frei. Bei voll besetztem Bus müsste jeder Mitfahrer 2 € weniger bezahlen. Wie hoch ist der Fahrpreis und wie viele Schülerinnen und Schüler nehmen am Ausflug teil?

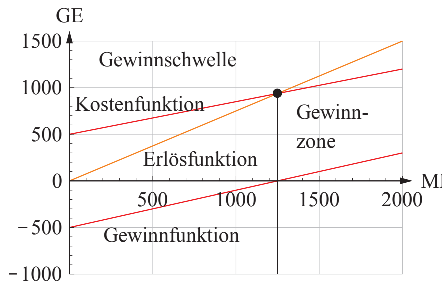
A12 Ein Maschine wird zweimal mit dem gleichen Prozentsatz vom aktuellen Restbuchwert abgeschrieben. Nach der zweiten Abschreibung liegt ein Restbuchwert von 9600 € vor. Wie viel Prozent beträgt der Abschreibungssatz, wenn der Anschaffungswert der Maschine 15 000 € beträgt?

2.2.6 Anwendungen der linearen Funktion

a) Kosten, Erlös und Gewinn

In der Ökonomie wird zur Ermittlung der Gewinnzone häufig ein einfaches mathematisches Modell verwendet. Hierbei werden die Begriffe Kosten, Erlös und Gewinn in Zusammenhang gebracht.

Bei der Produktion eines Gutes entstehen **Gesamtkosten,** die sich aus den fixen Kosten (Kosten, die unabhängig von der Produktionsmenge sind) und den variablen Kosten (Kosten, die von der Menge des produzierten Gutes abhängen) zusammensetzen.



Neben dem Kostenbegriff ist der **Erlösbegriff** sehr wichtig. Unter Erlös versteht man den Preis eines verkauften Produktionsgutes.

Unter **Gewinn** versteht man in der Regel die Differenz von Erlös und Kosten.

Gewinn = Erlös − Kosten oder kurz: **G = E − K**

► Beispiel:

Ein Unternehmen produziert Schrauben eines bestimmten Typs.
Die fixen Kosten betragen 500 GE. Die variablen Kosten sind 0,35 GE/ME. Das Unternehmen verkauft die Schrauben zu einem Stückpreis von 0,75 GE.

a) Bei welcher Produktionsmenge werden die gesamten Kosten durch die Erlöse aus dem Verkauf gedeckt ($x \in (0; 2000]$)? Berechnen Sie bei dieser Produktionsmenge die Kosten.
b) Geben Sie die Gewinnfunktion an.
c) Skizzieren Sie Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem Schaubild.

▼ Lösung:

a) K sei die Kostenfunktion, die sich aus den variablen Kosten K_v, der Stückzahl x und den fixen Kosten K_f zusammensetzt.

$K(x) = K_f + K_v(x)$ $\qquad$ $K(x) = 500 + 0{,}35x;\ x \in [0; 2000]$

E ist die Erlösfunktion. $\qquad$ $E(x) = 0{,}75 \cdot x$

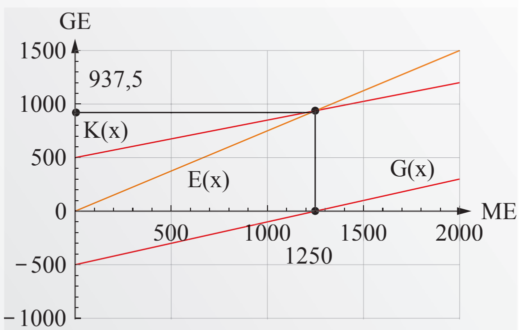
Durch Gleichsetzen der Terme von K(x) und E(x) wird der Wert für die „kostenneutrale" Stückzahl x_G berechnet.

$K(x_G) = E(x_G)$ $\qquad$ $500 + 0{,}35x_G = 0{,}75x_G \Rightarrow x_G = \mathbf{1250}$

Man bezeichnet diese Stückzahl x_G auch als Gewinnschwelle, weil ab diesem Punkt der Erlös größer ist als die Kosten. Die Kosten berechnet man mithilfe der Kostenfunktion K.

$K(1250) = 0{,}35 \cdot 1250 + 500 = \mathbf{937{,}50}$

Es sind 937,50 GE.



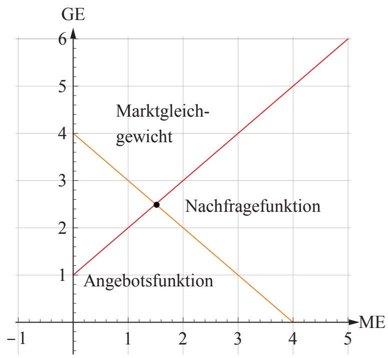
b) Es gilt: Gewinn = Erlös − Kosten

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 0{,}75x - (0{,}35x + 500)$

$G(x) = 0{,}4x - 500$

b) Marktpreisbildung



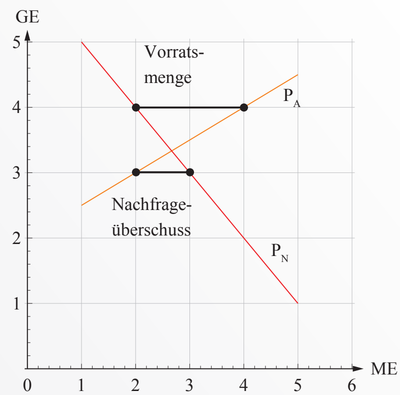
In einer Marktwirtschaft bieten die Anbieter (Produzenten) meistens umso mehr von einem Gut an, je höher der Gewinn und damit in der Regel auch sein Preis ist. Dagegen werden die Nachfrager (Konsumenten) eine Ware umso mehr nachfragen, je niedriger der Preis ist, den sie bezahlen müssen. Der Marktpreis, bei dem nachgefragte und angebotene Menge gleich sind (Gleichgewichtspreis), stellt sich so durch das Wechselspiel von Angebot und Nachfrage ein. Darüber hinaus wird die Preisbildung nicht nur durch das Verhalten von Produzent und Konsument beein flusst, sondern auch der Staat kann aus politischen, sozialen, fiskalischen oder sonstigen Gründen in das Marktpreisgeschehen eingreifen und eine Änderung des Marktpreises bewirken.
Der Eingriff des Staates kann z. B. durch eine Festlegung von Mindest- und Höchstpreisen das Wechselspiel zwischen Angebot und Nachfrage beeinflussen.

► Beispiel:

Gegeben sind die Angebotsfunktion $p_A(x) = 0{,}5x + 2$ und die Nachfragefunktion $p_N(x) = -x + 6$.
Es gilt für beide Funktionen: $x \in [1; 5]$.

a) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht M_G und skizzieren Sie den Sachverhalt.
b) Berechnen Sie die Menge, die bei einem Preis von 3 GE angeboten wird.
c) Die Konsumenten fragen eine Menge von 4 ME nach. Berechnen Sie den Preis.
d) Der Staat garantiert einen Mindestpreis von 4 GE/ME. Berechnen Sie die Menge des Gutes, das der Staat bevorraten muss.
e) Berechnen Sie den Nachfrageüberschuss, wenn ein Höchstpreis von 3 GE festgelegt wird.

▼ Lösung:



a) Gleichsetzen der Terme von p_A und p_N, um die Gleichgewichtsmenge x_G und den Gleichgewichtspreis p_G zu berechnen.

$p_A(x) = p_N(x)$

$0{,}5x + 2 = -x + 6 \Rightarrow x_G = 2{,}67$

$p_G = p_N(2{,}\overline{6}) = -2{,}\overline{6} + 6 = \mathbf{3{,}\overline{3}}$ $(M_G(2{,}67|3{,}33)$

b) Man setzt den Term der Angebotsfunktion gleich 3 und berechnet x.

$p_A(x) = 3;\ 0{,}5x + 2 = 3 \Rightarrow x = \mathbf{2\ ME}$

c) Für x wird 4 in den Term der Nachfragefunktion eingesetzt.

$p_N(4) = -4 + 6 = \mathbf{2\ GE}$

d) Der Mindestpreis liegt über dem Gleichgewichtspreis, sodass eine bestimmte Menge nicht auf dem Markt verkauft werden kann.

$4 = p_N(x_N);\ \ 4 = -x_N + 6 \ \Rightarrow\ x_N = 2$

$4 = p_A(x_A);\ \ 4 = 0{,}5x_A + 2 \ \Rightarrow\ x_A = 4;$ Vorratsmenge: $4 - 2 = \mathbf{2}$

Die Menge von 2 ME lagert der Staat auf Vorrat ein.

e) Der Marktpreis liegt unter dem Gleichgewichtspreis, sodass der Anbieter eine größere Menge (3 ME) auf dem Markt verkaufen könnte.

$3 = p_N(x_N) = p_A(x_A);\ \ 3 = -x_N + 6 \ \Rightarrow\ x_N = 3;\ \ 3 = 0{,}5x_A + 2 \ \Rightarrow\ x_A = 2$

Nachfrageüberschuss: $3 - 2 = \mathbf{1\ ME}$

► Beispiel:

Berechnen Sie die Punkte, in denen sich die Parabeln schneiden, wenn f mit $f(x) = x^2 + 4x - 3$ und g mit $g(x) = 3 - 0{,}5x^2$ gegeben sind. Skizzieren Sie die Graphen.
Zeichnen Sie mithilfe des GTR beide Graphen und prüfen Sie Ihr Ergebnis.

▼ Lösung:

Gleichsetzen der beiden Funktionsterme von f und g

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 4x - 3 = 3 - 0{,}5x^2$$
$$1{,}5x^2 + 4x - 6 = 0$$

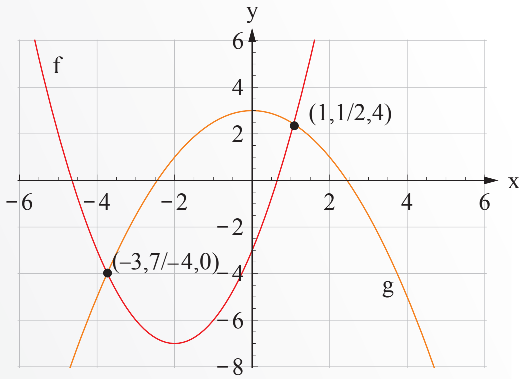
Die quadratische Gleichung wird mithilfe der p-q-Formel gelöst.

$$x^2 + \frac{8}{3}x - 4 = 0$$

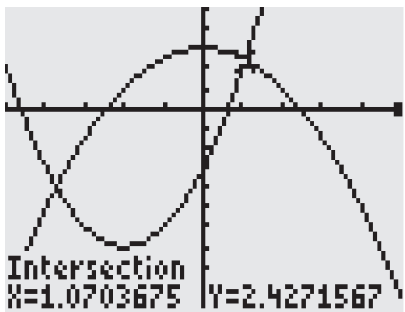
$$\Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4} = \mathbf{1{,}07}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} - \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4} = \mathbf{-3{,}74}$$

$f(1{,}07) = g(1{,}07) = 2{,}43$; $S_1(1{,}07|2{,}43)$
$f(-3{,}74) = g(-3{,}74) = -3{,}97$; $S_2(-3{,}74|-3{,}97)$



Einsatz des GTR (obiges Beispiel):
Man gibt unter **Y1=** und **Y2=** die beiden Terme zu den beiden Funktionen **Y1 = x² + 4x − 3** und **Y2 = 3 − 0,5x²** ein.
Unter **CALCULATE ↓ INTERSECTION** und dreimal **ENTER** erhält man die beiden Graphen und das Ergebnis des rechten Schnittpunktes.



Übung

Ü1 Berechnen Sie beide Schnittpunkte der Graphen von f und g und skizzieren Sie die Graphen von f und g. $f(x) = 2x^2 + x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 4$.

Anwendungen (Marktgleichgewicht, Seite 50)

Ü2 Gegeben sind $p_N(x) = 0{,}2x^2 - 2x + 5$ und $p_A(x) = 1{,}5x - 0{,}1x^2$; $x \in [0; 5]$.
Zu berechnen ist: Marktgleichgewicht und Nachfrageüberschuss bei einem Preis von 4 GE/ME.

Aufgaben 2.3

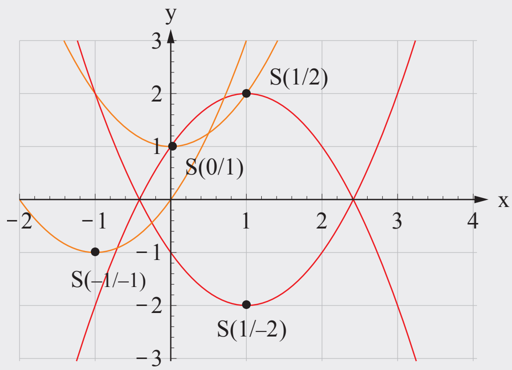
A1 Eine Normalparabel wird so verschoben, dass ihr Scheitelpunkt im Punkt S liegt. Geben Sie ihre Funktionsgleichung an.

a) $S(1|-1)$ b) $S(0|-5)$ c) $S(3{,}5|2{,}5)$ d) $S(a|2a)$

A2 Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform folgender Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = x^2 + x$ b) $f(x) = 4x^2 - x - 4$
c) $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ d) $f(x) = x^2 + 3x - 8$

A3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Parabeln, die durch Verschiebung und Streckung aus der Normalparabel hervorgegangen sind.



A4 Gegeben sind die Funktionen f.

a) $f(x) = x^2 - x - 6$
b) $f(x) = 2x^2 - 32x + 28$
c) $f(x) = 4x^2 - 12x - 7$
d) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
e) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$
f) $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$

1. Ermitteln Sie die Diskriminante und berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen mit der x- und y-Achse.
2. Berechnen Sie den Scheitelpunkt.
3. Skizzieren Sie den Graphen mithilfe der berechneten Punkte.
4. Prüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem GTR.

A5 Berechnen Sie die Schnittpunkte, in denen sich die Graphen der Funktionen f und g schneiden.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$; $g(x) = 6 - x^2$ b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $g(x) = 8x - 2x^2$
c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ d) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$; $g(x) = x + 5$

A6 Wie lauten die quadratischen Funktionen, die folgende Nullstellen haben?

a) $x_1 = -3$; $x_2 = 3$ b) $x_1 = -2$; $x_2 = 1$
c) $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$

A7 Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - bx + c$ geht durch die Punkte $P_1(1|1)$ und $P_2(-1|-2)$. Ermitteln Sie b und c.

Anwendungen

A8 Gegeben sind $p_A(x) = 4 + 4x - 0{,}25x^2$ und $p_N(x) = 15 - x$; $x \in [1; 6]$.

a) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht.
b) Bestimmen Sie die Vorratsmenge bei einem Mindestpreis von 14 GE/ME.

A9 Gegeben sind $p_A(x) = -0{,}33x^2 + 3x + 1$ und $p_N(x) = 6 - 1{,}5x$; $x \in [0{,}5; 4]$.

a) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht.
b) Berechnen Sie die zu lagernde Warenmenge, um den Erzeugern einen Preis von 5 GE/ME zu garantieren.

2.6.6 Anwendung (Wirtschaftlichkeit)

Unter der Wirtschaftlichkeit eines Betriebs versteht man den Quotienten aus Ertrag und Aufwendungen. Versteht man unter dem Ertrag den Betriebsertrag und unter den Aufwendungen betriebliche, ordentlich kalkulierbare Aufwendungen, so gelten dafür auch die Begriffe Erlös und Kosten.

Eine Produktion ist wirtschaftlich, wenn der Erlös größer als die Kosten ist. Das heißt, dass der Quotient aus Ertrag und Aufwand größer als 1 sein muss.

Merke

Wirtschaftlichkeit $= \dfrac{\textbf{Erlös}}{\textbf{Kosten}}$ $\qquad$ $\mathbf{W(x) = \dfrac{E(x)}{K(x)}}$ **(Wirtschaftlichkeitsfunktion)**

► Beispiel:

Gegeben sind die Erlösfunktion E: $E(x) = 12x$ und die Kostenfunktion K: $K(x) = x^3 - 4x^2 + 9x + 12$ (Seite 74).

a) Geben Sie die Wirtschaftlichkeitsfunktion W(x) an.
b) Berechnen Sie die Produktionsmenge, bei der die Wirtschaftlichkeit 1 ist.
c) Ermitteln Sie die Wirtschaftlichkeit bei Produktionsmengen von 1; 2,5 und 5.
d) Skizzieren Sie den Graphen der Wirtschaftlichkeitsfunktion für $x > 0$.

▼ Lösung:

a) Aufstellen der Wirtschaftlichkeitsfunktion.

$$W(x) = \frac{12x}{x^3 - 4x^2 + 9x + 12}$$

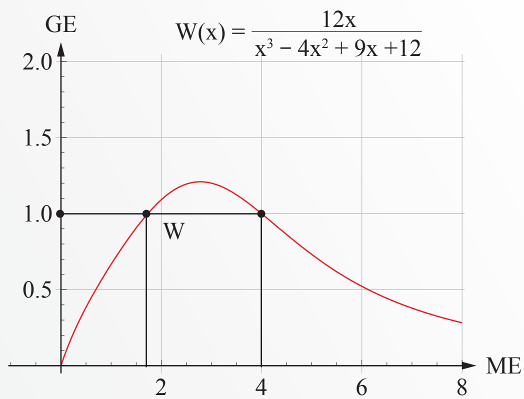
b) Man setzt Zähler- und Nennerterm gleich und berechnet mit dem GTR x (Seite 75). Die berechneten Werte für x sind Nutzenschwelle und Nutzengrenze (Seite 75).

$$\frac{12x}{x^3 - 4x^2 + 9x + 12} = 1; \Rightarrow 12x = x^3 - 4x^2 + 9x + 12$$

$$0 = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$$

$x = \mathbf{4}$ bzw. $x = \mathbf{1{,}73}$

c) Für $x = 1$; $x = 2{,}5$ und $x = 5$ werden die Funktionswerte berechnet.
$W(1) = \mathbf{0{,}\overline{6}}$; $W(2{,}5) = \mathbf{1{,}20}$; $W(5) = \mathbf{0{,}73}$



2.6.7 Anwendung (Umsatzrentabilität)

Bestimmte Größen wie z. B. Produktivität und Wirtschaftlichkeit sind in jedem Betrieb messbare Größen. Bei der **Rentabilität** – im Folgenden ist die **Umsatzrentabilität,** die auch als Gewinnquote bezeichnet wird, gemeint – handelt es sich dagegen um eine in der Marktwirtschaft weitverbreitete *unternehmerische Zielsetzung*. Die Rentabilität ist also keine absolute, sondern eine relative Größe.

Unter der **Umsatzrentabilität** eines Betriebes versteht man den Quotienten aus Gewinn und Erlös. Gewinn G und Erlös E sind Begriffe aus der Kostentheorie. Ihre Werte und damit die Werte für die Umsatzrentabilität können für eine bestimmte Menge x berechnet werden.

Merke

Umsatzrentabilität $= \dfrac{\textbf{Gewinn}}{\textbf{Erlös}}$ $\quad \mathbf{R(x)} = \dfrac{\mathbf{G(x)}}{\mathbf{E(x)}}$ **(Umsatzrentabilitätsfunktion)**

► Beispiel:

Gegeben sind die Erlösfunktion E: $E(x) = 8x$ und die Kostenfunktion K: $K(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 12$.

a) Geben Sie die Umsatzrentabilitätsfunktion R(x) an.
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion R. Was stellen Sie fest?
c) Bei welcher verkauften Menge ist die Umsatzrentabilität 12,5 %?
d) Skizzieren Sie den Graphen der Umsatzrentabilitätsfunktion für $x > 1$.

▼ Lösung:

a) Aufstellen der Umsatzrentabilitätsfunktion.

$$R(x) = \frac{8x - (x^3 - 4x^2 + 6x + 12)}{8x} = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2x - 12}{8x}$$

b) Es werden die Nullstellen des Zählerterms mithilfe des GTR berechnet (Seite 75).

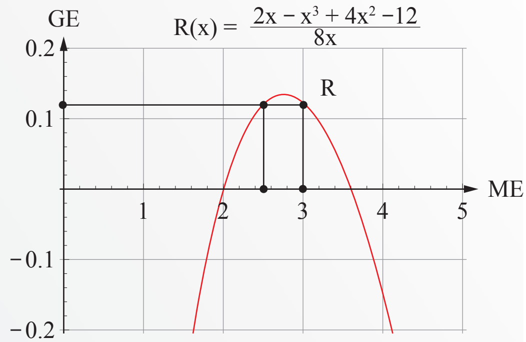
$0 = x^3 + 4x^2 + 2x - 12$
$0 = x^3 - 4x^2 - 2x + 12$
$x_1 = \mathbf{2}$ und $x_2 = \mathbf{3{,}65}$
Die berechneten Werte für x sind Nutzenschwelle ($x = 2$) und Nutzengrenze ($x = 3{,}65$).

c) Die Umsatzrentabilität wird in der Regel in % angegeben. Eine Umsatzrentabilität von 12,5 % erreicht der Betrieb bei einer verkauften Menge von 3 ME. Wie man am Graphen erkennt, existiert eine weitere Lösung bei $x \approx 2{,}5$.

$$\frac{-x^3 + 4x^2 + 2x - 12}{8x} = 0{,}125$$

$\Rightarrow\ 0 = x^3 - 4x^2 - x + 12 \ \Rightarrow\ x = \mathbf{3}$

d) Grafik rechts



Aufgaben 2.6

A1 Geben Sie den ungefähren Verlauf der Graphen folgender Funktionen f an (GTR benutzen):

a) $f(x) = \frac{-1}{x}$ b) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x^3}$

A2 Geben Sie die Funktion f an, wenn mit dem Graphen von $g(x) = \frac{1}{x}$ folgende Veränderungen vorgenommen werden:

a) Graph wird um 3 Einheiten nach rechts verschoben,
b) Graph wird um 4,5 Einheiten auf der y-Achse verschoben,
c) Graph wird um −1 auf der x-Achse und um 2 auf der y-Achse nach oben verschoben.

A3 Geben Sie die Verschiebungen längs der beiden Achsen an, um aus $f(x) = \frac{1}{x}$ folgende Funktionen zu erhalten:

a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{2}{2x+1}$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

Definitionslücken

A4 Gegeben sind folgende Funktionen f mit:

a) $f(x) = \frac{2}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ c) $f(x) = \frac{2x}{x-5}$ d) $f(x) = \frac{4x}{x^2-9}$

e) $f(x) = \frac{4x^2-4}{1-x^2}$ f) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$

Ermitteln Sie:
1. Definitionsbereich und Definitionslücke(n) und
2. Nullstellen.
3. Skizzieren Sie den Graphen.

Behebbare Definitionslücken (Lücken)

A5 Bestimmen Sie von folgenden Funktionen f die Definitionslücken.
Geben Sie die behebbaren Definitionslücken an.
Wie muss $f(x_0)$ definiert werden, um die Definitionslücke bei x_0 zu beheben?

a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{1-x}{1-x^2}$ c) $f(x) = \frac{-1-x}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{1+x}{x^2-x-2}$

Asymptoten

A6 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten von f.

a) $f(x) = \frac{3x}{x+10}$ b) $f(x) = \frac{2-x}{x+4}$ c) $f(x) = \frac{x^2-x-1}{2x^2}$ d) $f(x) = \frac{1+x}{10-x^2}$

Zusammenfassende Aufgaben

A7 Gegeben sind folgende Funktionen f:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{3x}{1-3x}$ c) $f(x) = \frac{4-x}{x-4}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x}$ f) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ g) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ h) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{2x^2-6x}$

1. Bestimmen Sie Definitionsbereich, Definitionslücken, Nullstellen, behebbare Lücken und die Gleichung der Asymptoten.
2. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen unter Verwendung der unter 1) ermittelten Ergebnisse.

Anwendungen

A8 Gegeben sind die Nachfragefunktion $p_N(x) = \frac{12}{1+0{,}5x}$; $x \in [1; 6]$ und die Angebotsfunktion $p_A(x) = 8x - 0{,}3x^2 - 6$; $x \in [1; 6]$.
a) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht.
b) Berechnen Sie den Nachfrageüberschuss bei einem Marktpreis von 4 GE/ME.
c) Berechnen Sie den Angebotsüberschuss bei einem Marktpreis von 8 GE/ME.

4.4 Die Ableitungsfunktion f′

Für jeden beliebigen Punkt $P(x_0|f(x_0))$ des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ kann man die Steigung berechnen, z. B.:

$\mathbf{x_0 = -2}$: $f'(-2) = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} (x-2) = \mathbf{-4}$

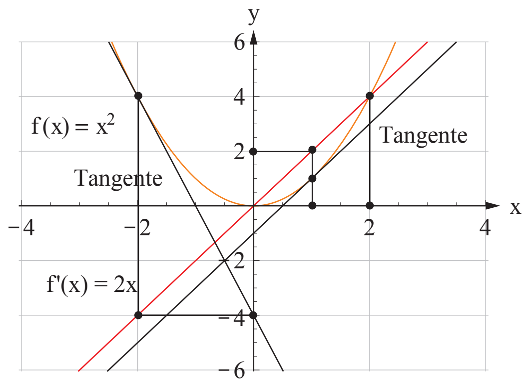
$\mathbf{x_0 = -1}$: $f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x-1) = \mathbf{-2}$

$\mathbf{x_0 = 0}$: $f'(0) = \lim\limits_{x \to -0} \frac{x^2-0}{x+0} = \lim\limits_{x \to -0} x = \mathbf{0}$

$\mathbf{x_0 = 1}$: $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = \mathbf{2}$

$\mathbf{x_0 = 2}$: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

Zeichnet man in einem Koordinatensystem zu jedem x_0-Wert den zugehörigen Wert für die Steigung ein, so erhält man den Graphen einer weiteren Funktion (hier der Graph der linearen Funktion $g(x) = 2x$). Die Funktion g wird mit f′ bezeichnet.
Sie lautet: $\mathbf{f'(x) = 2x}$.



Es ist sehr umständlich, auf die vorstehende Weise von einer in einem Intervall differenzierbaren Funktion f die zugehörige Funktion f′ zu bestimmen, mit der an jeder Stelle des Intervalls der Steigungswert ermittelt werden kann. Ein anderes Verfahren führt hier mithilfe des schon behandelten Differenzialquotienten schneller zum Ziel.

► Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - x^2$.

a) Bestimmen Sie die Funktion f′, mit deren Hilfe in jedem beliebigen Punkt x_0 die Steigungswerte ermittelt werden können.
b) Berechnen Sie die Steigungswerte für $x_0 = 1$; $x_0 = 0$ und $x_0 = -1{,}5$.

▼ Lösung:

a) Man wendet die Formel von Seite 122 an und setzt $f(x) = 4 - x^2$ und $f(x_0) = 4 - x_0^2$.
Es wird die Ableitung von f an der Stelle x_0 ermittelt. Mithilfe des binomischen Lehrsatzes gelingt es, den Term $x - x_0$ auszuklammern und dann zu kürzen. Der Grenzwertprozess für $x \to x_0$ liefert den Term für $f'(x_0)$. Entsprechendes gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$: Da dies für alle $x_0 \in D(f)$ gilt, kann x_0 durch x ersetzt werden. Die Funktion $\mathbf{f'(x) = -2x}$ heißt **Ableitungsfunktion** von f mit $f(x) = 4 - x^2$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{4 - x^2 - (4 - x_0^2)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(-x + x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (-x - x_0) = \mathbf{-2x_0}$$

$\mathbf{f'(x) = -2x}$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ können jetzt die zugehörigen Steigungswerte $f'(x)$ berechnet werden.

$x_0 = 1$ $\quad f'(1) = -2$

$x_0 = 0$ $\quad f'(0) = 0$

$x_0 = -1{,}5$ $\quad f'(-1{,}5) = 3$

Anmerkung:

Ist von einer ganzrationalen Funktion f die Ableitungsfunktion f′ bekannt, so kann der Funktionswert $f'(x)$ der Ableitungsfunktion f′ an jeder Stelle $x \in D(f)$ berechnet werden. Das heißt, man kann für jeden Punkt $P(x|f(x))$ des Graphen der Funktion f den Steigungswert $f'(x)$ berechnen.

► Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x$ und die Stelle $x_0 = 1{,}5$.

a) Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f′ sowie die Steigung im Punkt $P(1{,}5|f(1{,}5))$.

b) Skizzieren Sie die Graphen von f, f′ und den der Tangente durch $P(1{,}5|f(1{,}5))$.

▼ Lösung:

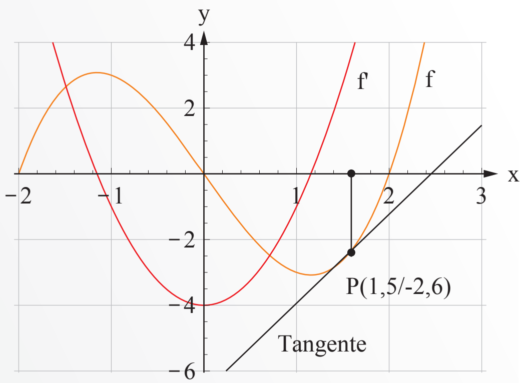
a) Man wendet die Formel (2) von Seite 122 an und setzt: $f(x) = x^3 - 4x$; $f(x_0) = x_0^3 - 4x_0$.
Die Polynomdivision $(x^3 - x_0^3 - 4x + 4x_0) : (x - x_0)$ liefert den Term: $x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2 - 4$.
Der Grenzwertprozess für $x \to x_0$ liefert den Term der Ableitungsfunktion f′.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3 - 4x + 4x_0}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2 - 4)$$

$f'(x_0) = 3x_0^2 - 4$ bzw. $\mathbf{f'(x) = 3x^2 - 4}$



b) Der Steigungswert im Punkt $P(1{,}5|-2{,}6)$ ist **2,75.** ($f'(1{,}5) = 3 \cdot 1{,}52 - 4 = 2{,}75$)

Die Bestimmung der Ableitungsfunktion f′ bzw. die Berechnung der Ableitung einer Funktion f an einer Stelle $x \in D(f)$ wird in der Mathematik als **Differenzieren** und das Gebiet, das sich damit beschäftigt, als **Differenzialrechnung** bezeichnet.

Anmerkung:

Der Definitionsbereich der Ableitungsfunktion $D(f')$ ist immer im Definitionsbereich der Funktion f mit $D(f)$ enthalten.

Übungen

Ü1 Berechnen Sie die Ableitungsfunktion f′ und den Steigungswert an der angegebenen Stelle x_0:

a) $f(x) = 4x - x^2$; $x_0 = 0$; $x_0 = 3$ b) $f(x) = 2x^2 - 4$; $x_0 = 0{,}5$; $x_0 = -1$

Einsatz des GTR:

Erstellen Sie von der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ die Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion f′ und bestimmen Sie die Steigung $f'(0{,}5)$.

5.4 Einführung in die Kurvenscharen

Häufig werden Funktionen mit einem **Parameter,** z. B. t, angegeben. Bei der Funktion **$f_t(x) = 0{,}5x^3 - tx^2$** mit $t \in \mathbb{R}$ handelt es sich nicht mehr um eine einzige Funktion, sondern um eine **Funktionenschar.** Für verschiedene Werte von t erhält man verschiedene Funktionen. Die Graphen der Funktion f_t bezeichnet man als Kurvenschar.

▶ Beispiel:

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = 0{,}5x^3 - tx^2$; $t \in \mathbb{R}+$. Führen Sie eine Kurvendiskussion von f_t in Abhängigkeit von Scharparameter t durch, indem Sie f_t auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte untersuchen. Zeichnen Sie die Graphen von f_{-2} und f_2.

▼ Lösung:

Nullstellen: $f_t(x) = 0 = 0{,}5x^3 - tx^2$

$\Rightarrow\ 0 = x^2(0{,}5x - t)$

$x_{N_1} = \mathbf{0} \wedge x_{N_2} = \mathbf{2t}$

Extrema: $f_t'(x) = 0 = 1{,}5x^2 - 2tx$

$\Rightarrow\ 0 = x(1{,}5x - 2t)$

$x_{E_1} = \mathbf{0} \wedge x_{E_2} = \mathbf{\frac{4}{3}t}$

$x_1 = 0$; $f_t''(x) = 3x - 2t$; $f_t''(0) = -2t$

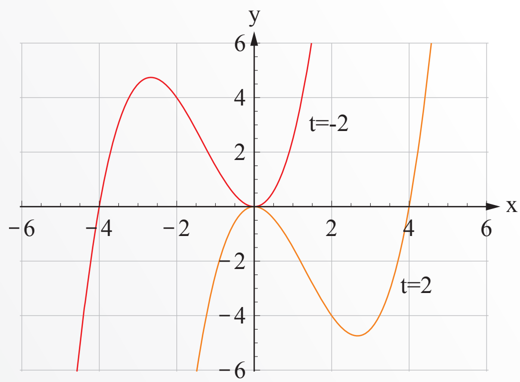
Hochpunkt in P(0|0) für $t > 0$

Tiefpunkt in P(0|0) für $t < 0$

$x_2 = \frac{4}{3}t$; $f_t''(x) = 3x - 2t$; $f_t''\left(\frac{4}{3}t\right) = 2t$

Hochpunkte in $P\left(\frac{4}{3}t \middle| \frac{-16}{27}t^3\right)$ für $t < 0$

Tiefpunkte in $P\left(\frac{4}{3}t \middle| \frac{-16}{27}t^3\right)$ für $t > 0$



Wendepunkte: $f_t''(x) = 0 = 3x - 2t \Rightarrow x_{W_1} = \mathbf{\frac{2}{3}t}$ $\qquad f_t'''(x) = 3;\ 3 \neq 0$

Wendepunkte in $P\left(\frac{2}{3}t \middle| \frac{-8}{27}t^3\right)$

Bei Kurvenscharen treten oft neuartige Fragestellungen auf. So wird z. B. nach derjenigen Funktion der Kurvenschar gefragt, die eine oder mehrere bestimmte vorgegebene Eigenschaften haben soll.

▶ Beispiel:

Gegeben ist die Scharfunktion f mit $f_t(x) = tx^2 - x^3 + 1$; $t \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Funktion f_t, für die der Graph im Punkt P(0|1) einen Tiefpunkt hat.
b) Berechnen Sie die Werte für t, für die die Graphen der Funktionenschar im Wendepunkt eine Tangente haben, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht.
c) Ermitteln Sie die Ortskurven der Extrema und Wendepunkte.

▼ Lösung:

a) Jeder Graph von f_t geht durch den Punkt P(0|1). Mithilfe der ersten Ableitungsfunktion zeigt man, dass bei $x_1 = 0$ ein Extremum vorliegt. Ob dies ein Minimum ist, erkennt man an der zweiten Ableitungsfunktion. Es gilt: Der Graph von f_t hat für alle $t > 0$ bei (0|1) einen Tiefpunkt.

$f_t(0) = 1$
$f_t'(x) = 0 = 2tx - 3x^2 = x(2t - 3x) \;\Rightarrow\; x_1 = \mathbf{0} \wedge x_2 = \mathbf{\frac{2}{3}t}$
$f_t''(x) = 2t - 6x$
$f_t''(0) = 2t;\; 2t > 0$ für $t > 0$
Tiefpunkt bei $T(0|1)$

b) Jede Geradengleichung durch den Nullpunkt lautet $y = mx$. Der Wendepunkt wird mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion berechnet. Zur Berechnung der Steigung m im Wendepunkt wird die erste Ableitungsfunktion benötigt. Da der Wendepunkt mit seinen Koordinaten $\left(\frac{t}{3}\middle|\frac{2}{27}t^3 + 1\right)$ und die Steigung m bekannt sind, kann die Gleichung gelöst werden.

$f_t''(x) = 0 = 2t - 6x \Rightarrow x_W = \mathbf{\frac{1}{3}t}$
$P_W\left(\frac{t}{3}\middle|\frac{2}{27}t^3 + 1\right);\; m = \frac{t^2}{3}$

$$\begin{array}{ccccc} y & = & m & \cdot & x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{2}{27}t^3 + 1 & = & \frac{t^2}{3} & \cdot & \frac{t}{3} = \frac{t^3}{9} \end{array}$$

$1 = \frac{1}{27}t^3 \Rightarrow t = 3$

c) Alle **Extrema** haben außer $x = 0$ die x-Koordinate $\frac{2}{3}t$. Stellt man nach t um und setzt 1,5x für t in den Funktionsterm ein, so erhält man die **Ortskurve** der Extrema. Sie wird mit y_E bezeichnet. Zur Ermittlung der **Ortskurve der Wendepunkte** setzt man im Funktionsterm für t den Term 3x ein. Diese Ortskurve wird mit y_W bezeichnet.

$x = \frac{2}{3}t \;\Rightarrow\; t = 1{,}5x$
$f(x) = \mathbf{1{,}5x} \cdot x^2 - x^3 + 1 = 0{,}5x^3 + 1$
$y_E = \mathbf{0{,}5x^3 + 1}$
$x = \frac{t}{3} \;\Rightarrow\; t = 3x$
$f(x) = \mathbf{3x} \cdot x^2 - x^3 + 1 = 2x^3 + 1$
$y_W = \mathbf{2x^3 + 1}$

► Beispiel:

Gegeben ist die Scharfunktion f mit $f_t(x) = \frac{x^3}{t} - \frac{2x^2}{t^2}$; $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

a) Ermitteln Sie Nullstellen und Extremstellen. Weisen Sie allgemein die Tiefpunkte aus.
b) Bestimmen Sie die Ortskurve, auf der alle Tiefpunkte liegen.
c) Bestimmen Sie die Ortskurve, auf der alle Wendepunkte liegen.
d) Für welchen Wert von t ist der Punkt P(…) Extrempunkt von f_t?
e) Skizzieren Sie die Graphen für $t \varepsilon \{1, 3, 5, 10\}$ und beide Ortskurven.

▼ Lösung:

a) Jeder Graph von f_t geht durch den Punkt $P(0|0)$ und hat bei $\frac{2}{t}$ eine zweite **Nullstelle.**

$f_t(x) = 0 = \frac{x^3}{t} - \frac{2x^2}{t^2} = x^2\left(\frac{x}{t} - \frac{2}{t^2}\right) \Rightarrow x = \mathbf{0}$
$0 = \frac{x}{t} - \frac{2}{t^2} \Rightarrow x = \mathbf{\frac{2}{t}}$

Mithilfe der ersten Ableitungsfunktion zeigt man, dass bei $x_1 = 0$ ein **Extremum** sowie weitere **Extrema** bei $\frac{4}{3t}$ vorliegen.

$f_t'(x) = 0 = \frac{3x^2}{t} - \frac{4x}{t^2} = x\left(\frac{3x}{t} - \frac{4}{t^2}\right) \;\Rightarrow\; x = \mathbf{0}$
$0 = \frac{3x}{t} - \frac{4}{t^2} \;\Rightarrow\; x = \mathbf{\frac{4}{3t}}$

Die zweite Ableitungsfunktion liefert das Ergebnis, dass bei x = 0 ein **Maximum** und bei $\frac{4}{t^2}$ **Minima** (Tiefpunkte T) vorliegen.

$f_t''(x) = \frac{6x}{t} - \frac{4}{t^2}$; $f_t''(0) = -\frac{4}{t^2}$; $-\frac{4}{t^2} < 0$

$f_t''\left(\frac{4}{3t}\right) = \frac{4}{t^2}$; $\frac{4}{t^2} > 0$; $\mathbf{T}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3t}} \,\Big|\, \frac{\mathbf{-32}}{\mathbf{27t^4}}\right)$

b) Alle **Tiefpunkte** haben die x-Koordinate $\frac{4}{3t}$. Stellt man nach t um und setzt $\frac{4}{3x}$ für t in den Funktionsterm ein, so erhält man die Ortskurve y_E der Extrema.

$x = \frac{4}{3t} \;\Rightarrow\; t = \frac{4}{3x}$

$f(x) = \frac{x^3 \cdot 3x}{4} - \frac{2x^2 \cdot 3^2 x^2}{4^2} = -\frac{6x^4}{16}$

$y_E = \mathbf{-0{,}38x^4}$

c) Zur Ermittlung der Ortskurve der Wendepunkte bestimmt man mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion die x-Koordinate der Wendepunkte, stellt nach t um und setzt für t den Term $\frac{2}{3x}$ in den Funktionsterm ein. Diese Ortskurve wird mit y_W bezeichnet.

$0 = \frac{6x}{t} - \frac{4}{t^2} \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3t} \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{3x}$

$f(x) = \frac{x^3 \cdot 3x}{2} - \frac{2x^2 \cdot 3^2 x^2}{2^2} = -\frac{12x^4}{4}$

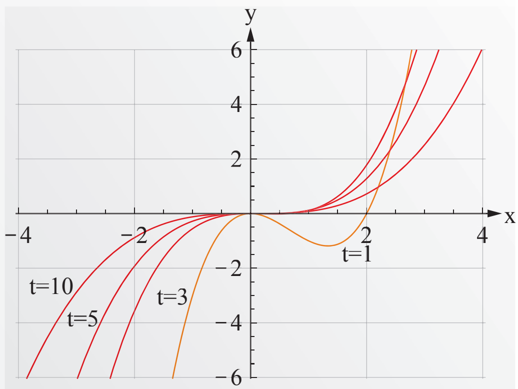
$y_W = \mathbf{-3x^4}$

d) Die Koordinaten des Punktes P(−1|−1)werden in die Funktionsgleichung eingesetzt und nach t umgestellt. (Es gilt: t > 0.)

$-1 = \frac{(-1)^3}{t} - \frac{2(-1)^2}{t^2} \;\Rightarrow\; -1 = \frac{-t}{t^2} - \frac{2}{t^2}$

$t^2 = t + 2 \;\Rightarrow\; 0 = t^2 - t - 2$

$t_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 2} \;\Rightarrow\; \mathbf{t = 2}$



Übungen

Ü1 Gegeben ist die Funktionenschar f mit $f_t(x) = x^3 - 2x^2 + tx$; $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

a) Ermitteln Sie den Wert von t, für den der Graph von f_t an der Stelle x = 1 ein Minimum hat.

b) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen f_t dieselbe Wendestelle haben.

Ü2 Gegeben ist die Funktionenschar f mit $f_t(x) = 0{,}5t^2x^3 - tx^2$; $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{Z}$.

a) Bestimmen Sie die Gemeinsamkeit aller Funktionenscharen.

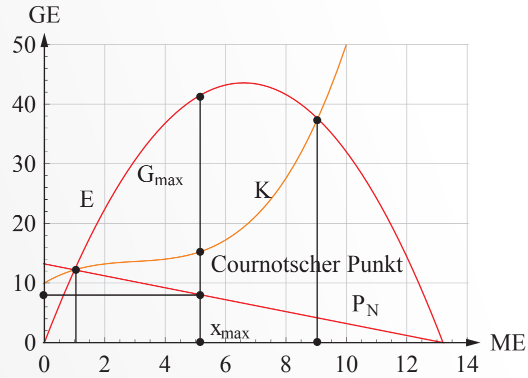
b) Zeigen Sie: f_t hat für alle Werte von t zwei Nullstellen.

c) Zeigen Sie, dass die Ortskurven von Extrema und Wendepunkte identisch sind.

d) Skizzieren Sie für $t \in \{-1, 1, 3, 5\}$.

f) Zu Ehren des französischen Mathematikers und Ökonomen A. Cournot wird in der Wirtschaftstheorie die gewinnmaximale Absatzmenge x_{max} auch als *cournotsche Menge* x_C bezeichnet (Monopolist). Der zu x_0 zugehörige Preis heißt *cournotscher Preis* (PC(5,51) = 7,69 GE). Der Schnittpunkt $P_C(5{,}51|7{,}69)$ heißt *cournotscher Punkt*.

Dabei versteht man unter dem cournotschen Preis den Funktionswert der Preisabsatzfunktion – auch als Nachfragefunktion p_N bezeichnet – an der Stelle x_{max}.



$P_C(x_{max}) = -a_{max} + b$

$p_N(x) = -x + 13{,}2$

$P_C(5{,}51) = -5{,}51 + 13{,}2 = \mathbf{7{,}69}$

Übung

Ü1 Die Funktionsgleichungen einer Kosten- und einer Nachfragefunktion lauten: $K(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 4x + 11{,}2$ und $p_N(x) = -x + 10$.

a) Berechnen Sie Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

b) Berechnen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den Maximalgewinn.

Ü2 Untersuchen Sie die Kosten- und Gewinnsituation, wenn die folgende Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E gegeben sind: $D_{ök} = [0; 9]$ ($D_{ök}$: ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich); $K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 10$; $E(x) = 15x$ (vollständige Konkurrenz); $E(x) = -6x^2 + 40x$ (Angebotsmonopol).

a) Skizzieren Sie die Graphen von K, k, k_V, K′ und E in ein Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie das Betriebsminimum und das Betriebsoptimum sowie die kurzfristige und langfristige Preisuntergrenze.

c) Ermitteln Sie die Grenzkostenfunktion K′.

d) Berechnen Sie beide Gewinnschwellen (GTR).

e) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

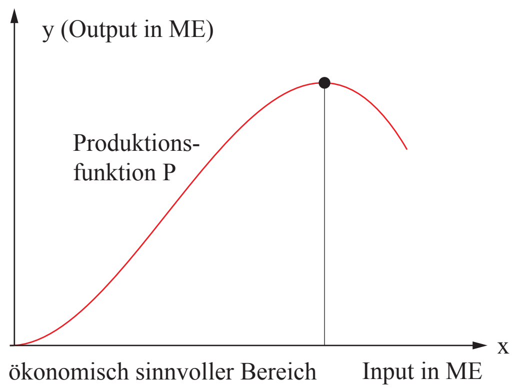
f) Geben Sie zu den mathematischen Ergebnissen eine ökonomische Interpretation an.

g) Bestimmen Sie den cournotschen Preis.

6.3.2 Produktionstheorie

Der Produktionsbegriff soll im Folgenden weiter gefasst werden als im Sprachgebrauch üblich. Unter Produktion soll die Schaffung von mittelbar und unmittelbar Nutzen stiftender Güter verstanden werden. Neben der Erzeugung von Gütern gehört auch die Hervorbringung von Dienstleistungen sowie von Leistungen im Handel und des Transportgewerbes usw. dazu. Dies alles sind Leistungen, für die der Konsument bereit ist zu zahlen.

Ausgangsfunktion bei der Analyse eines Produktionsvorganges ist die **Produktionsfunktion P.** Man bezeichnet sie auch als ertragsgesetzliche Produktionsfunktion oder als **Ertragsfunktion.**



Man bedient sich in der Regel eines mathematischen Modells, und zwar wählt man als Modell u. a. eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph für $x > 0$ (erster Quadrant) in einem ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{ök}$ monoton steigt.

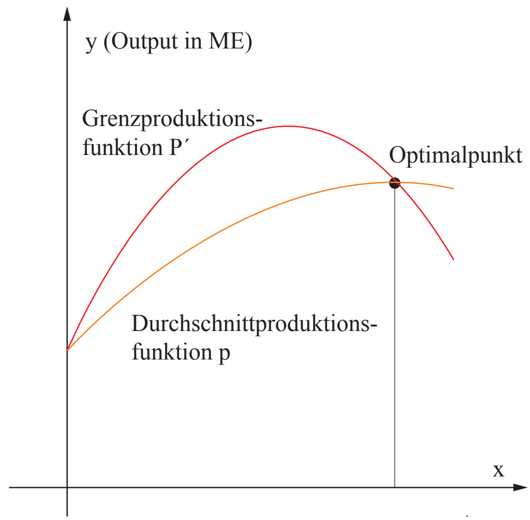
Die x-Werte bezeichnen den Input in ME_x und die y-Werte den Output in ME_y. Man spricht beim Output auch vom **Ertrag** und beim Input von **Arbeitseinheiten.**

Außer der Produktionsfunktion, die die Input-Output-Beziehung von Produktionsmengen ausdrückt, sind noch Begriffe wie **Grenzproduktivität** und **durchschnittliche Produktivität** von Bedeutung.

Unter **Grenzproduktivität** versteht man die erste Ableitungsfunktion **P′(x)** der Produktionsfunktion. Sie gibt den von Einheit zu Einheit zunächst ansteigenden, später abfallenden Outputzuwachs an. Grafisch bedeutet dies, dass die Produktionskurve im Maximum der Grenzproduktivitätskurve ihren Wendepunkt hat.

Unter der **durchschnittlichen Produktivität** versteht man die Funktion p(x), die man durch Division der Produktionsfunktion P durch die Anzahl der ME des Inputs x erhält.

$$\mathbf{p(x) = \frac{P(x)}{x}}$$



Das Maximum der Funktion p(x) ist besonders wichtig, denn ab hier sinkt die Zunahme der Durchschnittsproduktivität. Man wird, wenn nicht andere Faktoren wie Preis, Lohn, Absetzbarkeit usw. etwas dagegen aussagen, nicht über diesen Produktionswert, auch als Optimalpunkt bezeichnet, hinaus produzieren.

► Beispiel:

Gegeben ist die Produktionsfunktion P mit $P(x) = -2x^3 + 10x^2 + x$ und maximal für die Produktion zur Verfügung stehenden 3 Mengeneinheiten (ME_x).

a) Geben Sie den Definitionsbereich $D_{ök}$ an und ermitteln Sie Nullstellen und Extrema.
b) Ermitteln Sie die Grenzertragsfunktion und berechnen Sie ihren Maximalpunkt.
c) Ermitteln Sie Durchschnittsertragsfunktion und berechnen Sie ihren Maximalpunkt.
d) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von Durchschnittsproduktionskurve und der Grenzproduktionskurve der Optimalpunkt ist.
e) Zeichnen Sie alle drei Graphen in ein Koordinatensystem.

▼ Lösung:

a) Der ökonomische Definitionsbereich ist in der Regel vorgegeben.

$$D_{ök} = [0; 3]$$

Da die Funktion P nur im $D_{ök}$ untersucht wird, liegt nur bei $x = 0$ eine Nullstelle vor.

Mithilfe der ersten Ableitung P' können zwar die relativen Extrema errechnet werden, doch die sind nur zum Teil aussagefähig und die absoluten Extrema liegen am Rande des Definitionsbereiches bei $x = 0$ und $x = 3$.

Nullstelle:

$0 = -2x^3 + 10x^2 + x \;\Rightarrow\; x_1 = 0$

$0 = -2x^2 + 10x + 1 \;\Rightarrow\; x_2 \approx 4{,}9;\; 4{,}9 \notin D_{ök}$

$P'(x) = 0 = -6x^2 + 20x + 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1{,}88$ und $(x_2 = -1{,}54)$

$P(0) = 0;\; P(3) = -2 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 + 3 = 39$

b) Unter der **Grenzproduktivität P′** versteht man die Kurve der ersten Ableitungsfunktion $P'(x)$ der Produktionsfunktion P. Zu berechnen ist ihr Maximum. Dies geschieht mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion. Es liegt bei einer Inputmenge von 1,67 ME_x. Durch Einsetzen von 1,67 in die Grenzproduktivitätsfunktion wird der Maximalpunkt berechnet. Er ist der Wendepunkt des Graphen der Produktionsfunktion P.

$P'(x) = -6x^2 + 20x + 1$

$P''(x) = 0 = -12x + 20 \;\Rightarrow\; x = 1{,}67$

$P_{max}\,(1{,}67|17{,}67)$

Bis zur Menge ME_x $x = 1{,}67$ nimmt die Grenzproduktion zu, d. h. dass aus *ökonomischer* Sicht bei **einer zusätzlich eingesetzten Inputmenge** die **Grenzproduktion zunimmt.** Bei höherem Input nimmt die Grenzproduktion ab. Dass es sich um ein Maximum handelt, zeigt man mithilfe der dritten Ableitungsfunktion $P'''(x)$.

$P'''(x) = -12\,;\, -12 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $P_{max}(1{,}67|17{,}67)$

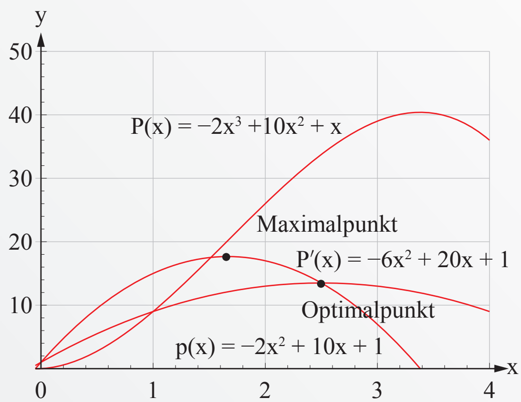
c) Unter der Durchschnittsproduktivität p versteht man den Quotienten aus Produktion und Mengeneinheit. Mittels der ersten Ableitungsfunktion p' berechnet man ihren Maximalwert, der auch als **Optimalpunkt** bezeichnet wird. Ökonomisch bedeutet der Wert von $x = 2{,}5$, dass die **durchschnittliche Produktion pro Input bei x = 2,5 maximal** ist. Dass es sich um ein Maximum handelt, zeigt man mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion $p''(x)$.

$p(x) = \frac{-2x^3 + 10x^2 + x}{x} = -2x^2 + 10x + 1$

$p'(x) = 0 = -4x + 10 \;\Rightarrow\; x_{opt} = 2{,}5$

$P_{opt}(2{,}5|13{,}5)$

$p''(x) = -4;\, -4 < 0 \;\Rightarrow\;$ Maximum



d) Dass die Grenzertragkurve durch den Gipfelpunkt der Durchschnittsertragskurve geht, errechnet man durch Gleichsetzen der beiden Funktionen.

$p(x) = P'(x);\; -2x^2 + 10x + 1 = -6x^2 + 20x + 1$

$4x^2 - 10x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ und $x_{opt} = 2{,}5$

$P_{opt}(2{,}5|13{,}5)$

Übung

Ü1 Gegeben sind die Produktionsfunktion P mit $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$ und die maximal zur Verfügung stehenden 3 Arbeitseinheiten (Inputmenge).

a) Geben Sie $D_{ök}$ an.

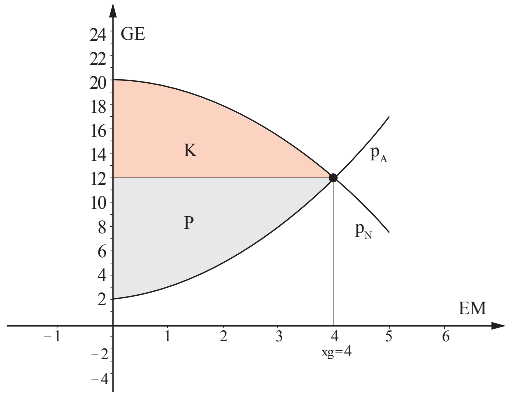
b) Ermitteln Sie die Grenzproduktionsfunktion und berechnen Sie ihren Maximalpunkt.

c) Bestimmen Sie die Durchschnittsproduktionsfunktion und berechnen Sie ihren Maximalpunkt.

d) Zeigen Sie, dass T der Optimalpunkt des Schnittpunkts der Durchschnittsproduktionskurve und der Grenzproduktionskurve ist.

e) Zeichnen Sie alle drei Graphen in ein Koordinatensystem.

Produzentenrente:
Die Produzenten, die bereit sind, ihr Produkt zu einem Preis zu verkaufen, der unter dem Marktpreis liegt, erzielen eine Mehreinnahme, wenn sie statt zum niedrigeren Preis zum Marktpreis verkaufen können. Den so von allen Anbietern erzielten **Gesamtbetrag** bezeichnet man als **Produzentenrente P.** Er ist in der Grafik durch die gefärbte Fläche P gekennzeichnet.



► Beispiel:

Auf einem Markt sind die Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = 20 - 0{,}5x^2$ und die Angebotsfunktion p_A mit $p_A(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 2$ gegeben.
Berechnen Sie:

a) das Marktgleichgewicht,
b) die Konsumentenrente,
c) die Produzentenrente.

▼ Lösung:

a) Man setzt die beiden Funktionsterme gleich, berechnet die Werte für die Gleichgewichtsmenge x_g und dann die Werte für die Preiskoordinate $p_N(4)$. $M_g = (4|12)$.

$p_N(x) = p_A(x)$
$20 - 0{,}5x^2 = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 2$
$0 = x^2 + 0{,}5x - 18 \;\Rightarrow\; \mathbf{x_g = 4}$
$p_N(4) = 20 - 0{,}5 \cdot 4^2 = \mathbf{12}$

b) Mithilfe der Integralrechnung wird die Konsumentenrente K bestimmt. Sie wird dargestellt durch den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von p_N im Intervall [0; 4] und der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $M_g(4|12)$. Sie beträgt 21,33 GE.
Das Marktgleichgewicht liegt in $M_g(4|12)$.

$$K = \int_0^4 (20 - 0{,}5x^2 - 12)dx = \left[8x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^4 = \left(32 - \frac{32}{3}\right) - (0) = \frac{64}{3} = \mathbf{21{,}33}$$

c) Die Produzentenrente P wird ermittelt durch die Berechnung des Flächeninhalts zwischen der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $M_G(4|12)$ und dem Graphen von p_A im Intervall [0; 4].
Sie beträgt 25,33 GE.

$$P = \int_0^4 (12 - (0{,}5x^2 + 0{,}5x + 2))dx = \left[10x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \left(40 - \frac{32}{3} - 4\right) - (0) = \frac{76}{3} = \mathbf{25{,}33}$$

Merke

Berechnung von Konsumenten- und Produzentenrente:

1. Schritt: Berechnung des Marktgleichgewichts $M_G(x_0|p_0)$: Bedingung: $p_N(x\ ) = p_A(x)$

2. Schritt: Berechnung des bestimmten Integrals für die

Konsumentenrente: $\mathbf{K = \int_0^b (p_N(x) - p_0)dx}$ und die

Produzentenrente: $\mathbf{P = \int_0^b (p_0 - p_A(x))dx}$

Übung

Ü1 Berechnen Sie im Intervall $I = [0; 6]$ die Konsumenten- und Produzentenrente, wenn Nachfrage- und Angebotsfunktion bekannt sind: p_A mit $p_A(x) = x^2 + 60$; p_N mit $p_N(x) = 132 - x^2$. Skizzieren Sie den Sachverhalt.

Aufgabe 8.3

A1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und Produzentenrente, wenn folgende Nachfrage- und Angebotsfunktionen gegeben sind:

a) p_N mit $p_N(x) = 11{,}5 - 0{,}5x^2$; p_A mit $p_A(x) = 2x + 1$; $I = [0; 4{,}5]$

b) p_N mit $p_N(x) = 8 - \frac{x^2}{3}$; p_A mit $p_A(x) = 0{,}5x^2 + 1$; $I = [0; 4]$

A2 Das Einprodukt-Unternehmen Müller OHG hat als Gesamtkostenfunktion $K(x) = 5x + 10$ und als Preisabsatzfunktion $p(x) = 10 - 0{,}1x^2$ ermittelt.

a) Stellen Sie die Erlösfunktion E(x) auf und berechnen Sie das Gewinnmaximum.

b) Berechnen Sie die Konsumentenrente im Gewinnmaximum.

c) Bestimmen Sie die lineare Angebotsfunktion, die durch das Gewinnmaximum und den Punkt $P(0|5)$ verläuft, und berechnen Sie die Produzentenrente.

5. Wendepunkt
Die zweite Ableitungsfunktion f_t'' hat eine Nullstelle.

$$12x - 6t = 0 \Rightarrow x_W = \mathbf{\frac{t}{2}}$$

Es gilt: $f_t\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{6\frac{t}{2} - t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{2t}{\frac{t^2}{4}} = \mathbf{\frac{8}{t}}$; $P_W\left(\frac{t}{2}\middle|\frac{8}{t}\right)$

6. Ortskurven
Alle **Extrema** haben die x-Koordinate $\frac{t}{3}$. Stellt man nach t um und setzt 3x in den Funktionsterm ein, erhält man die Ortskurve y_E der Extrema.

$$x_E = \frac{t}{3} \Rightarrow t = 3x$$

$$f(x) = \frac{6x - 3x}{x^2} = \frac{3}{x} \Rightarrow y_E = \frac{3}{x}$$

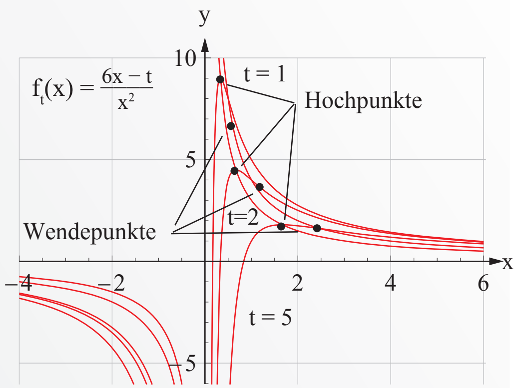
Die **Wendepunkte** haben die x-Koordinate $\frac{t}{2}$.

Es wird nach t umgestellt und 2x in den Funktionsterm eingesetzt. Man erhält die Ortskurve y_W der Wendepunkte.

$$x_W = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2x$$

$$f(x) = \frac{6x - 2x}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow y_W = \mathbf{\frac{4}{x}}$$

7. Graph
Dargestellt sind die Graphen der Funktionenscharen für $t \in \{1, 2, 5\}$ und die Ortskurve, auf denen alle Extrema bzw. Wendepunkte liegen.



Übung

Ü1 Diskutieren Sie nach dem obigen Schema die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{2x^2}{(t + 2x)}$.

9.3.3 Anwendungen (Wirtschaftlichkeits- und Umsatzrentabilitätsfunktionen)

Die **Wirtschaftlichkeitsfunktion** wird als Quotient **von Erlös- und Kostenfunktion** beschrieben.

Wirtschaftlichkeit = $\frac{\textbf{Erlös}}{\textbf{Kosten}}$ **$W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}$ (Wirtschaftlichkeitsfunktion)**

Zwei aus wirtschaftlichen Gründen interessante Fragen zu dieser Funktion sind die nach dem Maximum der Funktion und der Wirtschaftlichkeit an dieser Stelle.

► Beispiel:

Gegeben sind Erlösfunktion E: $E(x) = 15x$ und Kostenfunktion K: $K(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 10$.
Bestimmen Sie W und berechnen Sie das Maximum der Funktion W. Skizzieren Sie den Graphen.

▼ Lösung:

Man bildet den Quotienten von E und K, ermittelt die erste Ableitungsfunktion W′ und bestimmt die Extremstelle.

$$W(x) = \frac{15x}{x^3 - 2x^2 + 5x + 10} \qquad W'(x) = \frac{-30(x^3 - x^2 - 5)}{(x^3 - 2x^2 + 5x + 10)^2}$$

Es liegt hier keine ganzzahlige Lösung vor. Zur Lösung der Gleichung wendet man den GTR an.

```
MATH ↓ Ø:SOLVER
ENTER ↑ EQUATION SOLVER
eqn:Ø = x^3–x^2–5 ALPHA SOLVE
```

$$0 = x^3 - x^2 - 5 \Rightarrow x = \mathbf{2{,}12}$$

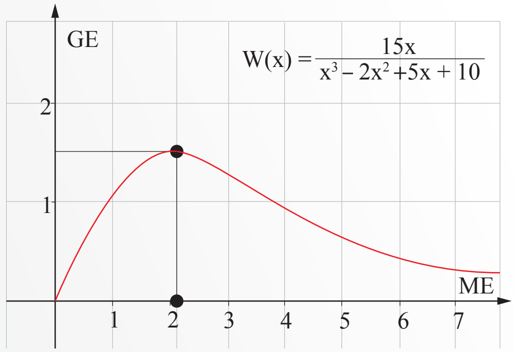
Bei einer Ausbringungsmenge von 2,12 ME ist die Wirtschaftlichkeit am größten W(2,12|1,50). Sie beträgt 1,50 bzw. 150 %:

$$W(2{,}12) = \frac{15 \cdot 2{,}12}{2{,}12^3 - 2 \cdot 2{,}12^2 + 5 \cdot 2{,}12 + 10} = \mathbf{1{,}50}$$

Mithilfe mathematischer Software ermittelt man die zweite Ableitungsfunktion W″.

$$W''(x) = \frac{30(x^5 - 6x^4 - 60x^2 + 60x)}{(x^3 - 2x^2 + 5x + 10)^3}$$

Da W″(3,2) = – 0,62, liegt ein Maximum vor.



Die **Umsatzrentabilitätsfunktion** wird als Quotient von **Gewinn- und Erlösfunktion** beschrieben. Eine zentrale Fragestellung bei dieser Funktion ist die nach der verkauften Menge x, bei der sich die größte Umsatzrentabilität ergibt.

$$\textbf{Umsatzrentabilität} = \frac{\textbf{Gewinn}}{\textbf{Erlös}} \qquad \mathbf{R(x) = \frac{G(x)}{E(x)}} \quad \textbf{(Umsatzrentabilitätsfunktion)}$$

► Beispiel:

Gegeben sind Erlösfunktion E: E(x) = 10x und Kostenfunktion K: K(x) = $x^3 - 5x^2 + 9x + 14$.

a) Geben Sie die Umsatzrentabilitätsfunktion R(x) an.
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion R. Was stellen Sie fest?
c) Berechnen Sie die verkaufte Menge, bei der die Umsatzrentabilität 10 % beträgt.
d) Bei welcher verkauften Menge ist die Umsatzrentabilität am größten? Wie hoch ist bei dieser Menge die Umsatzrentabilität?
e) Skizzieren Sie den Graphen der Umsatzrentabilitätsfunktion für x > 0.

▼ Lösung:

a) Aufstellen der Umsatzrentabilitätsfunktion:

$$R(x) = \frac{10x - (x^3 - 5x^2 + 9x + 14)}{10x} = \frac{x - x^3 + 5x^2 - 14}{10x}$$

10.3.2 Logistisches Wachstum

Eine besondere Wachstumsart ist das **logistische** Wachstum. Es ist in der Realität häufig nur sehr schwer vom beschränkten Wachstum zu unterscheiden. Diese Wachstumsart geht ab einem bestimmten Punkt (Wendepunkt des Graphen) vom **exponentiellen** zu einem **begrenzten** Wachstum über. Ein Maß für diese Wachstumsart ist die Wachstumsrate (Zuwachsrate), die mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion ermittelt wird.

Kennzeichnend für diese Wachstumsart ist die Verlangsamung des Wachstumsprozesses im Laufe der Zeit. Für das logistische Wachstum gibt es verschiedene Gründe:

– Ressourcen wie Bodenschätze, Nahrung oder Lebensraum lassen sich nicht unbegrenzt vermehren.

– Die Höhe des Konsums eines Haushaltes hängt zwar von seinem Einkommen ab, aber der Verbrauch eines bestimmten Gutes, z. B. Obst, Brot, Süßwaren, ist trotz steigenden Einkommens irgendwann gesättigt.

– Die Ausbreitung einer Krankheit (Epidemie) verlangsamt sich irgendwann.

– Eine Nachricht, z. B. über Unterrichtsausfall, breitet sich in einer Schule im Laufe eines Vormittags aus: Zunächst erfahren viele Schüler diese „positive“ Nachricht. Doch irgendwann verlangsamt sich der Zuwachs der informierten Schüler (Zuwachsrate sinkt).

Logistische Wachstumsvorgänge mit realem Hintergrund (bekannte Bestandsdaten) laufen – vereinfacht dargestellt – ab nach dem Gesetz:

$$\mathbf{B(t) = \frac{K \cdot A}{A + (K - A)a^t}}$$

B gibt den Bestand nach t Jahren an.
t gibt die Wachstumszeit in Jahren an.
a beschreibt den Wachstumsfaktor. Es gilt $0 < a < 1$.
A beschreibt den Anfangszustand. Es gilt $A > 0$.
K gibt die Wachstumsgrenze an.

► Beispiel:

In einem Experiment wird das Wachstum einer Hefekultur festgehalten. Das Experiment wird bei ca. 15 000 mg abgebrochen. Es soll logistisches Wachstum angenommen werden.

t in h	0	5	10	15	20	30
B in mg	50	140	380	1000	2600	13 000

a) Entwickeln Sie aus den Größen die logistische Wachstumsfunktion B.
b) Wie würde die Funktion bei begrenztem Wachstum lauten?
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt der Trendwende bei logistischem Wachstum. Skizzieren Sie beide Graphen.
*d) Berechnen Sie die Wachstumsraten bei t = 20 in der Trendwende und bei t = 40.

▼ Lösung:

a) Zur besseren Übersicht werden die gegebenen Werte in die Formel eingesetzt.

$$B(t) = \frac{K \cdot A}{A + (K - A)a^t} = \frac{15\,000 \cdot 50}{50 + (15000 - 50)a^t} = \frac{750\,000}{50 + 14\,950a^t}$$

Zur Bestimmung des Wachstumsfaktors a wählt man einen oder mehrere Bestände aus, berechnet die Werte für a und bestimmt evtl. den Mittelwert.

(140 mg | 5 h): $140 = \frac{750\,000}{50 + 14\,950a^5}$

$50 + 14\,950a^5 = 5357{,}14$ $\qquad a^5 = 0{,}3549 \Rightarrow a = \sqrt[5]{0{,}3549}$; $\mathbf{a \approx 0{,}8128}$

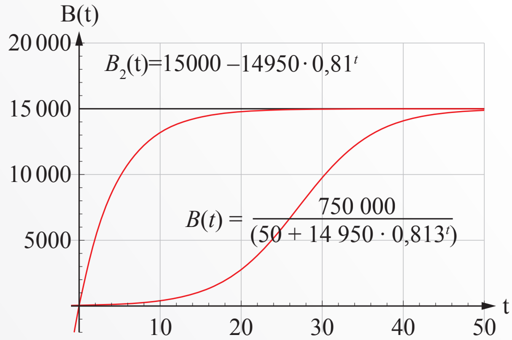
(2600 mg | 20 h): $2600 = \frac{750\,000}{50 + 14\,950a^{20}}$

$50 + 14\,950a^{20} = 288{,}46$ $\qquad a^{20} = 0{,}0159 \Rightarrow a = \sqrt[20]{0{,}0159}$; $\mathbf{a \approx 0{,}8131}$

Es zeigt sich, dass die Werte für a nahezu gleich 0,813 sind. Die Wachstumsfunktion B(t) lautet:

$\mathbf{B(t) = \frac{750\,000}{50 + 14\,950 \cdot 0{,}813^t}}$ bzw. $B(t) = \frac{750\,000}{50 + 14\,950 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}813}}$

b) Funktion bei begrenztem Wachstum:
$B_2(t) = 15\,000 - (15\,000 - 50)0{,}81^t$
$= \mathbf{15\,000 - 14\,950 \cdot 0{,}81^t}$



c) Nach $t_T = -\frac{\ln \frac{K-A}{A}}{\ln a}$ errechnet man die Wendestelle. (Berechnung evtl. über die zweite Ableitungsfunktion.) Der Punkt $P_W(t_T|B(t_T))$ wird als **Trendwende** bezeichnet. Hier geht das Wachstum vom exponentiellen in den beschränkten Verlauf über (CAS-Anhang).

$t_T = -\frac{\ln \frac{15\,000 - 50}{50}}{\ln 0{,}813} = 27{,}54$

$P_W(27{,}5|7472{,}7)$ (Trendwende)

d) Man ermittelt mithilfe von Quotienten- und Kettenregel die erste Ableitungsfunktion B′ und setzt für t die Werte 20, 27 und 40 ein und erkennt, dass die Wachstumsrate zunächst zu- und dann abnimmt. (Berechnungen mit CAS (Anhang).)

$B(t) = \frac{750\,000}{50 + 14950 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}81}}$

$v'(t) = 14\,950 \cdot \ln 0{,}81 \cdot e^{t \cdot \ln 0{,}81} = -3150e^{t\ln 0{,}81}$

$B'(t) = \frac{-(-750\,000 \cdot 3150e^{t \cdot \ln 0{,}81})}{(50 + 14\,950e^{t\ln 0{,}81})^2}$

$B'(20) = 504$; $B'(27) = \mathbf{787}$; $B'(40) = 186$

Charakteristische Verläufe des logistischen Wachstums können auch durch entsprechende Exponentialfunktionen dargestellt werden. Dabei beschreibt die Funktion f im Beispiel nur bedingt einen realen Wachstumsprozess, wie sie beim Bevölkerungswachstum, Einkommens- und Steuerwachstum, Verbrauch von Ressourcen usw. vorkommt. In den Wirtschaftswissenschaften wird die logistische Wachstumsfunktion auch als **„Engelfunktion“** bezeichnet.

► Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{1 + e^{2-x}}$

Dabei sei angenommen, dass x das Einkommen und f(x) der Konsum einer bestimmten Ware sei.
a) Zeichnen Sie den Graphen von f.
b) Nehmen Sie eine Termumformung vor.
c) Ermitteln Sie in den Punkten $P_1(1|0{,}806)$, $P_2(2|1{,}5)$ und $P_3(5|2{,}85)$ die Zuwachsrate.
d) Untersuchen Sie das Verhalten für $x \to \infty$.
e) Berechnen Sie den Wendepunkt.

11.2 Partielle Integration

Mit den Differenziationsregeln können viele Funktionen, auch wenn sie relativ kompliziert sind, abgeleitet werden. Für das Integrieren gibt es wenige entsprechende Regeln. Eine davon ist die Regel für die **partielle** Integration. Sie wird z. B. angewendet bei der Integration der Funktion $f(x) = e^x \cdot x^2$ oder $f(x) = e^x \cdot \sin x$. Das Prinzip der Vorgehensweise wird an einem Beispiel hergeleitet.

Integrieren Sie die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$ ohne Berücksichtigung der Grenzen.
Produktregel:
Wird die Funktion $\mathbf{f(x) = x \cdot e^x}$ **abgeleitet,** wendet man die Produktregel ($(u \cdot v)' = u' \cdot v + \mathbf{u \cdot v'}$) an. Soll nun ein Funktionsterm, z. B. der Form $\mathbf{u(x) \cdot v'(x)}$, integriert werden, kann man auf die obige Gleichung zurückgreifen und beide Seiten integrieren.
(Dabei gilt: $\int (u(x)v(x))'dx = [u(x)v(x)]$.)

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + \mathbf{u(x) \cdot v'(x)}$$

$$\boldsymbol{\int u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x)v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x)dx}$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = \mathbf{e^x(x-1)}$$

Merke

Sind u(x) und v(x) zwei in [a; b] differenzierbare Funktionen, dann gilt:

$$\boldsymbol{\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx} \quad \text{(bestimmtes Integral)}$$

Diese Integration wird als **partielle** Integration bzw. als **„teilweise“** Integration bezeichnet, da die Integration nur teilweise durchgeführt wird, es bleibt ein Restintegral. $\boldsymbol{\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx}$ **Restintegral**

es gilt: 1. $\int_a^b \sin x dx = [-\cos x]_a^b$ 2. $\int_a^b \cos x dx = [\sin x]_a^b$

► Beispiel:

Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int_0^\pi x \cdot \sin x dx$ und b) $\int_a^b \ln x dx$.

▼ Lösung:

a) $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin x dx = \rightarrow \int_0^\pi x \cdot \sin x dx = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -1 \cos x dx \quad \text{(Restintegral)}$$

$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

$$= [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^\pi = \pi - 0 = \boldsymbol{\pi}$$

b) $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_a^b \ln x dx = \int_a^b 1 \cdot \ln x dx \rightarrow \int_a^b 1 \cdot \ln x dx = [x \cdot \ln x]_a^b - \int_a^b x \frac{1}{x} dx \quad \text{(Restintegral)}$$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$$= [x \cdot \ln x - x]_a^b = \mathbf{[x(\ln x - 1)]_a^b}$$

11.6 Differenzialgleichungen

Die bisher bekannten Gleichungen enthalten Variablen in verschiedenen Potenzen wie x, y und z oder x^3, y^2 und z^2.

Sind die Variablen einer Gleichung Funktionen bzw. Ableitungen von Funktionen, spricht man von **Differenzialgleichungen.**

Es werden folgende Arten von Gleichungen unterschieden.

– **Bestimmungsgleichungen:** $3x^2 - 3x + 1 = x^2 - 4$; $e^{2x-4} = 4$; $\sqrt{4x+4} = x^2$
– **Funktionsgleichungen:** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; $f(x) = e^{0,5x-2}$
– **Differenzialgleichungen:** $f'(x) = 3f(x)$; $f''(x) + f'(x) + 2f(x) = 0$; $f''(x) = 2x^2 + f(x)^2$

Viele Probleme aus Wirtschaft, Naturwissenschaft und Technik führen bei ihrer mathematischen Formulierung auf solche Differenzialgleichungen. Da die Lösung dieser Gleichungen in den meisten Fällen schwierig ist, sollen Differenzialgleichungen hier nur auf dem Niveau einer Einführung behandelt werden.

Differenzialgleichungen, Abkürzung **DGL,** unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Ordnung und ihres **Grades.**
Die **Ordnung** wird durch den in der DGL vorkommenden *Differenzialquotienten* angegeben.
Den **Grad** der DGL gibt die höchste Potenz der Ableitung an.

● $f'(x) = 0,5x$
$f'(x) = a\,f(x)$ DGL 1. Ordnung u. 1. Grades

$2f(x) - f''(x) + y = 0$
$x^2 + f(x) = f''(x)$ DGL 2. Ordnung u. 1. Grades

$f(x)\,f''^2(x) - xf'(x) - f(x) = 0$ DGL 2. Ordnung u. 2. Grades

Um die Vielfalt der Differenzialgleichungen einzuschränken, werden im Folgenden nur **lineare homogene** Differenzialgleichungen höchstens zweiter Ordnung, das sind Differenzialgleichungen **ersten Grades,** behandelt.

Merke

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer Funktion vorkommen, heißt **Differenzialgleichung.** In einer Differenzialgleichung kann auch die Funktion f selbst oder eine Variable vorkommen.

Kann eine Differenzialgleichung in der Form $\mathbf{a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0}$ geschrieben werden, wird sie als **lineare homogene Differenzialgleichung erster Ordnung** bezeichnet.
Sie beschreibt einen Zusammenhang zwischen einer Funktion f und ihrer **ersten** Ableitung f′.

Kann eine Differenzialgleichung in der Form $\mathbf{a_2 f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0}$ geschrieben werden, wird sie als **lineare homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung** bezeichnet.
Sie beschreibt einen Zusammenhang zwischen einer Funktion f und ihrer **zweiten** Ableitung f″.

Anmerkung:
$f^{(n)}$ ist die n-te Ableitung von f bzw. Ableitung n-ter Ordnung von f.

11.6.1 Lösen von Differenzialgleichungen

► Beispiel:

Gegeben ist die Differenzialgleichung $\frac{1}{4}x - f'(x) = x$. Ermitteln Sie f(x).

▼ Lösung:

Die Lösung der Differenzialgleichung ist eine Funktion f(x).
Diese Funktion wird durch Beseitigung der Ableitungen ermittelt. Dies geschieht mithilfe der Integralrechnung, indem die Stammfunktion bestimmt wird.

$$\frac{1}{4}x - f'(x) = x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{4}x$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}\int x\,dx$$

$$\mathbf{f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + c}$$

Neben vielen Beispielen aus den Naturwissenschaften können auch Wachstumsprozesse mithilfe von DGLs beschrieben und analysiert werden.

► Beispiel:

Für das Volkseinkommen E(t) und die Staatsverschuldung S(t) besteht ein naheliegender Zusammenhang. Wächst das Volkseinkommen, kann der Staat mehr Schulden machen. Die Änderungsrate $S'(t)$ kann proportional zu E(t) sein: $\mathbf{S'(t) = k\,E(t).}$ Die Anfangsverschuldung sei S_0.
Das Einkommen E(t) kann auf verschiedene Art wachsen oder fallen.
1. Lineares Wachstum $E(t) = a + bt$ und
2. exponentielles Wachstum $E(t) = E_0e^{ct}$.

Ermitteln Sie in beiden Fällen die Staatsverschuldungsfunktion S(t) durch Lösen der obigen DGL.

▼ Lösung:

Zu 1.: Man setzt in die DGL für E(t) die lineare Wachstumsfunktion ein und löst das Integral.
Die Lösung der Differenzialgleichung ist die Schuldenfunktion S(t). Man erkennt, dass die Schulden stärker wachsen (t^2) als das Einkommen.

$$S'(t) = kE(t) = k(a + bt)$$

$$S(t) = \int(ka + kbt)dt = \mathbf{kat + k\frac{b}{2}t^2 + S_0}$$

Zu 2.: Man setzt in die DGL für E(t) die exponentielle Wachstumsfunktion ein und löst das Integral.
Die Lösung der Differenzialgleichung ist die Schuldenfunktion S(t). Man erkennt, dass Schulden und Einkommen gleich stark wachsen.

$$S'(t) = kE(t) = kE_0e^{ct}$$

$$S(t) = kE_0\int e^{ct}dt = \mathbf{\frac{k}{c}E_0e^{ct} + S_0}$$

Die bisher behandelten DGLs sind Differenzialgleichungen erster Ordnung. Als wichtiges Beispiel einer DGL zweiter Ordnung diene das folgende Beispiel.

► Beispiel:

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösungsfunktion der Differenzialgleichung zweiten Grades $f''(x) = 4f(x)$.

Abituraufgaben für grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Analysis

A1 Die Kostenfunktion zur Herstellung eines bestimmten Produktes wird von einem Betrieb mit $K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 10$ angegeben. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 8 ME. Laut Marktuntersuchung lässt sich das Produkt zu einem konstanten Marktpreis von 21 GE je Einheit absetzen.

a) Bestimmen Sie folgende kritischen Beschäftigungsgrade: Betriebsoptimum und Betriebsminimum, kurz- und langfristige Preisuntergrenzen, Gewinnmaximum, Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

b) Zeichnen Sie die Graphen von $E(x)$, $K(x)$, $K'(x)$, $k(x)$ und $k_v(x)$. (Wählen Sie geeignete Achseneinteilungen.)

c) Erläutern Sie den Einfluss einer Fixkostensenkung auf Nutzengrenze und Nutzenschwelle sowie den maximalen Gewinn, wenn alle anderen ökonomischen Größen unverändert bleiben.

A2 Ein Unternehmen stellt Tonkassetten her, die sich aufgrund einer Marktuntersuchung zu einem konstanten Preis von 4,5 GE absetzen lassen. Die Wertetafel verdeutlicht den Zusammenhang zwischen der Ausbringungmenge und den Grenzkosten.

x	1	2	3	4	(in Tsd. ME)
$K'(x)$	1,5	0	1,5	6	(in Tsd. GE)

a) Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion K, wenn Sie zugrunde legen, dass diese eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist und der Fixkostenanteil 6 Geldeinheiten beträgt.

b) Berechnen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den maximalen Gesamtgewinn und ermitteln Sie die Ausbringungsmenge, bei der Betriebsoptimum und Betriebsminimum vorliegt. Berechnen Sie die beiden Preisuntergrenzen.

c) Zeichnen Sie die Graphen von K, K′, E, k und k_v in ein Koordinatensystem ein.

d) Zeigen Sie allgemein, dass sich bei einer Kostenfunktion dritten Grades der Graph der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ den Graphen der zugehörigen variablen Stückkostenfunktion $k_v(x)$ im Betriebsminimum schneidet.

A3 Ein Unternehmen der Möbelbranche hat sich auf Polstergarnituren mit einem neuartigen Bezug spezialisiert. Die Kostenanalyse hat folgende Kostenfunktion ergeben:
$K(x) = 2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375$.

a) Zeigen Sie, dass K keine Extrema besitzt und geben Sie eine Erklärung ab, dass dies für eine Kostenfunktion typisch ist.

b) Eine Marktanalyse hat ergeben, dass der erzielbare Preis durch die Preisabsatzfunktion $p(x) = 4092 - 62x$ (x sei die Absatzmenge) berechnet werden kann. Ermitteln Sie die Erlösfunktion E und berechnen Sie das Maximum der Erlösfunktion. Geben Sie eine ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge an.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{10}^{40} K'(x)dx$ und beschreiben Sie das ermittelte Ergebnis aus geometrischer und ökonomischer Sicht.

d) Nach Angaben der Verkaufsabteilung ist bekannt, dass man sich in der Gewinnzone bei abgesetzter Menge von 5 ME bis 45 ME befindet. Außerdem weiß man, dass bei einer Verkaufsmenge von 30 ME der maximale Gewinn erzielt wird.
Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G und berechnen Sie den maximalen Gewinn ($G(x) = -2x^3 + 85x^2 + 300x - 3375$) sowie den Verkaufspreis.