MATHEMATIK 7

Österreichischer Lehrplan

Kompetent Aufsteigen …

- Zentralmatura
- Kompetenzorientiert
- Bildungsstandards

7. Klasse AHS

Günther Wagner / Helga Wagner

G&G

Symbolerklärung

1 Übungsaufgabe:
Die meisten Übungen kannst du im Buch erledigen, für einige Aufgaben ist es aber ratsam, wenn du dir ein Übungsheft anlegst.

In einem solchen Kästchen findest du **Musterbeispiele** zum jeweiligen Thema.

Wichtiger Merksatz! Guter Tipp! Merke dir das gut!

Dem Buch ist ein Lösungsheft zur Selbstkontrolle beigelegt.

www.ggverlag.at

ISBN 978-3-7074-2024-1

In der aktuell gültigen Rechtschreibung

1. Auflage 2016
Satz: Günther Wagner
Printed by Litotipografia Alcione, Lavis-Trento, über Agentur Dalvit, D-85521 Ottobrunn

Inhalt

5. Semester – Kompetenzmodul 5

Kegelschnitte

Parameterdarstellung ebener Kurven

6. Semester – Kompetenzmodul 6

Erweiterung der Differentialrechnung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Du hältst ein Übungsbuch in der Hand, das dir helfen soll, auf einfache Art und Weise in Mathematik aufzusteigen.

Wahrscheinlich bist du in Mathematik nicht so gut und musst daher zusätzlich zu deinen Schulaufgaben noch etwas tun. Vielleicht hat dir deine Lehrerin/dein Lehrer empfohlen, zu Hause zu lernen. Vielleicht fürchtest du sogar, heuer durchzufallen.

Mit „Aufsteigen in Mathematik 7" ist das Lernen ganz leicht!

Der wichtigste Stoff der 7. Klasse ist hier semesterweise zusammengefasst.
Jedes Kapitel wird von einem Theorieteil mit übersichtlichen Erklärungen und einfachen Merksätzen eingeleitet. Die anschließenden Übungen in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden helfen dir, den Lernstoff zu wiederholen, zu festigen und deine Noten zu verbessern.

Als Vorbereitung auf die standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung (Zentralmatura) werden am Ende jeden Kapitels Fragen und Übungen zur Grundkompetenz gestellt. Diese berücksichtigen vor allem das neue Prüfungsformat (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) und festigen die Grundkompetenz im Hinblick auf die zentrale Reifeprüfung in Mathematik.

Das beigelegte Lösungsheft ermöglicht eine einfache Selbstkontrolle.

Wir wünschen dir viel Erfolg beim Aufsteigen in Mathematik!

Helga Wagner Günther Wagner

Algebraische Gleichungen

Grundlegende Begriffe und Definitionen

Polynomfunktion n-ten Grades

Der Term $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt Polynom n-ten Grades in der Variablen x.

Beachte:

- Die Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ werden als **Koeffizienten** bezeichnet, a_0 ist das **absolute** Glied.
- n heißt **Grad des Polynoms**, wobei $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Ein Polynom vom Grad 0 heißt **konstantes Polynom**.
- Gilt $a_n = 1$, so spricht man von einem **normierten Polynom**.

Beispiele:

$p(x) = 3x^2 - x + 5$ Polynom zweiten Grades (quadratisches Polynom)
$p(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2x$ Polynom 4. Grades, mit $a_3 = 0$ und $a_0 = 0$
$p(x) = x^3 + 4x^2$ normiertes Polynom 3. Grades, $a_3 = 1$

Wenn man die Variable x mit einer Zahl belegt, so erhält man den entsprechenden Polynomwert.

Beispiel: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 1$
$x = 3:$ $p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 4 \cdot 3 - 1 = 50$ $p(3) = 50$
$x = 2:$ $p(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 4 \cdot 2 - 1 = 11$ $p(2) = 11$

Algebraische Gleichung n-ten Grades

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades entsteht, wenn man ein Polynom n-ten Grades null setzt, d. h. $p(x) = 0$.

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

Eine reelle Zahl x_i heißt **Nullstelle des Polynoms**, wenn $p(x_i) = 0$ ist.

Beachte: Jede Nullstelle von $p(x)$ ist also Lösung der Gleichung $p(x) = 0$ und umgekehrt.

Zeige, dass $x = 5$ Lösung der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ ist!

Setze $x = 5$ in die Gleichung ein!

$$5^3 - 2 \cdot 5^2 - 13 \cdot 5 - 10 = 0$$
$$125 - 2 \cdot 25 - 65 - 10 = 0$$
$$125 - 50 - 65 - 10 = 0 \qquad \text{w. A.}$$

$x = 5$ ist eine Lösung der Gleichung.

Abspalten von reellen Lösungen einer algebraischen Gleichung

Wenn x_1 eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ vom Grad $n \geq 1$ ist, dann lässt sich $p(x)$ durch $(x - x_1)$ ohne Rest dividieren. Es gilt $p(x) = (x - x_1) \cdot r(x)$, wobei das Restpolynom $r(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. $(x - x_1)$ wird als **Linearfaktor** (Wurzelfaktor) bezeichnet.

Allgemein gilt für normierte algebraische Gleichungen der Wurzelsatz von Vieta:

Wurzelsatz von VIETA

Jedes Polynom n-ten Grades (jede Gleichung n-ten Grades) lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren darstellen.

$$x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Zeige, dass die Gleichung $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$ die Lösung $x_1 = 2$ hat! Berechne auch die beiden anderen Lösungen!

$$p(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 30 = 0$$

Da $p(2) = 0$ gilt, ist 2 eine Nullstelle des Polynoms und daher Lösung der Gleichung.

Um die beiden anderen Lösungen zu berechnen, wird der Wurzelsatz von Vieta verwendet.

Es muss gelten:

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x-2) \cdot \underbrace{(x - x_2) \cdot (x - x_3)}_{r(x)},$$

$r(x)$ ... Restpolynom vom Grad 2 (quadratisches Polynom)

Führe eine Termdivision aus, um auf r(x) zu kommen.

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x-2) \cdot r(x) \qquad | : (x-2)$$

$$\begin{array}{l}
x^3 - 4x^2 - 11x + 30 : (x-2) = x^2 - 2x - 15 \\
\underline{\overset{+}{\underset{-}{}}x^3 \overset{-}{\underset{+}{}} 2x^2} \\
\quad -2x^2 - 11x \\
\quad \underline{\overset{-}{\underset{+}{}}2x^2 \overset{+}{\underset{-}{}} 4x} \\
\qquad -15x + 30 \\
\qquad \underline{\overset{-}{\underset{+}{}}15x \overset{+}{\underset{-}{}} 30} \\
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

(vergleiche Kompetent Aufsteigen in Mathematik, 4. Klasse)

$$r(x) = x^2 - 2x - 15$$

Löse die Gleichung $r(x) = 0$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Formel für die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$$

$$x_2 = -3, \quad x_3 = 5$$

Die 3 Lösungen der Gleichung sind $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 5$

$$L = \{-3; 2; 5\}$$

Von der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$ kennt man die Lösung $x = -1$. Berechne auch die beiden anderen Lösungen!

Um das Restpolynom zu finden, dividiere durch: $x - (-1) = x + 1$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) : (x+1) = x^2 - 6x + 9 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\quad -6x^2 + 3x \\
\quad \underline{-6x^2 - 6x} \\
\qquad +9x + 9 \\
\qquad \underline{+9x + 9} \\
\qquad\quad 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Beachte:
Statt des Vorzeichenwechsels und einer Addition kannst du direkt eine Subtraktion der Teilprodukte durchführen.

Löse die Gleichung $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$x = 3 \pm \sqrt{9-9}$$

$$x^{(2)} = 3$$

$$L = \{-1; 3^{(2)}\}$$

Man erhält eine Doppellösung (vergleiche Aufsteigen in Mathematik, 5. Klasse)

Löse die Gleichung $x^3 + x^2 - 2x = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ rechnerisch und graphisch!

$x^3 + x^2 - 2x = 0$ Herausheben von x

$x \cdot (x^2 + x - 2) = 0$ Anwenden des **Produkt-Null-Satzes:**

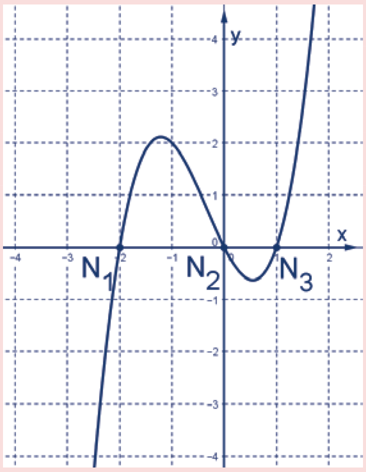
Ein Produkt ist dann null, wenn ein Faktor null ist.

$$(x = 0) \vee (x^2 + x - 2 = 0)$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-2)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$L = \{-2; 0; 1\}$$

Um die Gleichung graphisch zu lösen, zeichne die zugehörige Funktion $y = x^3 + x^2 - 2x$. Verwende dazu deinen graphikfähigen CAS-TR oder ein entsprechendes Computerprogramm!



Die x-Werte der Nullstellen entsprechen den Lösungen der Gleichung.

Zusammenfassung:

Um eine algebraische Gleichung höheren Grades zu lösen, kann man folgendermaßen vorgehen:

- Suche durch Probieren eine Lösung der Gleichung!
- Durch Abspalten dieser Lösung kann der Grad des Restpolynoms um 1 verringert werden.
- Setze das Verfahren fort, bis du zu einer quadratischen Gleichung kommst, die du nach der Formel lösen kannst!

Das Auffinden einer Lösung durch Probieren kann durch folgenden Satz erleichtert werden:

Teilersatz für das Auffinden von Lösungen einer normierten algebraischen Gleichung

Hat eine normierte algebraische Gleichung $(a_n = 1)$ lauter ganzzahlige Koeffizienten und gibt es überhaupt ganzzahlige Lösungen, so sind sie Teiler des absoluten Glieds.

Dieser Teilersatz folgt unmittelbar aus dem Wurzelsatz von Vieta.

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

Rechnet man die linke Seite aus, so erhält man als absolutes Glied:

$$a_0 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \quad (= \text{Produkt der Lösungen})$$

Das heißt umgekehrt, dass ganzzahlige Lösungen der Gleichung Elemente der Teilermenge des absoluten Glieds sein müssen. Da in der Teilermenge nur ganze Zahlen (laut Definition des Teilers) enthalten sind, lassen sich damit nur ganzzahlige Lösungen finden.

Man bestimmt also die Teilermenge des absoluten Glieds und probiert, welche Teiler Lösung der Gleichung sind.

Beachte nochmals: a_0 muss eine ganze Zahl sein, sonst kann man keine ganzzahligen Teiler finden.

Löse die Gleichung $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$!

Die Gleichung 4. Grades kann durch Abspalten von Linearfaktoren und schrittweises Reduzieren des Gleichungspolynoms gelöst werden.

Auffinden der Lösung durch Probieren (Anwenden des Teilersatzes):

$$T(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

Einsetzen der Teiler:

$x = 1$: $\quad 1^4 + 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 6 =$

$= 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0 \qquad x = 1$ ist Lösung der Gleichung

Anwenden des Wurzelsatzes

$$x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x - 1) \cdot \underbrace{(x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)}_{\substack{r_1(x) \\ \text{Restpolynom dritten Grades}}}$$

Aufsuchen des Restpolynoms

$$\left(x^4+x^3-7x^2-x+6\right):(x-1)=x^3+2x^2-5x-6$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4-x^3} \\
\quad 2x^3-7x^2 \\
\quad \underline{2x^3-2x^2} \\
\qquad -5x^2-x \\
\qquad \underline{-5x^2+5x} \\
\qquad\quad -6x+6 \\
\qquad\quad \underline{-6x+6} \\
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Lösen der Gleichung $r_1(x)=0$, d. h. $x^3+2x^2-5x-6=0$

Nochmaliges Anwenden des Teilersatzes

$T(6)=\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm6\}$

Durch Probieren erhält man $x_2=2$.

Aufsuchen des Restpolynoms

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x-2)=x^2+4x+3$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3-2x^2} \\
\quad 4x^2-5x \\
\quad \underline{4x^2-8x} \\
\qquad 3x-6 \\
\qquad \underline{3x-6} \\
\qquad\quad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Lösen der Gleichung $r_2(x)=0$, d. h. $x^2+4x+3=0$

$$x=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1$$

$$x_3=-3 \text{ bzw. } x_4=-1$$

Lösungsmenge der Gleichung $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$:

$L=\{-3; -1; 1; 2\}$

Beachte:

Algebraische Gleichungen kannst du auch **direkt** mit dem **Taschenrechner (CAS-TR)** oder mit Hilfe eines **Computerprogramms** lösen:

z. B.: Solve $\left(x^4+x^3-7x^2-x+6=0, x\right)$ $\qquad x=-3$ or $x=-1$ or $x=1$ or $x=2$

oder Löse$[x \wedge 4+x \wedge 3-7x \wedge 2-x+6=0]$ $\qquad \{-3; -1; 1; 2\}$

Löse die Gleichung $x^3-6x^2+10x=0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$!

$x^3-6x^2+10x=0$ $\qquad$ Herausheben von x

$x\cdot\left(x^2-6x+10\right)=0$

$(x=0)\vee\left(x^2-6x+10=0\right)$

$$x=3\pm\sqrt{9-10}=3\pm\sqrt{-1} \text{ nicht in } \mathbb{R} \text{ lösbar}$$

Die Gleichung hat nur eine reelle Lösung: $x=0$

Lösung mit Hilfe des CAS-TR oder Computerprogramms:

z. B.: Solve $\left(x^3-6x^2+10x=0,\ x\right)$ $\quad x=0$

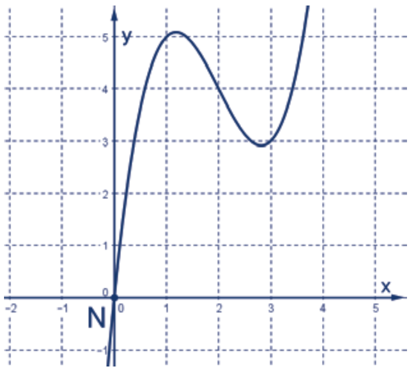
oder Löse $\left[x\wedge 3-6x\wedge 2+10x=0\right]$ $\quad x=0$

Beachte:

Mit Hilfe des Befehls „Solve“ bzw. „Löse“ erhält man die reelle(n) Lösung(en) der Gleichung.

Anmerkung:

Wenn man die Gleichung **graphisch** löst, dann erhält man einen Schnittpunkt mit der x-Achse, die x-Koordinate ist die **reelle Lösung** der Gleichung.



Löse die Gleichung $x^3-6x^2+9x=0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ rechnerisch und graphisch!

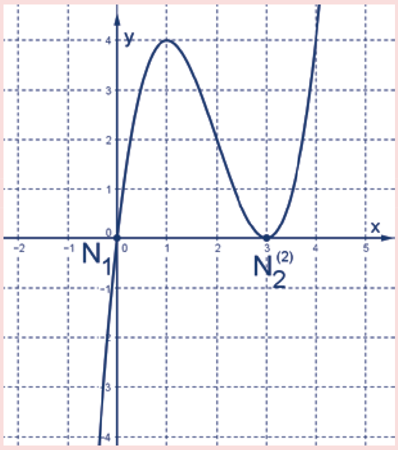
rechnerisch:

$$x^3-6x^2+9x=0$$
$$x\cdot\left(x^2-6x+9\right)=0$$
$$(x=0)\vee\left(x^2-6x+9=0\right)$$
$$x=3\pm\sqrt{9-9}=3^{(2)}$$

Doppellösung

$$L=\left\{0;\ 3^{(2)}\right\}$$

graphisch: zugehörige Funktion $y=x^3-6x^2+9x$



$N_1(0/0);\ N_2^{(2)}(3/0)$

Man erkennt einen

Zusammenhang Doppellösung und Nullstelle

Hat eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten eine Doppellösung, dann hat der zugehörige Funktionsgraph eine doppelte Nullstelle. Der Funktionsgraph berührt die x-Achse.

Lösung mit Hilfe des CAS-TR oder Computerprogramms:

z. B.: Solve $x^3-6x^2+9x=0$ $\quad x=0$ or $x=3$

oder Löse $\left[x\wedge 3-6x\wedge 2+9x=0\right]$ $\quad L=\{0;\ 3\}$

Anmerkung:

Da jede Lösung in ihrer Vielfachheit gezählt wird, hat auch diese Gleichung dritten Grades 3 Lösungen.

Die obigen Beispiele zeigen die Gültigkeit des folgenden Satzes:

Lösbarkeit algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten von ungeradem Grad
Eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten, die von ungeradem Grad ist, hat mindestens eine reelle Lösung.

Besondere Gleichungen höheren Grades

Biquadratische Gleichungen

Jede Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heißt biquadratische Gleichung.

Löse die Gleichung $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$!
Zeichne auch den Graphen der zugehörigen Funktion!
Was kann man über den Graphen aussagen?

$u = x^2$ — Ersetze (Substituiere) x^2 durch u. Durch diese Substitution ergibt sich eine quadratische Gleichung in u.

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

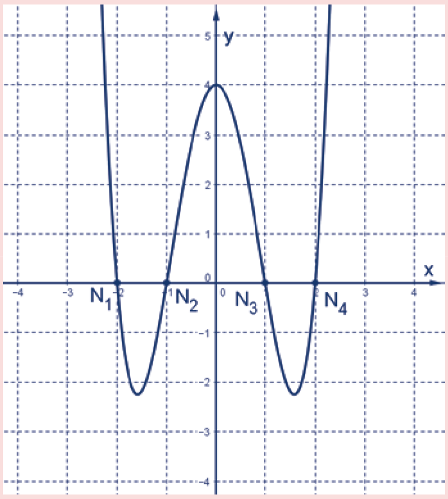
$$u = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$u_1 = 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

$$\text{und } u_2 = 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2,\ x_4 = 2$$

$$L = \{-2; -1; 1; 2\}$$

Graph der Funktion $y = x^4 - 5x^2 + 4$



Der Graph der zu einer biquadratischen Gleichung zugehörigen Funktion liegt **symmetrisch zur y-Achse**.

Symmetrische (Reziproke) Gleichungen

> Eine Gleichung, bei der die Koeffizienten symmetrisch angeordnet sind, wird als symmetrische Gleichung bezeichnet.

Beispiele:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

Setzt man in der ersten Gleichung für $x = -1$, so ergibt sich $-a + b - b + a = 0$ w. A., d. h. -1 ist Lösung der Gleichung.

Setzt man in der zweiten Gleichung für $x = 1$, so ergibt sich $a + b - b - a = 0$ w. A., d. h. 1 ist Lösung der Gleichung.

Bei jeder symmetrischen Gleichung gilt, dass auch der Kehrwert (reziproke Wert) einer Lösung ebenfalls Lösung ist.

Löse die Gleichung $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$!
Setzt man für $x = 1$, so ergibt sich $1 - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - 1 = 0$ w. A.,
d. h. $x = 1$ ist Lösung der Gleichung.

$$\left(x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1\right) : (x-1) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \qquad \text{Polynomdivision}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - \quad x^2} \\
\quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x \\
\quad \underline{-\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x} \\
\qquad\qquad \frac{2}{2}x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{\quad x - 1} \\
\qquad\qquad\quad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Lösen der Gleichung $r(x) = 0$, d. h. $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

Lösung der Gleichung $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$

$$L = \left\{\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$$

Kompetent AUFSTEIGEN 7

enthält den wesentlichen Lernstoff des **österreichischen Lehrplans** für die **7. Klasse AHS (Kompetenzmodul 5, Kompetenzmodul 6)**, der zum Aufsteigen unbedingt nötig ist.
Sie können Ihr Wissen über den Lehrstoff kontrollieren, indem Sie es an zahlreichen Beispielen anwenden.

Kompetent AUFSTEIGEN 7

dient als Vorbereitung auf die **standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung** (Zentralmatura). Am Ende jeden Kapitels werden Fragen und Übungen zur Grundkompetenz (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) gestellt.

Der Band enthält:

- ✓ genau erklärte Rechengänge
- ✓ übersichtlich mehrfärbig gestaltete Kapitel mit hervorgehobenen Musterbeispielen
- ✓ zahlreiche Übungsbeispiele, einfach selbst zu überprüfen mit dem beigelegten Lösungsheft
- ✓ Fragen und Übungen zur Vorbereitung auf die Zentralmatura

✓ Mit jedem Schulbuch verwendbar!

ISBN 978-3-7074-2024-1
€ 18.-

Infos und Musterseiten zu allen erschienenen Titeln unter www.ggverlag.at