

BERNARD BOLZANO - GESAMTAUSGABE
HERAUSGEGEBEN VON EDUARD WINTER †, JAN BERG,
FRIEDRICH KAMBARTEL, JAROMÍR LOUŽIL, BOB VAN ROOTSELAAR

REIHE II
NACHLASS

B. WISSENSCHAFTLICHE TAGEBÜCHER

BAND 3
ZWEITER TEIL
MISCELLANEA MATHEMATICA

MISCELLANEA MATHEMATICA

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA 4

HERAUSGEGEBEN

VON

BOB VAN ROOTSELAAR

UND

ANNA VAN DER LUGT

FRIEDRICH FROMMANN VERLAG · GÜNTHER HOLZBOOG

STUTTGART - BAD CANNSTATT 1989

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bolzano, Bernard:

Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe / hrsg. von Eduard Winter ...
– Stuttgart-Bad Cannstatt : frommann-holzboog.

Reihe 2, Nachlaß.

B, Wissenschaftliche Tagebücher.

~~ISBN 3-7728-0441-1~~

NE: Winter, Eduard [Hrsg.]; Bolzano, Bernard: [Sammlung]

Bd. 3.

Teil 2. Miscellanea mathematica. –

4. Hrsg. von Bob van Rootselaar u. Anna van der Lugt. – 1989

ISBN 3-7728-0474-8

NE: Rootselaar, Bob van [Hrsg.]

© FRIEDRICH FROMMANN VERLAG · GÜNTHER HOLZBOOG

STUTTGART – BAD CANNSTATT 1989

SATZGESTALTUNG UND DRUCK: OFFIZIN CHR. SCHEUFELE STUTTGART

EINBAND: ERNST RIETHMÜLLER & CO GMBH STUTTGART

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	7
Editionsbericht	9
Einleitung	11
Miscellanea Mathematica, Heft 4: MM 309–388	33
Bibliographie	157
Bolzano's Sachregister MM 309–388 nach Repertorium für Mathematik . .	166
Personenregister	167
Sachregister	170

VORWORT

Dieser Band enthält eine Transkription von Heft 4, MM 309-388 der mathematischen Tagebücher Bolzanos, der *Miscellanea Mathematica*. Die Veröffentlichung erfolgt gemäß der pauschalen Genehmigung der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien vom 2. Januar 1967. In der Bernard Bolzano-Gesamtausgabe (BGA) wird dieser Band mit II B 3/2 bezeichnet.

Die Ausgabe ist mit gewissen Ausnahmen, die im Editionsbericht beschrieben werden, den Editionsprinzipien in BGA Band E 2/1, S. 8–15 gemäß hergestellt.

Wir danken Dr. S. J. Suys-Reitsma, die uns wiederum in freundschaftlichster Weise unterstützt hat bei der Bearbeitung der lateinischen und griechischen Textteile.

Bei der Vorbereitung dieses Bands haben wir wiederum ausgezeichnete Hilfe von den Bibliotheken der Bundesrepublik Deutschland, der ÖNB Wien und den holländischen Bibliotheken erhalten.

Die Herausgeber

B. VAN ROOTSELAAR

A. VAN DER LUGT

EDITIONSBERICHT

Das Manuskript ist den Editionsprinzipien der Bolzano-Gesamtausgabe Band E 2/1 gemäß wiedergegeben. Daraus ergibt sich eine gewisse Korrespondenz zwischen Manuskript und gedrucktem Text, die hier zur klaren Übersicht kurz zusammengefaßt und erläutert wird.

Der laufende deutsche Text im Druck ist im Manuskript von Bolzano in deutscher Schrift niedergeschrieben. Fremdsprachige Teile, Formeln und vereinzelte Buchstaben (besonders zu den Figuren) im Druck korrespondieren im Manuskript mit in lateinischen Buchstaben geschriebenen Textteilen, Formeln und Buchstaben. Einzelne Buchstaben in deutscher Schrift im Manuskript sind im Druck Fraktur gesetzt.

Die im Manuskript unterstrichenen Wörter und Sätze sind im Druck kursiv gesetzt. Für Kursivdruck innerhalb der Interpolationsklammern sei auf die Editionsprinzipien verwiesen.

Absätze im Druck entsprechen Absätze des Manuskripts.

Die am Rande des Manuskripts auftretenden Vertikallinien, geschwungenen Klammern, quer geschriebenen Wörter, u. dgl. sind in Fußnoten erläutert worden. Die Figuren sind neu gezeichnet. An mehreren Stellen hat Bolzano kritische Bemerkungen – bisweilen als Nachträge – zu eigenem oder fremdem Text in Klammern, versehen mit hochgestellten Zeichen, wie z.B. $^{\circ}[\]^{\circ}$, hinzugefügt. Diese Merkmale sind im Druck im allgemeinen unverändert wiedergegeben, nur in einzelnen Fällen haben wir ein anderes Zeichen wählen müssen.

Die in den Formeln vorkommenden mathematischen Funktionszeichen s , S_n , $\sin$, bzw. c , C , $\cos$ sind einheitlich durch $\sin$ bzw. $\cos$ ersetzt worden.

Ähnliches trifft auf die Wiedergabe der Zeichen für die Differentiale zu, insbesondere auf MM 321, wo Bolzano in ganz willkürlicher Weise das $\succ d$ und das $\succ$ runde d durcheinander verwendet. Wir haben das im Druck durchgängig mit $\succ d$ wiedergegeben, damit kein Mißverständnis entsteht.

Exzerpte aus Büchern und Abhandlungen in Zeitschriften sind wie üblich in dieser Reihe als Paraphrasierungen betrachtet und nicht als Zitate, obgleich sie bisweilen einem Zitat sehr nahe kommen.

Die Zusammenfassungen und Paraphrasierungen sind geprüft worden und in Fußnoten verzeichnet. Wo Bolzanos Zusammenfassungen zu Unklarheiten Anlaß geben könnten oder wenn sich dabei störende Fehler eingeschlichen haben, ist das ebenfalls in Fußnoten vermerkt worden. Bei der Bearbeitung hat sich herausgestellt, daß es sich empfiehlt, den Text durchaus als Bolzanos eigenen Text zu betrachten.

In diesem Heft wird eine Fülle von Büchern und Schriftstellern erwähnt, welche Bolzano mit der Absicht zusammengebracht hat, sie später näher zu studieren. Mehrere der genannten Werke sind in der Privatbibliothek Bolzanos erhalten, wie z. B. die *Opuscula posthuma* des Descartes, *Das Gesetz des Gleichgewichts* von Hoffmann, die *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* von Kästner, *De inquirenda veritate* (1691) von Malebranche, die *Anfangsgründe* von Pasquich und *Petri Rami Scholarum mathematicarum* (1599).

Diese Information ist aber nur von sehr beschränkter Bedeutung, weil man im allgemeinen nicht versichern kann, daß zur Zeit der Aufzeichnungen in den MM das bezügliche Werk schon in seinem Besitz war. Eine Ausnahme scheint das Werk von Ramus zu sein. Die Art der Aufzeichnungen läßt vermuten, daß Bolzano in diesem Falle sein eigenes Exemplar verwendet hat.

EINLEITUNG

Dieser Band, in der Gesamtausgabe mit BGA 2 B 3/2 bezeichnet, enthält die Transkription des vierten Heftes der *Miscellanea Mathematica* (MM 309–388). Das Heft enthält vier Daten. Erstens 4. Nov. 1813 auf MM 315, dann 16. Jan. 1814 auf MM 341, ferner 7. Febr. 1814 auf MM 343 und schließlich 4. März 1814 auf MM 345. Das erste Datum schließt eng an das letzte des dritten Heftes an. Vergleichen wir den 22. Okt. 1813 auf MM 306 des dritten Heftes mit dem 4. Nov. 1813 auf MM 315, so können wir sagen, daß die Aufzeichnungen des vierten Heftes, anfangend mit MM 309, ab etwa Ende Oktober 1813 zu datieren sind.

Es läßt sich aber nicht so genau feststellen, wann das Heft abgeschlossen wurde. Das nächste Datum 14. September 1814 befindet sich auf der ersten Seite, MM 835 des zehnten Heftes. Die 490 Seiten MM 345 bis MM 835, sind also im Zwischenraum von 4. 3. 1814 bis 14. 9. 1814 geschrieben. Die zwischenliegenden Hefte 5 bis 9 enthalten zu einem beträchtlichen Teil kommentierte Auszüge aus vielen mathematischen Lehrbüchern und Abhandlungen mehrerer Autoren aus den Jahren 1718 bis 1814. Wenn man sich diese nicht allzu schwierige Arbeit als beständig fortlaufend vorstellt, so kommt man durch lineare Interpolation auf gut 17 Tage für die 43 Seiten von MM 345 bis MM 388, also auf Ende Mai 1814 für die Abschließung des vierten Heftes.

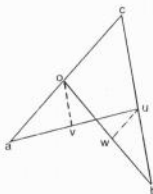
Es sollte aber klar sein, daß man dieser Schätzung keine große Bedeutung beimessen kann, weil uns dazu die Umstände unter denen Bolzano arbeitete, ungenügend bekannt sind.

Wie in den vorhergehenden Heften können die Aufzeichnungen in einige thematische Reihen angeordnet werden, welche teilweise Fortsetzungen sind der entsprechenden Reihen der Hefte 1 bis 3.

Wir unterscheiden jetzt folgende Hauptthemen: Elementargeometrie, allgemeine Geometrie (einschließlich Grundlagen), höhere Geometrie, allgemeine Mathematik, Mechanik, Raumlehre.

Abgesehen von einigen vereinfachten Beweisen einzelner Sätze und Beweisversuchen innerhalb seines eigenen Systems der Geometrie, sind die elementargeometrischen Eintragungen ganz einem kommentierten Auszug aus *Rami Scholarum Mathematicarum* gewidmet (MM 346–374).

Wir betrachten zuerst die vereinzelt Sätze.



Zur Aufnahme in sein (geplantes) System der Geometrie notiert Bolzano MM 331 den Satz: Wenn man Punkte o und u in den Linien ac und bc so wählt, daß $ao:co = r:m$ und $bu:cu = r:n$, so hat man $ax:xu = (r+n):m$ und $bx:xo = (m+r):n$, wo x der Schnittpunkt von au und bo ist.

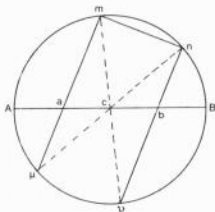
Bolzano behauptet, den einfachsten Beweis gefunden zu haben, indem er zur Berechnung von $ax:xu$ die Linie $ov \parallel bc$ zieht. Das führt ihn aber zu einer unnötig komplizierten Berechnung. Verwendet man zur Berechnung von $ax:xu$ die Linie $uw \parallel ac$, so hat man einfach

$$\begin{aligned} ax:xu &= ao:uw = (ao:co) \cdot (co:uw) = (ao:co) \cdot (bc:bu) = \\ &= (r:m) \cdot ((n+r):r) = (n+r):m. \end{aligned}$$

In gleicher Weise führt die Wahl $ov \parallel bc$ zu $bx:xo = (m+r):n$.

Der von Bolzano MM 331 geführte Beweis ist komplizierter.

MM 344 gibt Bolzano einen neuen Beweis des letzten Lehrsatzes aus Euklids Data, d. h. des Satzes: Wenn aus einem beliebigen Punkt a des Durchmessers AB eines Kreises eine beliebige Linie am zum Umfang gezogen wird und noch mn senkrecht auf am, so trifft die zu am parallele Linie durch n in den Punkt b des AB ein, derart daß $ac = bc$ und $am \cdot bn$ konstant ist (vgl. die nachstehende Figur).



Euklid verfährt folgendermaßen. Wenn man nb zu nv verlängert, so ist mv Durchmesser und der Schnittpunkt c mit AB Mittelpunkt des Kreises. Aus der Kongruenz von $\triangle acm$ mit $\triangle bcv$ ergibt sich dann $ac = bc$ und $am = bv$, also $am \cdot bn = bv \cdot bn = Ab \cdot bB$ nach dem Sehnensatz (Elem. III, Prop. 35). Bolzano verlängert überdies ma zu mμ. Dann ist auch nμ Durchmesser, und

$mn \vee \mu$ ein Rechteck. Daraus folgert er $ac = bc$ und $ap = bn$, also $am \cdot bn = am \cdot ap = aA \cdot aB (= Ab \cdot bB)$, ebenfalls nach dem Sehnensatz. Der Bolzanosche Beweis ist nur scheinbar kürzer, denn im wesentlichen benutzt er die Kongruenz von Δben mit Δacp . Der Euklidische Beweis ist also dem Bolzanoschen vorzuziehen.

Eine Frage mit der Bolzano sich schon lange beschäftigt hatte, war die nach der eindeutigen Existenz eines Lots auf eine Ebene. Diese Frage wird MM 337 aufs neue erörtert, wo es heißt: Versuch den Lehrsatz zu beweisen, daß es nur 1 Perpendikel auf eine Ebene gebe.

Über die Eindeutigkeit des Lots findet man schon MM 41 (etwa 1805) den Lehrsatz: Aus einem und demselben Punkt o gibt es nur ein Loth auf dieselbe Ebene bac . In einer Anmerkung zu diesem Lehrsatz behauptet er, daß aus der Möglichkeit eines Punktes außerhalb der Ebene die Möglichkeit eines Lots auf alle Linien der Ebene leicht beweisbar sei. Die Eindeutigkeit des Lots aus einem Punkt einer Ebene wird MM 42 bewiesen, doch betrachtet er den Beweis als übereilt. Daß er den Beweis nicht anerkannt hat, zeigt sich MM 109 (etwa 1808), wo er bemerkt: In der Lehre von der Ebene mangelt mir noch der Satz, daß es aus 1 Punct der Ebene nur 1 Perpendikel gebe. Es folgt dann ein Beweisversuch, der aber aufgegeben wird.

Der Satz wird wiederum MM 215 (etwa 1812) erwähnt, und nochmals MM 218 unter Verweis auf Euklid Elem. XI, Prop. 12.

Der Versuch MM 337, der hier betrachtet wird, zieht den Begriff des Epipedons an. Dieser Begriff wird jetzt folgendermaßen gefaßt: Ein Epipedon ist der Inbegriff aller Punkte, die in einer aus einem Punkt a auf ab senkrechten Richtung liegen. Bolzano bemerkt, daß er diesen Begriff schon früher benutzt hat. Tatsächlich wird der Begriff MM 249 (vermutlich 1813) erörtert und dort folgendermaßen erklärt: Epipedon zwischen o und ω heiße dasjenige Ding, dessen sämtliche Punkte ein gleiches Verhältnis zu 2 gegebenen haben.

Unter Verwendung des aetiologischen Satzes: Wenn die bestimmenden Stücke eines Dings ein gleiches Verhältnis zu zwei Dingen haben, so hat das bestimmte Ding ebenfalls ein gleiches Verhältnis zu den zwei Dingen, folgert Bolzano aus der letztgenannten Definition MM 249, daß 1. wenn m im Epipedon $E(a,b)$ zwischen a und b , so ist $am = bm$, 2. wenn $m \in E(a,b)$ und $n \in E(a,b)$, so gilt $mn \in E(a,b)$ und 3. wenn, $m, n, p \in E(a,b)$, so ist die Ebene durch m, n, p in $E(a,b)$ enthalten.

Das Epipedon hat Bolzano eingeführt, um die Schwierigkeiten mit dem Begriff der Ebene, d. h. des räumlichen Dings, dessen sämtliche Punkte durch ihre Verhältnisse zu 3 gegebenen bestimmt sind, zu umgehen. Die Schwierigkeiten beim Satz vom Perpendikel wären dann nach Bolzano gelöst, wenn es sich umge-

kehrt dartun ließe, daß das Epipedon in der Ebene enthalten ist. Das gelingt aber MM 249 nicht.

Obgleich die Definitionen MM 249 und MM 337 dem Wortlaut nach verschieden sind, betrachtet Bolzano sie offenbar als gleichwertig. Er entwickelt MM 337 einige Sätze über Epipeda, aber der Versuch wird bald aufgegeben. Also bleibt der mangelnde Satz bis jetzt ohne Beweis.

Die Seiten MM 346 bis MM 374 enthalten einen mit Kommentaren versehenen Auszug aus *Scholarum Mathematicarum* von Ramus.

Mitunter gibt die Lektüre Bolzano Anlaß zu längeren Versuchen, bestimmte Begriffe über den Rahmen der Elementargeometrie hinaus zu verallgemeinern und besser zu fassen.

Anläßlich Euklid Elem. I, Def. 13 untersucht er z. B. den Begriff der Grenze eines Dings. Die Frage nach der richtigen Erklärung wird zurückgeführt auf die Erklärung eines einfachen Grenzteils, indem er die Grenze als den Inbegriff der einfachen Grenzteile (MM 348) erklärt. Er kommt dann zum folgenden Ergebnis (MM 348): »Grenzpuncte scheinen hier diejenigen zu sein, welche die Eigenschaft haben, daß wenn man aus ihnen zu 2 oder mehreren anderen Puncten Linien (oder Flächen) ziehen kann, die einen Winkel (oder Ecke) bilden, innerhalb deren auf der hohlen Seite alle übrigen Puncte liegen; oder wenigstens keine außerhalb«. Diese Erklärung wird entwickelt durch Betrachtung von ganz besonderen Punktmengen und ist unbefriedigend, denn erstens sollte es wohl Geraden statt Linien und Ebenen statt Flächen heißen und zweitens wäre an der Verwendung der Begriffe »innerhalb« und »außerhalb« auch wohl einiges auszusetzen.

Im Kommentar (MM 349) zu den Euklidischen Definitionen 15 und 16 des Mittelpunkts eines Kreises, greift er zurück auf seine frühere Erklärung des Mittelpunkts eines beliebigen Punktsystems (MM 4). Jetzt erklärt er den Mittelpunkt so: »es ist derjenige Punct der aus allen bestimmt wird, und zwar nach einerlei Regel, man mag die Puncte, in welcher Ordnung man will auf einander folgen lassen«. Diese Erklärung betrachtet Bolzano als hinreichend, um z. B. zu beweisen, daß der Mittelpunkt nach Euklid auch ein Mittelpunkt in diesem Sinne ist. Er stellt es so vor, als ob eine vollständige Theorie des Mittelpunkts vorliege. Das ist aber nicht der Fall, und die Aufzeichnungen MM 4, 25–28, 31–33, 85, 87 zeigen das Gegenteil. Insbesondere MM 31 gibt er ein Beispiel davon, daß mehrere Punkte dieser Forderung genügen können, denn der Schwerpunkt eines Dreiecks und der Mittelpunkt des Umkreises werden aus allen 3 Punkten auf einerlei Art bestimmt, und sind im allgemeinen doch verschieden. Das dürfte klar sein, weil sie nach verschiedenen Gesetzen bestimmt

werden. Es ist deutlich, daß der Bolzanosche Begriff des Mittelpunkts aufs engste zusammenhängt mit dem des Schwerpunkts. Jedenfalls versucht er diesen durch ähnliche Bedingungen zu erklären, und zwar durch solche, die auch auf den Begriff des Mittelpunkts zutreffen könnten.

MM 31 wird eine derartige Erklärung versucht: »Der Schwerpunct ist ein Punct, der aus mehreren gegebenen Puncten bestimmt werden kann; wobei 1: die Anzahl und Lage der Puncte welche immer, 2: das Gesetz immer einerley, 3: der Schwerpunct von n Puncten kann als ein Ort betrachtet werden, wo n Puncte zugleich sind, 4: Es soll gleichgültig sein in welcher Ordnung man die gegebenen Puncte zur Bestimmung des Schwerpuncts anwendet«.

Die dritte Bedingung erklärt sich aus dem mechanischen Gedanken hinter dem Begriffe des Schwerpunkts, ist aber völlig belanglos, und sogar im Widerspruch mit den aus seiner Metaphysik folgenden Bedingungen für die (reine) Geometrie. Aber auch wenn man die Bedingung gelten läßt, könnte man obiges eben so gut als Erklärung des Mittelpunkts ansehen.

Und dann erhebt sich unmittelbar die Frage, die Bolzano MM 31, Z. 29 als Aufgabe formuliert: »Nun muß bewiesen werden, daß es nur *ein* solches Gesetz gebe, folglich in jedem Systeme nur 1 Schwerpunct«.

Nicht zu wundern, daß ihm das nicht gelungen ist, und ihm auch nicht gelingen wird. Damit fällt die Erklärung des Mittelpunkts, sowie die des Schwerpunkts, fort.

Interessant ist der Satz Euklid, Elem. III, Prop. 11: Wenn zwei Kreise sich innerlich berühren, so geht die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte durch den Berührungspunkt. Der Euklidische Beweis ist indirekt und soll nach Bolzano durch einen direkten ersetzt werden. Offenbar sieht Bolzano den Satz als einen »bejahenden Satz«, denn er meinte, daß »bejahende Sätze« immer direkt bewiesen werden können, während nur »verneinende Sätze« eines indirekten Beweises wesentlich bedürfen (Vgl. Bolzano *Beyträge* II, § 33). Um das Ziel zu erreichen, wird dieser Satz zuerst in folgenden verwandelt: Wenn ein Kreis ganz innerhalb eines andern liegt, und die Gerade, die ihre beiden Mittelpunkte verbindet, ihre Peripherien nicht in einem Punkte durchschneidet, so haben diese Peripherien gar keinen Punkt miteinander gemein.

Es ist aber, sogar nach Bolzanos eigenen Maßstäben, unerlaubt, diesen Satz als eine (gleichwertige) bejahende Formulierung der Prop. 11 anzusehen. Denn aus der Bolzanoschen Formulierung geht hervor, daß die Verneinung in den Satz hinein gebracht ist. Das gilt zuerst für die Konklusion, denn die Aussage, daß die Peripherien keinen Punkt gemein haben, ist nach Bolzano bestimmt als Verneinung der bejahenden Behauptung »Die Peripherien haben einen Punkt

gemein« zu betrachten (Vgl. z. B. Bolzano *Beyträge* II, § 19, wo die Ungleichheit zweier Zahlen als negativer Begriff betrachtet wird). Aber auch in die Prämisse geht ein negativer Begriff ein: die Verbindungslinie der Mittelpunkte durchschneidet ihre Peripherien nicht in einem Punkte. Auch wenn man »nicht in einem Punkte« ersetzt durch »in verschiedenen Punkten«, so ist die Rede von verschiedenen Punkten, d. h. von ungleichen Punkten.

Um die von Bolzano offensichtlich angenommene Gleichwertigkeit seiner Formulierung mit der Euklidischen zu verstehen, könnte man den Bolzanoschen Satz auch so formulieren: Eine Figur eines Kreises innerhalb eines anderen, in der die Verbindungslinie der Mittelpunkte die Peripherien nicht in einem Punkte durchschneidet, ist eine Figur eines Kreises innerhalb eines anderen, deren beide Peripherien keinen Punkt gemein haben, d. h. der Satz ist von der Form: »was nicht M ist, ist auch nicht N« (Vgl. Bolzano *Beyträge* II, § 33).

Diesen Satz betrachtet Bolzano als gleichbedeutend mit dem Satz »Was N ist, ist auch M« und als keine Folgerung nach irgendeiner Schlußart (Bolzano *Beyträge* II, § 32). Man vergleiche dazu auch MM 346: »Es ist ein Fehler gegen die Methode, wenn Sätze, die nur in Worten unterschieden sind, als verschiedene aufgestellt und bewiesen werden. Von dieser Art sind Sätze von der Form »Alle A sind B« und »Alle nicht B sind nicht A«. Denn man muß nicht glauben daß der letztere eine Folge aus dem ersteren sei, es müßte ebenso gut dieser eine Folge von jenem seyn«.

Wenn wir das einmal zugeben, so können wir sagen, daß der Bolzanosche Beweis ergibt: Eine Figur eines Kreises innerhalb eines anderen, deren Peripherien (wenigstens) einen Punkt gemein haben, ist eine Figur eines Kreises innerhalb eines anderen, in der die Verbindungslinie der Mittelpunkte die Peripherien in einem Punkte durchschneidet. Mit diesem Satz haben wir aber noch nicht den Euklidischen Satz, der überdies besagt, daß der gemeinsame Schnittpunkt auch Berührungspunkt ist. Dieser Berührungspunkt ist nach Prop. 13 (ebenfalls indirekt bewiesen) eindeutig bestimmt. Es fehlt also bei Bolzano noch der Nachweis, daß solche Kreise nicht zwei Punkte gemeinsam haben können. Diese Behauptung ist auch in Prop. 13 enthalten, die Bolzano ebenfalls meint, direkt beweisen zu können. Der Beweis wird aber nicht durchgeführt.

Auch mit dem Euklidischen Beweis der Prop. 10, Elem. III, ist Bolzano offensichtlich nicht zufrieden, weil er bemerkt, daß der Beweis ganz richtig so wie er es angibt geführt werden soll. Der Bolzanosche Beweis vermeidet den Gebrauch der Propositionen 32 und 37 des dritten Buchs und arbeitet nur mit Parallelen und kongruenten Dreiecken (man beachte, daß MM 360, Z. 27, sich ein Schreibfehler eingeschlichen hat. Statt $\Delta cae = \Delta bda$ soll es heißen $\Delta cae = \Delta bdc$). Der

Beweis ist sicher verdienstvoll, enthält aber doch noch einen Schönheitsfehler, weil ac und bc explizit in ab ausgedrückt werden, was nicht nötig ist.

Denn, weil $ce:bd = ac:ab$ und $bd = ac$, so hat man $ce:ac = ac:ab$. Andererseits ist $bc:ac = ac:ab$, also $bc = ce$.

Obgleich nicht von großer Wichtigkeit, darf man doch nicht die Bemerkung MM 374 zu Elem. XI, Prop. 2 übergehen, wo Bolzano den Einwand des Ramus benützt, um den Gebrauch der 4. Proportionallinie in seiner Theorie der geraden Linie in *Betrachtungen* § 39–§ 42, aus dem Jahre 1804, zu rechtfertigen. Dort wird die Eindeutigkeit § 42 behauptet. Die Existenz wird § 39 ganz kurz (indirekt) so bewiesen: »Widrigenfalls müßten wir eine besondere Vorstellung a priori von der bestimmten Entfernung ab haben, gemäß welcher etwas von ihr gälte, das von der $\alpha\beta$ nicht gilt«. Man kann hier vermuten, was Bolzano vorgeschwebt hat: ab hat eine Strecke cd in gewisser Proportion zu ab , $\alpha\beta$ ist der ab ähnlich, d. h. ab zeichnet sich nicht durch eine gewisse Vorstellung a priori über $\alpha\beta$ aus, also hat $\alpha\beta$ auch eine Strecke ($\gamma\delta$) in derselben Proportion. Diesen Gedanken findet man etwas ausführlicher in § 3 derselben Arbeit dargestellt: »Wir haben von keinem bestimmten räumlichen Dinge eine Vorstellung a priori. Daher müssen mehrere ganz gleiche räumliche Dinge möglich seyn, von denen allen gleiche Prädicate gelten«. Der erste Satz gilt dabei als Grundsatz.

Allgemeine Geometrie.

Bei den allgemeingeometrischen Aufzeichnungen handelt es sich vor allem um die Erklärung der wichtigsten geometrischen Begriffe, wie der von Linie, kontinuierlicher Linie, Fläche, Grenzpunkt u. s. w. sowie um die Herleitung einiger ihrer Eigenschaften. Ohne diese Begriffe kann Bolzano sein geplantes Lehrbuch der Geometrie (als Teil der Größenlehre) nicht verfassen.

Das Heft fängt MM 309 mit einem Versuch an, den Begriff des Grenzpunkts einer Linie zu definieren. Es ist klar, daß dazu mindestens eine Erklärung der Linie vorangehen muß.

Ausgangspunkt ist dabei die herkömmliche Erklärung der Linie als eines Systems von Punkten, deren jeder keinen nächsten, für jede kleine Entfernung aber nur eine endliche Menge von Nachbarn hat. Vgl. MM 4, 186, 229, 239.

Zu dieser Erklärung wird aber schon MM 193 bemerkt, daß sie nicht ganz richtig ist, weil ein derartiges System nicht zusammenhängend zu sein braucht, oder wie Bolzano sagt: es können zwei Linien sein.

Diesen Einwand führt er jetzt nicht an, aber nachdem er vergebens versucht hat, den Satz zu beweisen, daß jede Linie durch ein Paar stetige Funktionen

$F(x,y,z) = 0, f(x,y,z) = 0$ vorgestellt werden kann, neigt er der Meinung zu, daß keine geometrische Erklärung möglich sei. Dadurch angeregt sucht er MM 313 ein Gegenbeispiel gegen die oben genannte Erklärung zu konstruieren, d. h. er sucht ein System von Punkten zu definieren, das beiden Bedingungen genügt und dennoch keine Linie ist. Stellt man die Erklärung als Definition an die Spitze, so ist das natürlich unmöglich, denn jedes System von Punkten, das den Bedingungen genügt, ist dann definitionsgemäß eine Linie. Der Gedankengang bei Bolzano ist aber ein anderer: er hat einen intuitiven Begriff der Linie im Kopf und sucht diesen Begriff durch geometrische Bedingungen zu bestimmen. Wenn er also ein Punktsystem konstruiert, das den Bedingungen genügt und intuitiv nicht als Linie anerkannt werden kann, man könnte sagen pathologisch ist, so weiß er, daß die Erklärung den Begriff der Linie nicht richtig erfaßt, und man soll sich nach einer anderen Erklärung umsehen; ein ganz normales wissenschaftliches Verfahren. Die Konstruktion des Gegenbeispiels MM 313 verläuft so.

Sei a die Mitte von mn . Man wähle nun Punkte r, s in Entfernung $am/2$ von a , derart, daß ar und as gleiche Winkel mit am bilden. Dann Punkte t, u in Entfernung $am/3$, derart, daß at und au ebenfalls gleiche Winkel mit am bilden, aber $\angle ram \neq \angle tam$ u. s. w. In der Weise entsteht um a eine zerstreute Menge von Punkten, während a im System keinen nächsten hat, und, so behauptet Bolzano, für jede Entfernung kleiner als am genau zwei Nachbarn. Im Punkte a sind also beide Bedingungen erfüllt, dennoch zweifelt er (mit Recht), ob das System aller dieser Punkte eine Linie genannt werden könnte, und es gibt ihm Anlaß, die alte Erklärung als ungenügend abzulehnen. Der Ansatz dieses Beispiels ist sehr ingenüös, aber in der Durchführung ein wenig ungenau, und deswegen in mehreren Hinsichten unvollkommen. Erstens haben die neu konstruierten Punkte nicht für jede hinlänglich kleine Entfernung zwei Nachbarn, woraus schon folgt, daß das System keine Linie ist. Dem ist aber abzuhelfen, indem man die Konstruktion für jeden neu konstruierten Punkt wiederholt. Ferner erhält man mit am/k ($k = 2, 3, \dots$) nicht jede Entfernung kleiner als am , nicht einmal alle rationalen Teile der am . Auch dem ist aber abzuhelfen. Schließlich müßte man die Richtung zu am genauer angeben, damit die Zerstreuung des Punktsystems gesichert ist. Es ist aber nicht schwer das Bolzanosche Beispiel dahin zu ergänzen, daß es deutlich zeigt, daß die Erklärung auch nicht beabsichtigte Punktmengen zuläßt, d. h. daß sie keine genaue Erklärung des Begriffs der Linie ist. In diesem Sinne hat Bolzano das Beispiel auch aufgefaßt, und er sucht die zerstreute Lage der Nachbarn mittels der Bedingung 3 auszuschließen, daß der Winkel zwischen den Richtungen, in denen die aufeinander folgenden

Nachbarn liegen, mit der Entfernung gegen Null strebt. Dann fehlt ihm noch eine Bedingung, die dafür sorgen soll, daß die Linie nicht aus zwei (oder mehr) disjunkten Teilen zusammengesetzt sein könne. Wenn er die Sache MM 318 wieder aufnimmt, so ist die vom Gegenbeispiel induzierte dritte Bedingung ganz verschwunden.

Erhalten ist aber, daß die frühere Begriffsbildung unrichtig ist, und er fängt auf einer neuen Grundlage an. Der neue Anfang ist jetzt der Begriff des Bogens zwischen a und b. Ein Bogen zwischen a und b ist ein System von Punkten, deren jeder keinen nächsten und für die kleinsten Entfernungen 2 Nachbarn hat, außer a und b, die nur Einen haben.

Dieser Anfang ist nicht sehr glücklich, denn auf die Erklärung trifft die Bemerkung MM 193 zu, daß der Bogen keine einzige Linie zu sein braucht, und ebenfalls das Ergebnis des Gegenbeispiels MM 313.

Dann folgt eine neue Erklärung der einfachen in sich zurückkehrenden Linie, nämlich als eine Punktmenge, deren jeder Punkt keinen nächsten, und für die kleinsten Entfernungen 2 Nachbarn hat. Jetzt aber wird beigesetzt »Welche Eigenschaft nicht mehr gilt, wenn man irgend einen Teil (einen Punct oder einen ganzen Inbegriff von Puncten) hinwegnimmt.«

Dieser Beisatz war gemeint, um die Figur von zwei außer einander liegenden Kreisen A und B auszuschließen. Wenn man nämlich den Kreis B wegläßt, so gilt die Eigenschaft noch, also ist die Figur keine in sich zurückkehrende Linie. Der Beisatz leistet aber zuviel. Wenn man nämlich einen Punkt des Kreises A wegläßt, so gilt die Eigenschaft ebenfalls, also wäre auch der Kreis selbst keine in sich zurückkehrende Linie! Man muß sich wundern, daß ein so einfaches Beispiel Bolzano nicht in den Sinn gekommen ist. Aber vielleicht hängt das zusammen mit der allgemeinen Auffassung eines stetigen Ausgedehnten, dessen einer Teil anfängt, wo ein anderer aufhört. Dieser Erklärung zufolge enthält ein Kreis, von dem man einen Bogen ab wegläßt, doch noch die Punkte a und b. Das führt aber zu einem sonderbaren Ergebnis. Wenn der Bogen auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist, so wäre der restliche Bogen wieder der ganze Kreis. Das heißt, es ist unmöglich aus einem Kreis einen Punkt wegzulassen. Das wäre eine schöne Paradoxie für Bolzano. Diese Argumentation könnte man aber gegen Bolzano nicht aufrechterhalten, denn er kannte den Unterschied zwischen einer begrenzten Linie ab (d. h. inklusive den Punkten a und b) und einer unbegrenzten Linie ab (d. h. exklusive den Punkten a und b).

Begnügen wir uns also damit festzustellen, daß der Beisatz nicht das Gewünschte leistet.

Nach Bolzano aber soll der Beisatz auch dazu dienen, daß jede solche Linie

eine bestimmte Fläche einschlieÙe. Bolzano erläutert das in einer Figur (MM 318, Z. 12 a).

Betrachtet man aber in dieser Figur die Teilfigur der Bogen *ade* und *anbde*, so sieht man, daß sie ebenfalls keine bestimmte Fläche einschließen. Die unmittelbar folgende Behauptung, daß zwei Bogen mit gemeinschaftlichen Grenzpunkten *a* und *b* eine einfache in sich selbst zurückkehrende Linie bilden, kann also in keiner Weise richtig sein. Man vergleiche dazu z. B. nachstehende Figur.



Die zwei Bogen sind nach der Bolzanoschen Erklärung einfach (d. h. ihre Punkte, mit Ausnahme von *a* und *b* haben 2 Nachbarn), sie durchschneiden sich aber in sieben Punkten, die alle 4 Nachbarn haben. Überdies schließen sie keine »bestimmte Fläche« ein.

Dieser Weg führt also auch nicht zum richtigen Begriff der Linie. Doch ist ein solcher Begriff wesentlich für die Bolzanosche Geometrie, denn der Begriff der Fläche wird unter Verwendung des Begriffs der Linie aufgebaut. Die Fläche wird MM 309 erklärt als ein System von Punkten deren jeder keinen nächsten, für jede endliche Entfernung aber eine ganze Linie von Punkten hat. Schon auf der nächsten Seite aber wird bemerkt, daß diese Definition zu weit ist, weil die Teile nicht zusammenhängend zu sein brauchen. Das gilt ebenfalls für die Definition der Linie, wo Bolzano glaubt, den Zusammenhang sichern zu können, indem er die Anzahl der Grenzpunkte (Punkte mit einer ungeraden Zahl von Nachbarn) auf höchstens zwei beschränkt (MM 311). Endlich wird dann MM 318 folgende vorläufige Erklärung der Fläche aufgestellt: Eine in sich zurückkehrende Fläche ist ein System von Punkten, deren jeder keinen nächsten, für die kleinsten Entfernungen aber eine einzige ganze in sich zurückkehrende Linie von Punkten zu Nachbarn hat. Laut MM 320 ist er mit dieser Erklärung zufrieden. Es sei aber bemerkt, daß der Zusammenhang noch immer nicht gesichert ist, ja angesichts des Beispiels MM 313 ist fast nichts gesichert, und bestimmt nicht die Möglichkeit der Darstellung einer Fläche durch eine Gleichung $f(x,y,z) = 0$, wo f eine stetige Funktion ist, wie MM 310 ohne Beweis behauptet wird. Einen Beweisversuch, daß die Lösungsmenge einer Gleichung $f(x,y,z) = 0$ die Bedingungen der geometrischen Definition erfüllt, findet man ebenfalls auf MM 310.

Nach diesem kurzen Überblick über die Untersuchung der Erklärung der Begriffe der Linie und der Fläche betrachten wir jetzt den Begriff des Grenzpunkts etwas genauer.

Nach MM 309 heißt ein Punkt einer Linie Grenzpunkt dieser Linie, wenn er für die kleinsten Entfernungen $(2n + 1)$ Nachbarn hat ($n = 0, 1, 2, \dots$). Dieser Begriff ist allgemeiner als der MM 243 eingeführte Begriff des Endpunkts, wo-

2a Uib[e]r Grenzen. ||

kö[nnen] k[eine] *Erklär[un]g[en]* seyn. D[en]n alle zu Gr[un]de lieg[en]d[e]n |

5 B[e]g[r]iff[e] der Gr[e]nz[en] [mü]ss[en] erst erört[er]t w[er]d[en]. ||

§. *Erklär[un]g.* Die Gr[e]nz[en] o[der] *Enden* e[ine]r L[ini]e heiss[en] alle je[n]e P[un]cte d[e]rs[e]lb[en], die ke[inen] nächst[en], | ab[e]r f.ür d[ie] kl[e]inst[en]

5 Entf[e]r[nun]g[en] [nu]r 1 od[e]r (2n + 1) P[un]cte hab[en]. ||

§. Es [mu]ß erwies[en] w[er]d[en], d[a]ß e[ini]ge Lini[en] d[e]rgl[ei]chen Gr[en]z[en] o[der] Endp[un]cte hab[en]. | (Die meist[en], (v[ie]ll[e]icht *alle* al-
g[e]br[ui]schen) L[i]n[ien] hab[en] k[ein]e d[er]gl[ei]chen Gr[en]zp[un]cte
z. B. d[ie] g[e]r[ade] L[ini]e, die K[e]g[e]l-schnittsli[nie]; u. s. w.) |

§. *Erkl[ärung].* Die Gr[en]ze o[der] *Ende*^b e[ine]r Fläche heißt d[e]r Inb[e]g[r]iff
o[der] das Syst[em] all[e]r j[ene]r P[un]cte d[er]s[e]lben, die d[ie] Gr[en]z[en]
all[e]r in ihr ged[en]kl[i]ch[en] Lini[en] v[on] e[ine]r Fläche Kr[ü]mmung

10 o[der] D[ur]chschnittsli[nien] d[e]r Fl[ä]che [mi]t Eb[ene]n s[i]nd. ||

§. Es [mu]ß erwies[en] w[er]d[en], d[a]ß | w[enn] e[ine] Fläch[e] e[inen] End-
p[un]kt hat, sie e[ine] g[anze] L[ini]e z[u]r Gr[en]ze habe. |

§. *Erkl[ärung].* Gr[en]z[e] o[der] End[e] e[ine]s K[ör]p[er]s heißt das Syst[em]
all[e]r j[ene]r P[un]cte, w[e]lche d[ie] Gr[en]z[en] | all[e]r in ihm g[e]d[en]kl[i]-
ch[en] Fl[ä]ch[en] s[i]nd. |

§. Es [mu]ß erwies[en] w[er]d[en], d[a]ß w[enn] ein K[ör]p[er] 1 Gr[en]zp[un]ct

15 hat, er e[ine] Fläche z[u]r Gr[en]ze habe. ||

Erkl[ärung]. M[an] sagt: *Zwey räumliche* D[in]ge gr[e]nz[en] an e[inan]d[e]r,
w[enn] sie e[inen] Th[eil] ihr[e]r Gr[en]ze | gem[ein]sch[af]tli[ch] hab[en].
(Z. B. 2 Li[nien], Fläch[en], K[ör]p[er].) |

§. *Erkl[ärung].* E[ine] L[ini]e heißt ein Syst[em] v[on] P[un]ct[en], d[e]r[en]
j[e]d[e]r k[einen] N[ä]chst[en], f.ür j[e]de kl[ein]e Entf[ernun]g | ab[e]r n[ur]
eine endl[iche] M[en]ge v[on] N[ä]chb[ar]n hat. |

20 §. *L[e]hrsatz.* Li[nien] s[i]nd mögl[i]ch. z. B. d[ie] g[e]r[ade], d[e]r Kr[ü]m[m]e etc. ||

§. *L[e]hrsatz.* W[enn] $y = fx$, u[nd] $z = \varphi x$ st[et]ig[e] F[un]ction[en] b[e]zeich-
n[en], u[nd] $m[an]$ g[e]d[en]kt alle | mögl[ichen] W[er]the v[on] x auf E[ine]r
R[ic]ht[un]g a[us] 1 b[e]l[i]eb[ig] P[un]ct d[er]s[e]lben, alle z[u]g[e]h[ör]i-

* Dieses Heft der MM fängt auf S. 309 an. Die Zeilen 2–18 sind gestrichen, 2a und 3a sind oben rechts hinzugefügt.

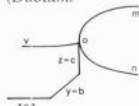
^b Anfänglich hieß es »Grenzpunkte...«, was dann geändert ist in »Die Grenze oder Ende«, (hochgestellt).

$g[en] v[on] y$ in $e[ine]r$ | auf $d[ie]se s[e]nkr[echten] R[ichtung]$, alle $v[on] z$ in $e[ine]r$ auf $j[en]e beyd[en] s[e]nkr[echten]$ so ist $d[ie]r$ $lnb[e]g[ri]ff$ | $all[e]r$ $P[un]cte$, $w[e]lche$ diese $Entf[er]n[un]g[en]$ hab[en], in $e[ine]r$ $L[ini]e$. |

§. *N.B.* Die Homologie $w[ür]de w[ohl] ford[er]n x,y,z$ alle 3 als $F[un]ction[en]$ $v[on] e[ine]r$ || $3^{te} v[e]ränd[er]lichen$ $Gr[ö]ße z[u] b[e]tr[ag]cht[en]: o[der]$ $[nu]r ü[b]e[r]h[au]pt z[u] sag[en]: x,y,z s[in]d 3 st[et]e[i]g v[e]ränd[er]l[iche]$ $Größ[en]$, zu $d[ie]r[en] j[e]d[e]r e[ine] endl[iche] M[e]nge d[er] and[eren] beyd[en]$ z.B. $f[ür] x=a, y=b, | z=c, od[e]r y=b od[e]r b+m; u[nd] z=c od[e]r c+n, o[der] c+r, g[e]h[ör]en$, d.h. $2 F[un]ction[en] f(x,y,z)=0$ } | $u[nd] q(x,y,z)=0$ } |

§. $L[e]hrs[at]z$. $W[enn] \bar{m}[an]$ sich $d[en] lnb[e]g[ri]ff all[e]r d[e]rj[enigen]$ $P[un]cte d[en]kt, d[ie] d[ie] 3 F[un]ction[en] || x,y,z f[ür] alle W[er]the d[ie]$ $zw[ischen] x=a, y=b, z=c; u[nd] x=a', y=b', | z=c'$ lieg[en]: so $d[en]kt \bar{m}[an]$ sich $ab[e]rm[ahl]s e[ine] L[ini]e$. $U[nd] zw[a]r, w[enn] diese F[un]ction[en] | auch auß[e]rh[au]ß d[ie]s[e]r Gr[en]z[en] reelle W[er]the hab[en]; so ist d[ie] L[ini]e, d[ie] $\bar{m}[an]$ sich $j[et]zo d[en]kt, | ein Stück d[e]rj[enigen], d[ie] \bar{m}[an] sich d[en]kt, w[enn] \bar{m}[an] d[ie] zu alle[n] mögl[ichen] W[er]th[e]n v[on] x,y,z g[e]h[ör]ig[en] P[un]cte | in e[inem] lnb[e]g[ri]ff z[u]s[am]m[en]d[en]kt. ||$ $§. L[e]hrs[at]z$. $D[ie] P[un]cte, d[ie] zu d[en] W[er]th[en] x=a, y=b, z=c; u[nd] x=a', y=b', z=c' | g[e]h[ör]en si[n]d d[e]r L[ini]e (des vorh[erigen] §., d[e]r *Stückl[ini]e*) $Gr[en]z[un]cte$. |$$

(*Dubium.*



Hier *end[igt] in o zw[a]r [ni]cht d[e]r Zw[e]ig mon, ab[e]r doch d[e]r Zw[e]ig ro.* |

Erkl[ärung]. $E[ine] Fläche$ heißt ein $Syst[em] v[on] P[un]ct[en], d[e]r[en] jed[e]r k[eine]n Nächst[en], f[ür] | j[e]de endl[iche] Entf[er]n[un]g ab[e]r e[ine] g[an]ze L[ini]e v[on] P[un]ct[en] hat. ||$

Es $[mu]ß erwies[en] w[er]d[en], d[a]ß ein D[ing], w[e]lch[es] d[ie]se Eig[en]s[chaft] hat, auch f[ol]g[en]de b[e]sitzt: $d[urc]h | d[en] P[un]ct geht e[ine] L[ini]e in j[e]d[e]r Eb[ene], d[ie] \bar{m}[an] d[urc]h d[ie]s[e]n P[un]ct legt. ||$$

§. $L[e]hrs[at]z$. $W[enn] f(x,y,z) e[ine] stät[i]ge F[un]ction v[on] x,y,z b[e]zei- ch[n]t: so dr[ü]ckt d[ie]s[e] | d[ie] $Gl[e]ich[un]g^* f(x,y,z) = 0 e[ine] Fläche$ aus, d.h. $w[enn] \bar{m}[an] 3 r[ech]tw[inkeligen] Coö[r]dina[t]en alle m[ö]gl[ich]en W[er]the v[on] x,y,z er- | th[ei]lt etc - |$$

$B[e]w[ei]s$. Denn $v[e]rmöge d[e]r Gl[e]ich[un]g f(x,y,z) = 0 g[e]h[ör]en zu 2$

* Das ursprüngliche »diese Function...« ist geändert in »die Gleichung«.

5 b[e]lieb[i]g[en] W[er]th[en] v.[on] d[en] 3 || Gr[ö]ß[en] x,y,z, E[ine]r o[der]
 doch [nu]r e[ine] endl[i]ch[e] M[en]ge W[er]the d[e]r 3^{te[n]} z.B. f.[ür] 2 b[e]-
 li[e]b[i]g[e] | W[er]the v[on] x,y, [nu]r 1 o[der] etl[i]che f.[ür] z. – Es sey[en]
 [nun] 3 solche z[u]s[a]m[men]g[e]h[ö]r[i]g[en] W[er]the | $x = a, y = b, z = c$; also
 $f(a,b,c) = 0$. Es mög[en] f[e]r[ne]r x,y,z z[u]gl[e]i[ch] um i,j,o wach[sen]; so ist |
 $f(a+i, b+j, c+o) = 0$ D[ie] Entf[ernun]g des zu d[ie]s[en] Coo[r]d[inat]en
 g[e]h[ö]r[i]g[en] | P[un]ct[es] v.[on] d[e]m vorig[en] m ist $= (i^2 + j^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}$. W[enn]
 10 [nun] d[ie]s[e]r W[er]th e[ine]r const[ant]en || Größe α gl[e]i[ch] g[e]s[e]tzt
 w[ir]d, d.h. $(i^2 + j^2 + o^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha$; so ist d[ur]ch d[ie]se B[e]ding[un]g | E[ine] d[e]r 3
 Größ[en] i,j,o d[ur]ch d[ie] 2 and[er]e[n] b[e]stimm[t], Ab[e]r d[ur]ch d[ie]
 Gl[e]i[ch]un[g] | $f(a+i, b+j, c+o) = 0$ ist gl[e]i[ch]f[ö]lls E[ine] v.[on] d[en] 3
 Gr[ö]ß[en] i,j,o d[ur]ch d[ie] 2 and.[eren] b[e]stimm[t]. D[ur]ch | d[ie] V[e]r-
 [ein]g[un]g beyd[e]r Gl[e]i[ch]un[g]en also, o[der] d[ur]ch d[ie] B[e]di[n]-
 g[un]g, d[a]ß m[an] alle d[ie] P[un]cte sucht, d[ie] v.[on] d[e]m P[un]cte | m
 d[ie] Entf[ernun]g α hab[en], w[e]rd[en] v.[on] d[en] 3 Größ[en] i,j,o 2 d[ur]ch
 15 E[ine] b[e]stimm[t]. Es || ist also e[ine] L[in]ie, in w[e]lch[e]r alle d[ie]se
 P[un]cte lieg[en]. – F[o]lg[ich] ex def.[initione] d[ie] Gl[e]i[ch]un[g] | $f(x,y,z) =$
 0 f.[ür] e[ine] Fläche. §. L[e]hrs[at]z. Umg[e]k[e]hrt. F.[ür] jed[e] Fläch[e] gilt
 w[en]gst[en]s stückw[ei]se $f(x,y,z) = 0$ |

§. L[e]hrs[at]z. Die allg[e]m.[eine] Gl[e]i[ch]un[g] f.[ür] e[ine] Eb[en]e ist
 $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta z = 0$. |

§. L[e]hrs[at]z. W[enn] d[ur]ch irg[en]d e[inen] P[un]ct e[ine]r Fläche e[ine]
 Eb[en]e | g[e]ll[e]gt w[ir]d, so hat d[ie]se [mi]t j[ene]r e[ine] g[an]ze L[in]ie
 20 g[e]mein. ||

B[e]w[ei]s. Denn f.[ür] d[ie] Fläche ist d[ie] Gl[e]i[ch]un[g] $f(x,y,z) = 0$. U.[nd]
 w[enn] d[ie] 3 Coo[r]d[inat]en | im P[un]cte m, $= a,b,c$; so ist f.[ür] j[e]d[en]
 and.[eren] P[un]ct n, d[e]r zu d[en] Coo[r]d[inat]en $x+i, y+j, | z+o$ g[e]h[ö]rt
 $f(a+i, b+j, c+o) = 0$. Für e[ine] Eb[en]e, d[ie] d[ur]ch d[en] P[un]ct m
 g[e]ht | [mu]ß $\alpha + \beta.a + \gamma.b + \delta.c = 0$ u.[nd] f.[ür] j[e]d[en] and.[eren] P[un]ct
 d[e]r zu d[en] Coo[r]d[inat]en | $a+i', b+j', c+o'$, g[e]h[ö]rt, $\alpha + \beta.a +$
 25 $\beta.i' + \gamma.b + \gamma.j' + \delta.c + \delta.o' = 0$ Also ||
 $\beta.i' + \gamma.j' + \delta.o' = 0$ |

N[un] hind[e]rt [ni]chts, d[a]ß m[an] i,j,o in d[e]r kr[um]men Ob[e]rfl.[äche] so
 nehme, d[a]ß sie d[en] i',j',o' in | d[e]r Eb[en]e gl[e]i[ch] w[e]rd[en]. D[ie]ß
 ford[e]rt n[ur] h[ö]chst[en]s $\beta.i + \gamma.j + \delta.o = 0$ u.[nd] |

$$f(\alpha + i, b + j, c + o) = 0 \quad |$$

2 Gl[e]i[ch]un[g]en, den[en] Genüge zu th[un] noch d[ur]ch un[e]ndl[i]ch
 30 v[ie]le W[er]the mögl[i]ch ist, so zw[a]r || d[a]ß 1 v.[on] d[en] 3 Größ[en] i,j,o,

d[ie] and:[eren] beyd[en] b[e]st[imm]t. M.[an] hat also | e[in]e g[an]ze *kr[umm]e* L[in]i[e] v[on] P[un]ct[en], d[e]r d[ie]se B[e]d[ing]g[un]g entspricht. | §. *L[e]hrs[atz]*. E[in]e Fläche, d[ie] *Ei[nen] Gr[en]zp[un]ct* hat, hat e[in]e g[an]ze L[in]i[e] z[u]r Gr[en]ze. |

B[e]w[ei]s. Es sey d[e]r P[un]ct a ein Gr[en]zp[un]ct; so gibt es (ex def.[initione]) f[ür] g[e]wisse Entf[ernun]g[en] d[ie] i[m]me[r] | kl[eine]r w[e]rd[en],

 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ * a}$ Fl[ä]che g[e]zogen[en] || L[in]i[e]. M.[an] d[en]ke sich also 35
d[ur]ch a e[in]e in e[in]e Eb[en]e g[e]zog[en]e | L[in]i[e] auf

d[e]r Fläche. U.[nd] s[e]tze d[ie] kl[e]inste Entf[ernun]g, in w[e]lch[e]r a noch *dopp[e]lt[e]* | (o[der] üb[e]rh[au]pt e[in]e g[e]r[a]dzähl[i]ge) N[a]chb[ar]n hat sey = e. M.[an] l[e]ge [nun] | d[ur]ch e[in]en and.[eren] P[un]ct d[e]r Fläche e[in]e Eb[en]e so, d[a]ß das P[er]p[en]d[i]k[e]l v[on] a auf sie < e | sey. Diese Eb[en]e w[ir]d, w[e]l sie d[ur]ch *Ei[nen] P[un]ct* d[e]r Fläche g[e]ht, e[in]e g[an]ze L[in]i[e] m[it] d[er] Fl[ä]ch[e] || g[e]mein hab[en]. — — — Haeret 40
aqua |

N. Die *Erkl[är]r[un]g* d[e]r Fläche (u.[nd] eb[en] so d[e]r L[in]i[e]) ist noch [ni]cht vollst[än]d[i]g. Es f[e]hlt n[o]ch | Ein M[e]rkmal. Das D[ing], w[a]s ich [un]t[er] d[em] N[a]hm[en] e[in]e[r] L[in]i[e] ob[en] b[e]schr[i]eb[en] habe, ka[n]n ein G[an]z[e]s a[us] | 2 u[n]v[er]b[un]den[en] L[i]n[i]en ab, cd seyn; u.[nd] das ob[en] [un]t[er] d[em] N[a]hm[en] e[in]e[r] Fl[ä]che be- | schr[i]eb[en]e D[ing] kann ein Syst[em] etl[i]ch[e]r N[e]b[e]n[e]in[an]d[e]r lieg[en]-

311 d[e]r g[an]z u[n]v[er]b[un]d[en]er Fläch[en] || seyn. || 45

 Dah[e]r ist d[e]r *Erkl[är]ung* d[e]r L[in]i[e] beyz[u]s[e]tz[en]: | §. *Erkl[är]ung*. E[in]e z[u]s[a]m[m]h[äng]e[n]de (o[der] *cont[inu]irli[che]*) L[in]i[e] heißt e[in]e solche, in d[e]r es ent[we]d[e]r ke[ine] o[der] [nu]r 1 o[der] höchst[ens] 2 Gr[en]zp[un]cte gibt. |

Anm[erkung]. Die Urs.[ache] d[ie]s[e]r B[e]griffaufst[e]ll[un]g liegt, wie b.[ei] so vi[e]le[n] and[e]r[e]n geom[etrischen] || B[e]gr[iff]en, in d[e]r M[e]ch[an]ik. 5
M.[an] n[em]nt n[ä]hmli[ch] e[in]e z[u]s[a]m[m]h[äng]ende L[in]i[e] e[in]e solche d[ie] d[ur]ch d[ie] *B[e]w[e]g[un]g* | e[ine]s P[un]ct[es] b[e]schrieb[en] w[e]rd[en] kann. N[un] kann j[e]de B[e]w[e]g[un]g höchst[ens] 2 Gr[en]zp[un]cte, e[in]en Anf[ang]s u.[nd] Endp[unkt] hab[en], es läßt sich ab[e]r a[us]h e[in]e B[e]w[e]g[un]g ohne Anf[ang]s o[der] e[in]e ohn[e] Endp[unkt], o[der] e[in]e | ohne beyde denk[en]. — W[enn] [nun] d[ie] L[in]i[e] e[in]en Gr[en]zp[un]ct hat, da [mu]ß in d[e]r B[e]w[e]g[un]g entw[eder] | ein Anf[ang]s o[der] Endp[unkt] seyn. E[in]e Figur wie abcδ kö[n]nte

 g[ei]chw[ohl] d[ur]ch E[in]en Zug, E[in]e || B[e]w[e]g[un]g 10

b[e]schr[ie]b[en] w[er]d[en]. N[ä]h[m]l[i]ch in w[o]f[ern] d[e]r Gr[en]zp[unk]t
c[e]inma[hl] als Endp[unk]t, da[nn] wied[e]r als | Anf[an]gsp[unk]t b[e]t[ra]ch-
tet w[ir]d, u.[nd] d[ie] B[e]w[e]g[un]g v.[on] a, o[der] d a.[us] anf[än]gt. –)

Dag[e]g[en] d[ie] Figur | | ka[nn] | schl[e]cht[er]d[ing]s [ni]cht d[urc]h 1
Zug b[e]schr[ie]b[en] w[er]d[en]. – Das K[en]nz[e]ich[en], d[a]ß e[ine] L[inie]
continu[ier]l[i]ch ist (d. h. d[urc]h Ei[nen] u[n]u[n]t[er]broche[nen] (obg[e]ch
oft wied[e]r z[urück]k[ehr]en[d]en) Zug b[e]schr[ie]b[en] w[er]d[en] ka[nn],
ist: | w[enn] d[ie] L[inie] m[ehr] als 2 Gr[en]zp[un]cte hat; || so [mu]ß j[e]d[e]s
Stück das zw.[ischen] 2 Gr[en]zp[un]ct[e]n enth[alt]en ist, °(w[a]s heißt das:
zw.[ischen] 2 Gr[en]zp[un]ct[e]n ent-|halt[en] seyn?)° ein[en] Dopp[e]lp[un]ct
hab[en].

Z.B.  wo in o ein Dopp[e]lp[un]ct ist. |

§. Erkl[ärung]. E[ine] Fläche heißt continu[ir]lich, w[enn] sich a.[us] j[e]d[e]m
ihr[e]r P[un]cte zu j[e]d[e]m and[er]m, e[ine] | contin[ui]erliche Li[nie] g[e]-
d[en]k[en] läßt, d[e]r[en] alle P[un]cte in d[e]rs.[elben] lieg[en]. |

Ann[er]kung. E[ine] L[inie] v.[on] e[ine]f[a]ch[e]r Kr[ümmun]g (o[der] ein
D[ur]chschn[itt] d[e]r Fl[ä]che [mi]t e[ine]r Eb[en]e) [lä]ßt sich [ni]cht üb[e]r-
all || find[en] z.B. Zw.[ischen] d[en] 2 P[un]ct[en] a, b läßt sich w[ohl] e[ine]

cont[inu]ierliche L[inie] amb in d[er] Fläche F zieh[en] | ab[er]
k[ein]e g[e]r[a]d[e] L[inie] ab, noch E[ine] in e[ine]r Eb[en]e b[e]-
fi[n]d[et]e. ||

Ann[er]kung. D[ie] Gr[en]ze e[ine]r Fläche [mu]ß m[an] wie es nach ob[i]g[e]r
V[er]b[e]ss[er]un]g gesch[e]h[en] | ist erklär[en], denn w[enn] m[an] d[ie] B[e]-
d[ing]un]g e[ine]r L[inie] v.[on] e[ine]f[a]ch[e]r Kr[ümmun]g o[der] e[ine]r L[inie],
d[ie] in e[ine]r Eb[en]e liegt | [ni]cht beys[etz]t[en] wollte, so wäre d[e]r
P[un]ct a in d[er] Fl[ä]che F auch k[ein] Gr[en]zp[un]ct, d[en] es g[e]ht |
e[ine] L[inie] man, d[ie] cont[inu]ierlich ist, d[urc]h ihn hi[n]d[urc]h. – |

Noch [ni]cht g[e]n[u]g! W[enn] d[ie] Fläche F s[e]lbst e[ine]
Eb[en]e ist, u.[nd] d[ie] d[urc]h a g[e]l[e]gte Eb[en]e || z[u]-
f[äl]l[i]g e[ine]rl[e]i [m]it ihr, so w[ür]de auch d[ie]se Erkl[ärung]
noch täusch[en]. D[ie] Erkl[ärung] | [mu]ß also laut[en]: Gr[en]zp[un]ct
e[ine]r Fläche F heißt ein P[un]ct a, w[enn] e[ine] v.[on] d[e]r Fläche F v[er]-
sch[ie]d[en]e | Eb[en]e [m]it dies[e]r e[ine] cont[inu]ierliche L[inie] g[e]mei[n]
hat, d[ie] ihr[en] Gr[en]zp[un]ct in a hat. |

§. Erkl[ärung]. Die kr[ümm]e L[inie] d[e]r[en] alle P[un]cte v.[on] d[e]m ge-
g[e]b[en]en a g[e]schw[ei]t[e]n t[re]nt s[ich]d, | will ich d[ie] Polarlinie o[der]
Kug[e]llinie z[um] P[un]ct a ne[n]nen. ||





§. Sie kann $e[in]$ in *sich s[e]lbst z[u]r[üc]kk[e]h[ren]de*, | (so $n[en]$ -
nen) wir $n[ä]hml[i]ch$ $e[in]$ *cont.[inuierliche]* $L[inie]$, $d[e]r[en]$
 $k.[ein]$ $P[un]ct$ $v.[on]$ $d.[en]$ *and[e]r[e]n* $e[in]$ ∞ *gr[o]ße Ent-|*
f[ernun]g hat, $w[enn]$ sie $k[ein]$ *Endp[un]cte* hat.) *seyn*, $od[e]r$

$[ni]cht$. ||

§. $L[e]hrs[at]$. $W[enn]$ $e[in]$ *Fläche* $Ei[nen]$ $Gr[en]zp[un]ct$ hat, so hat sie
 $e[in]$ ∞ $M[en]ge$ $d[er]s[e]lb[en]$. |

$B[e]w[ei]s$. Denn es sey a ein $Gr[en]zp[un]ct$, d. h. $e[in]$ $d[urc]h$ a $g[e]l[e]gte$
 $Eb[en]e$ $g[e]be$ $[m]it$ $d[e]r$ *Fläche* $e[in]$ | $D[u]rch[schni]ttsl[i]n[i]e$, $w[e]lche$ in a
 $e[inen]$ $Gr[en]zp[un]ct$ hat. $M[an]$ $l[e]ge$ $[nun]$ $d[u]rch$ *and[e]re* $P[un]cte$ $d[ie]$ -
 $s[e]r$ *Fläche* | *par[a]llele* $Ebe[n]e[n]$, so $w[er]d[en]$ $d[ie]$ $D[u]rchsch[ni]ttsl[i]$ -
 $n[ien]$, $d[ie]$ $d[ie]se$ $[mit]$ $d.[er]$ *Fl[ä]che* *bild[en]* *entw[e]d[e]r* | *Endp[un]cte*
hab[en] *o[der]* $[ni]cht$. $W[enn]$ alle $e[inen]$ *Endp[un]kt* *hab[en]*, so ist $d[e]r$

312



$L[e]hrs[at]$ schon erwies[en]. || $W[enn]$ $ab[e]r$ $e[ini]ge$ $k[ein]$ $[en]$
Endp[un]ct (in *sich s[e]lbst z[u]r[üc]kk[e]h[ren]d* $si[n]d$), so $[mu]ß$
es $E[in]$ $d[er]s.[elben]$ $g[e]b[en]$, | $d[e]r[en]$ $Eb[en]e$ $d[e]r$ $Eb[en]e$
 $d[urc]h$ $d[en]$ $P[un]ct$ a (*o[der]* $d.[em]$ $P[un]cte$ a $s[e]lbst$) *am näch-*
st[en] *köm[m]t*. Dieses | sey bc . $M[an]$ *ziehe* $[nun]$ *aus* a in $e[inen]$ $P[un]ct$ $d[e]r$
 bc $e[in]e$ $L[in]i$, $d[ie]$ in $d.[er]$ *Fl[ä]ch[e]* liegt. (§.) | In $d[ie]s[e]r$ $L[in]i$ gibt es
 ∞ $v[ie]lle$ $P[un]cte$, $d[urc]h$ $d[e]r[en]$ $j[e]den$ $e[in]e$ $Eb[en]e$ $\neq$ zu bc $g[e]l[e]gt$
 $w[er]d[en]$ kann, $w[e]lche$ $[mit]$ || $d[e]r$ *Fl[ä]che* $e[in]e$ $D[urc]hsch[ni]ttsl.[inie]$
 $g[e]b[en]$ $w[ir]d$. U.[nd] $d[e]r$ *Vor[au]ss[et]zung* nach $[mü]ss[en]$ alle $d[ie]se$
 $D[urc]hsch[ni]ttsl[i]n[ien]$, $w[e]i[ß]$ | *ihre* *Eben[en]* *näh[e]r* *lieg[en]* als bc , $ei[nen]$
 $Gr[en]zp[un]ct$ *hab[en]*. - |

Die Erkl.[ärung] $d[e]r$ $L[in]i$ sollte $v[ie]ll[e]i$ cht so $g[e]st[e]llt$ $w[er]d[en]$. |

§. *Erkl[ärung]*. Ein $Lin[ien]syst[e]m$ heißt ein $Syst[e]m$ $v.[on]$ $P[un]ct[en]$, $d[e]$ -
 $r[en]$ $j[e]d[e]r$ $k.[einen]$ $N[ä]chst[en]$ $f.[ür]$ $j[e]de$ | $b[e]lieb[i]ge$ *Entf[er]n[un]g*
ab[e]r *eine* *endl[i]che* $M[en]ge$ $v.[on]$ $N[a]chb[a]rn$ hat. ||

Anm[erkung]. Ein $Li[nien]syst[e]m$, $w[e]i[ß]$ das so $b[e]schriebe[n]e$ $Di[n]g$ $w[ir]k-$
 $l[i]ch$ *aus* $[m]ehr[er]en$ | $e[in]z[e]ln[e]n$ $Lin[ien]$ $b[e]st[e]h[e]n$ kann; wie $Fi-$



$g.[ur]$ [1] zeigt. |

§. *Erkl[ärung]*. $E[in]e$ $e[in]z[e]lne$ $Li[n]i$ heißt ein $Syst[e]m$
 $v.[on]$ $P[un]ct[en]$, $d[e]r[en]$ $j[e]d[e]r$ $k.[einen]$ $N[ä]chst[en]$ |
 $f.[ür]$ $d[ie]$ $kl[ein]st[en]$ *Entf[er]n[un]g[en]* *ab[e]r* *im[me]r* 2 *o[der]* 2 n $N[a]ch-$
 $b[a]rn$ hat; $wov.[on]$ $j[e]doch$ $Ei[n]e$ *höchst[en]s* 2 | $P[un]cte$ *ausg[e]nom[m]en*
 $s.[ein]$ *kö[n]nen*, $d[ie]$ $f.[ür]$ $d[ie]$ $kl[ein]st[en]$ *Entf[ernun]g[en]* $[nu]r$ 1 *o[der]*

15 $2n+1$ $N[a]chb[a]rn$ $hab[en]$; $u[nd]$ $d[e]ßh[a]lb$ $Gr[en]zp[unk]te$ || $g[e]na[nn]t$
 $w[e]rd[en]$. *Anm[erkung]*. Dies[e]r Erkl.[ärung] $z[u]f[o]lge$ $w[ür]de$ $[ni]cht$ $[nu]r$
 $d[ie]$ *Figur 1*, aus | $m[e]hr[e]r[e]n$ $Li[nien]$ $b[e]steh[en]$; sond.[ern] auch $d[ie]$

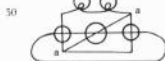


Figur 2. $w[ür]de$ $a.[us]$ $m[e]hr[e]r[e]n$ $Li[nien]$
 $b[e]steh[en]$. | *Figur 3* $dag[e]g[en]$ wäre $e[in]e$
 $e[in]z[i]ge$ $Li[ni]e$. |

Jede $Li[ni]e$ $v.[on]$ $d[ie]s[e]r$ Art läßt sich $[mi]t$ $ei.[nem]$ $e[m]z[i]g[en]$ Zuge
ohne | Rückk[e]hr $b[e]schreib[en]$. – $W[enn]$ $m[an]$ $wiss[en]$ will ob $e[in]e$ vor-
20 $g[e]l[e]gte$ *Figur* sich $d[urc]h$ 1 Zug ($ohn[e]$ || $R[ück]k[e]hr$) $b[e]schr[e]ib[en]$
lasse o[der] $[ni]cht$, so braucht $m[an]$ $[nu]r$ nachz[u]seh[en], ob sie 1 o[der] 2
o[der] $m[e]hr[e]r[e]$ | $P[un]cte$ habe, in $w[e]lch[en]$ $(2n+1)$ Stücke (wie $m[an]$
sagt) $z[u]s[a]m[men]stoss[en]$, d.h. in $w[e]lch[en]$ $f[ür]$ $d[ie]$ $kl[ein]st[en]$ Ent-
f[ernung]g[en] | $(2n+1)$ $N[a]chb[a]rl[ich]e$ $P[un]cte$ $z[u]$ $f[in]d[en]$ $s[in]d$.
 $W[enn]$ sie $m[e]hr$ als 2 solche $P[un]cte$ hat; so $ka[nn]$ | sie $[ni]cht$ $b[e]schr[ie]-$
 $b[en]$ $w[er]d[en]$. $W[enn]$ sie $[nu]r$ 2 hat; so ist es mögl[ich], ind[e]m $m[an]$
 $d[en]$ $Ei[nen]$ | $z.[um]$ $Anf[an]gs$ $u[nd]$ $d[en]$ $and.[eren]$ $z.[um]$ $Endp[un]cte$
nim[m]t. $W[enn]$ sie $ke[in]e$ $d[er]gl[iche]n$ $P[un]cte$ hat $u[nd]$ auch $[ni]cht$ ins
25 ∞ $g[e]ht$, $ka[nn]$ || $m[an]$ $b.[ei]$ $w[e]lch[e]m$ $P[un]cte$ $m[an]$ will, $d[en]$ $Anf[an]g$
 $d[e]r$ $B[e]schr[e]ib[un]g$ mach[en], ($D[a]ß$ sie $[nu]r$ 1 habe; | ist $[un]m[ö]gl[ich]$,
 $w[enn]$ sie $[ni]cht$ $P[un]cte$ hat, $d[ie]$ ins ∞ $g[e]h[e]n$; wo $d[e]r$ $and[e]re$ $End-$
 $p[un]ct$ $gl[e]ichf.[alls]$ | in ∞ Entf.[ernung] liegt.) Diese *Figur[en]* kö[nnen] |
 $[nu]r$ $d[a]d[urc]h$ $b[e]schr[ie]b[en]$ $w[er]d[en]$,
 $d[a]ß$ $m[an]$ $v[on]$ $Ei[nem]$ a ausgeht $u[nd]$ $b.[ei]$
 $d.[em]$ $and[e]r[e]n$ $end[i]gt$. |



Item $Dag[e]g[en]$ $f[o]l[ge]n$ *de* *Figur* läßt sich
 $schl[e]cht[er]d[in]gs$ $[ni]cht$ $d[urc]h$ ||
 $Ei[nen]$ Zug $b[e]schreib[en]$; $w[ei]l$ sie
4 $P[un]cte$ a,a,a,a hat, in $w[e]lch[en]$



$e[in]e$ $ung[e]r[a]de$ $Anz[a]hl$ $v[on]$ $P[un]cte[n]$ $z[u]s[ammen]$ | $stoss[en]$. Es soll
 $e[in]ma[hl]$ $Pr[e]isau[fg]a[be]$ $g[e]w[e]s[en]$ $s.[ein]$, $d[ie]se$ *Fig.[ur]* $[mi]t$ $ei.[nem]$
Zuge $z[u]$ $b[e]schr[e]ib[en]$. Die Mü[h]e | war $z[u]$ $erspar[en]$.⁴ § *Erkl[ärung]*.
 $E[in]e$ $Li[ni]e$, $d[ie]$ $k.[eine]$ $Endp[un]kte$ $u[nd]$ $k[ein]e$ ins ∞ $lieg[en]d[en]$
 $P[un]kte$ hat, heißt $e[in]e$ in *sich s[e]lbst* $z[u]r[ück]k[e]h[ren]d[e]$. |
 N Noch im[m]e[r] $g[e]f[ü]hlt$. Nach $d[ie]s[e]r$ *Erkl.[ärung]* wäre $\bigcirc$ $\bigcirc$ $E[in]e$
 $Li[ni]e$. |

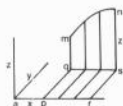
⁴ Der weitere Teil der Z. 32 sowie die Z. 33 sind in dunkler Tinte zwischen den Text geschrie-
ben.

§. *Erkl[ärung]*. Ein *Fläch[en]syst[e]m* heißt ein *Syst[e]m* v._[on] *P[un]ct[en]*,
 d[e]r j[e]d[e]r k[e]inen nächst[en], || f._[ür] d[i]e kl[e]inst[en] Entf[er]n[un]- 35
 g[en] ab[e]r e[in]e ganze L[in]ie voll *P[un]ct*e hat. Z.B. M u_[nd] N |

 §. *Erkl[ärung]*. W[enn] d[e]r *P[un]ct* a d[e]r Fläche F d[i]e Eig[en]-
 s[chaft] hat, | d[a]ß irg[en]d e[in]e ([n]icht alle) d[ur]ch ihn g[e]-
 l[e]gte Eb[en]e [m]it d[e]r Fläche e[in]e D[ur]chsch[n]ittsl[in]ie bild[e]t, die in
 a end[i]gt; | so ist a ein *Gr[en]z[un]ct* d[i]e[s]e[r] Fläche. |

 *Ann[er]kung*. Nur E[in]e, o[der] d[i]e and[ere] Eb[en]e [m]uß
 e[in]e solch[e] D[ur]chsch[n]ittsl[in]ie [m]it d[er] Fläche bild[en].
 D[en]n || d[i]e Eb[en]e d[ur]ch b[e] g[e]ht auch d[ur]ch d[en] *P[un]ct* 40
 a, u._[nd] hat in a doch k[e]inen *Gr[en]z[un]ct*. | °(Ist eb[en] d[e]ßh[al]b [nu]r
Lehrs[atz], [n]icht *Defin[ition]*)° |

§. *L[e]hrs[atz]*. Jede L[in]ie kann d[ur]ch e[in]e o[der] m[e]hr[e]re Paare stet[i]-
 g[e]r F[un]ction[en] v._[on] 3 v[er]ränd[er]lichen Größ[en] | x,y,z vorg[e]st[e]llt
 w[er]d[en] v._[on] d[e]r Form | $F(x,y,z) = 0$ u_[nd] $f(x,y,z) = 0$, $\Phi(x,y,z) = 0$;
 315 u_[nd] $\varphi(x,y,z) = 0$; $\Psi(x,y,z) = 0$ u_[nd] $\psi(x,y,z) = 0$; u.s.w. || wob.[ei] m[an]
 f[e]stst[ellt], d[a]ß x,y,z 3 *Coord[ina]t[en]* vorst[ell]en, u._[nd] die 2 erst[en]
F[un]ction[en] f._[ür] | alle W[er]the v[on] x,y,z d[i]e zw.[ischen] x=a u_[nd]
 x=a'; y=b, u_[nd] y=b'; z=c, u_[nd] z=c'; lieg[en]; d[i]e 2 and[eren] | f._[ür]
 alle W[er]the v._[on] x,y,z, d[i]e zw.[ischen] x=a' u_[nd] x=a''; y=b', u_[nd]
 y=b''; z=c', u_[nd] z=c'' lieg[en] zus[am]m[en] | gelt[en] soll[en]. || 5



B[e]w[ei]s.* Es sey n[un] hml[i]ch m ein *P[un]ct* d[e]r L[in]-
 ie, m[an] n[e]hme a._[us] ei[nem] b[e]l[i]eb[i]g[en] |
*P[un]ct*e a, 3 auf e[iner] d[e]r s[en]krechte R[ic]htungen
 u_[nd] ziehe a._[us] m d[i]e *P[ar]allel[en]* mq, qx, xa |
 u._[nd] es sey ap = x = a, pq = y = b, qm = z = c; n s._[ei] ein
 and[e]r *P[un]ct* d[e]r L[in]ie, u._[nd] se[ien]e *Coord[ina]-*
 t[en] ar = x = a'; rs = y = b'; sn = z = c'. W[ei]l [nun] d[i]e L[in]ie — — — || 10
Haeret aqua |

So viel [m]ißlunge[n]e V[er]suche br[in]g[en] [m]ich neu[e]rd[in]gs auf d[en]
 G[e]d[an]k[e]n d[en] ich schon lä[n]gst | g[e]hegt, d[a]ß es k[ei]ne *geom[etrischen]*,
 sond[ern] bl[oß] alg[e]br.[aische] (arithm[etische]) *Erkl[är]ung*
 d[e]r L[in]ie, Fläch[e], etc | g[e]be. M[an] [m]uß n[un] hml[i]ch das, w[a]s so
 eb[en] als *L[e]hrs[atz]* aufg[e]st[e]llt w[ur]de zu *Erkl[ärung]* d[e]r | kr[ummen]

* In der Figur hieß p zuerst x.

Li[nie] mach[en]. F[o]lg[en]de B[e]tr[a]cht[un]g hat mich schon ehed[e]m auf
 15 d[ie]s[en] G[e]d[an]k[en] g[e]f[üh]r[t]. ||

M.[an] d[e]nke sich ein Syst[e]m v.[on] P[un]ct[en] nach
 m $\begin{matrix} r & 1 \\ 8 & 2 \\ 5 & 3 \end{matrix}$ $\times n$ f[o]lg[en]d[e]r R[e]g[e]l: D[e]r P[un]ct a habe | in d[e]r Ent-
 f[ernun]g am, 2 P[un]cte m,n n[e]b[en] sich; in j[e]d[e]r
 kl[e]i[n]e[r]e[n] gl[e]i[chf[a]lls 2, | ab[e]r nach f[o]lg[en]d[e]m G[e]s[e]tz. Die
 P[un]cte m,n mög[en] z.B. in entg[egen]g[e]s.[et]zten R[i]cht[un]g[en] | zu a
 lieg[en]. In d[e]r Entf[ernun]g $\frac{am}{2}$; mag er 2 P[un]cte r,s in R[i]cht[un]g[en]
 h[a]b[en] die m[i]t d.[er] R.[ichtung] am gl[e]i[che] W[ink]e[l] | bild[en]; in d.[er]
 Entf.[ernun]g $\frac{am}{3}$; mag er d[er]gl[eichen] P[un]cte t,u in R[i]cht[un]g[en] ha-
 20 b[en], d[ie] [mi]t an gl[e]i[che] W.[inkel] bild[en]; || u. s. w. – D[e]r P[un]ct a hätte
 also f.[ür] j[e]de Entf[ernun]g d[ie] < am = an ist 2 P[un]cte zu N[a]chb[ar]n. |
 U.[nd] den[n]och zw[e]iße ich s[e]hr, d[a]ß das Syst[e]m all[e]r d[ie]s[e]r
 P[un]cte e[ine] L[inie] g[e]na[n]nt w[er]d[en] kö[n]nte! – |

M.[an] [m]üßte [nu]r all[en]f[a]lls noch f[o]lg[en]de B[e]ding[un]g zu d[e]r Er-
 kl.[ärung] hi[n]z[u]th[un]: |

Erkl[ärung]. E[ine] L[inie] heißt ein Syst[e]m v.[on] P[un]ct[en], w[enn] es d[ie]
 B[e]sch[a]ff[en]h[e]it hat, d[a]ß 1. j[e]d[e]r d[e]r d[e]rs.[elben] k[ei]nen Nächst[en], |
 25 d[a]ß 2. anz[u]f[an]g[en] v.[on] e[ine]r g[e]wiss[en] Entf[ernun]g f.[ür] || j[e]de
 kl[e]i[n]e[r]e h[e]rabw[ä]rts ein o[der] etl[i]che (ei[n]e) endl[i]che M[en]ge Paare
 v[on] N[a]chb[ar]n hat, w[enn] f[er]n[e]r 3. d[ie] R[i]cht[un]g[en] | in w[el]-
 ch[en] d[ie]se N[a]chb[ar]n lieg[en], W[ink]el[n] [mi]t e[inan]d[e]r bild[en],
 w[el]che so klein w[er]d[en] als m[an] [nu]r | i[m]me[r] will, w[enn] m[an] auch
 d[ie] Entf.[ernun]g[en] so kl[e]i[n] n[imm]t, als m[an] will; w[enn] endl[i]ch 4. –
 – ja | was noch? Was will m[an] z[u]s[e]tz[en], da[mi]t m[an] d[ie] B[e]di[n]-
 g[un]g erh[alte], d[a]ß es [nu]r Ei[n]e L[inie] ist: da[mi]t | [ni]cht das Syst[e]m
 d[e]r 2 P[ar]a[ll]ell[en] E[ine] L[inie] heisse? In d[ie]s[e]m gibt es zu j[e]d[e]m
 30 P[un]cte m f.[ür] j[e]de Entf.[ernun]g 2 Paar, u[nd] || endl[i]ch (w[enn] d[ie]
 Entf.[ernun]g) < mo w[ir]d, 1 Paar P[un]cte. – Ein Endp[unk]t ist [ni]cht
 vorh[an]d[en]. |

 Dass[e]lbe gilt v.[on] f[o]lg[en]d[e]m Syst[e]me  od[e]r 
 35 u.[nd] d[er]gl[eichen] ||

So eb[en] w[e]rde ich g[e]w[a]hr, d[a]ß auch d[ie] Erkl.[ärung] d[urc]h
 F[un]ctionen ihre gr[o]ße Schw[ie]r[i]gk[e]it[en] habe | E[inma]hl
 si[n]d doch jen[e] Coord[ina]t[en] etw[a]s g[an]z Zufäll[i]g[e]s. (so
 35 sch[e]int es w[en]gst[en]s). Sodann || wie will m[an] d[ie] g[e]r[ade] L[inie] mn,
 d[ie] # zu z ist, b[e]stim[m]en? | F.[ür] d[ie] W[er]the x = a, y = b, hat z alle



mögl[ichen] W[e]rthe zw.[ischen] $z = m$, $u[n]d$ $z = n$. | Ab[e]r wie will $\bar{m}[an]$ d[ie]ß in e[ine]r F[un]ction ausdrück[en]? | Antw[ort]. Es ist nicht nöth[i]g, es in e[ine] F[un]ction ausz[u]-dr[üc]k[en]. – Was | ab[e]r d[ie] Zufäll[i]gk[ei]t j[ene]r B[e]-st[immu]ng d[e]r Einz[e]ln[en] P[un]cte d[urc]h Coord[i]nat[en] an b[e]langt, so d[ür]fte d[ie]ß w[o]hl || [nu]r scheinbar seyn. Es ist freyl[i]ch etw[a]s Zufälliges, d[a]ß $\bar{m}[an]$ g[e]r[a]de diesen Anf[an]gsp[un]ct, | g[e]r[a]de d[ie]se 3 R[i]cht[un]g[en] wählt: ab[e]r es ist v[ie]ll[e]icht [ni]cht z[u]f[ä]ll[i]g, d[a]ß $\bar{m}[an]$ üb[e]rh[au]pt E[ine]n | wähle. |

Etw[a]s Aehnl[i]ch[e]s scheint mir auch b.[ei] d[en] B[e]g[r]iff[en] d[e]r Rich-
t[un]g, des G[e]rad[en], d[e]r Seite, d[e]r | Eben[e], d[e]r G[e]g[en]d u[n]d des
Ra[um]es obz[u]walt[en]. Am Ende d[ür]fte es doch k[ein]e f[a]lsche || Erkl[ä]-
r[un]g des Gerad[en] s.[ein], w[enn] $\bar{m}[an]$ sagte: es sey dasj.[enige], w[a]s d[ie]
R[i]cht[un]g[en] ab u[n]d ba G[e]meins[a]m[en] | hab[en]; o[der] sonst auf ir-
g[en]d e[ine] Art d[en] B[e]g[r]iff des G[e]meins[a]m[en] aufnahme. ||

Es ist zw[a]r w[a]hr, d[a]ß k[ein]e Erkl[ä]r[un]g per accidens g[e]scheh[en]
soll, u[n]d d[a]ß, w[enn] $\bar{m}[an]$ in e[ine]r | Erkl[ä]r[un]g ei[nen] B[e]g[r]iff
r[ei]nbr[ing]t, d[en] $\bar{m}[an]$ sich k[ein]esw[e]gs nothw.[endig] z[u] d[en]k[en]
braucht, um sich d[en] z[u] erklä-|r[en]d[en] z[u] denk[en], d[ie]se Erkl[ä]-
r[un]g f[ehl]e[r]h[a]ft sey. Ab[e]r es ist noch d[ie] Frage, ob $\bar{m}[an]$ sich | e[ine]
R[i]cht[un]g o[der] ein G[e]r[a]d[en], etc. denk[en] könn[e], ohne sich 2
P[un]cte etc z[u] denk[en]. D[a]ß $\bar{m}[an]$ sich || [ni]cht g[e]r[a]de d[ie]se 2
P[un]cte denk[en] [m]üsse, das ist w[o]hl w[a]hr, ab[e]r doch v[ie]ll[e]icht ir-
g[en]d w[e]lche. |

D[e]r Ra[um] ist ja [ni]chts, als ein V[e]rh[ä]lt[ni]ß. Alle B[e]g[r]iffe in d[er]
Geom[etrie], s[ind] also [ni]chts als V[e]r-|h[ä]lt[ni]ßb[e]g[r]iffe. D[ie]s[e]r
P[un]ct, ist also so viel als nichts g[e]s[agt]. D[ie]se Entf[ernu]ng ab[e]r[ma]hls
[ni]chts g[e]s[agt] | als [nu]r im V[e]rh[ä]lt[ni]sse. D[e]r Ausd[ru]ck »D[ie]s[e]r
P[un]ct« sagt [nu]r aus, d[a]ß $\bar{m}[an]$ sich d[e]nkt Ein Gl[ie]d des V[e]rh[ä]lt-
[ni]ss[es]. |

Alle B[e]g[r]iffe d[e]r Geom[etrie], – ich habe d[ie]ß längst schon erka[n]nt, si[n]d
z[u]m Behufe || d[e]r M[e]chan[i]k erdacht. So n[en]nt $\bar{m}[an]$ L[in]ie, etw[a]s
das d[urc]h d[ie] B[e]w[e]g[un]g e[ine]s mat.[er]iellen P[un]ct[es] b[e]schr[ie]-
b[en] w[er]d[en] ka[n]n, | e[ine]n e[ine]g[e]schlossen[en] Rau[m], e[ine]n Inb[e]-
g[r]iff v[on] P[un]ct[en] a.[us] d[e]r[en] jed[e]m k[eine] L[in]ie g[e]zog[en]
(k[ein] mat.[er]ieller P[un]ct | b[e]w[e]gt w[er]d[en] kann) ohne e[ine] g[e]wisse
g[e]g[e]b[ene] L[in]ie z[u] d[urc]hschneid[en] – u. s. w. u. s. w. – |

Diese B[e]m[e]rk[un]g hätte ich denn längst schon auch auf d[ie] *erst*[en] B[e]-
 g[ri]ffe d[e]r Geo-[m]etrie, n[a]hm[en]tl[i]ch die d[e]r *Entf*[ernun]g, R[i]ch-
 15 *t*[un]g, ... anw[e]nd[en] soll[en]. Hieraus w[ür]de ||' (so sch[ei]n)t es [mi]r w[e]-
 n[ig]st[en]s j[e]tzo) h[e]rvorg[e]gang[en] s.[ein], d[a]ß m[an] [un]t[e]r e[ine]r
Entf[ernun]g [ni]chts and[e]r[e]s v[e]rst[e]he, | als dasjen[i]ge V[e]rh[ä]lt[ni]ß
 zw.[ischen] 2 P[un]ct[en], das sie [mi]t einem and[e]r[e]n Syst.[em] 2er
 P[un]cte g[e]mein hab[en] kö[n]nen, d[e]ss[en] | e[in]z[e]lne P[un]cte [m]it je-
 n[en] in gar k[eine]r nothw[en]d[i]g[en] B[e]d[ingun]g st[e]h[e]n, g[an]z will-
 k[ü]rl[i]ch ang[e]nom[m]en w[er]d[en] kö[n]nen. | D[a]ß es ein solch[e]s V[er]-
 h[ä]lt[ni]ß g[e]be – [mu]ß [ni]cht d[ie] Geom[et]r[ie], sond.[ern] die M[et]a-
 physik o[der] d[ie] Erf[a]hr[un]g | lehr[en] (D[ie] Wiss[enschaft], d[ie] apriori
 u[nd] empir[isch], v.[on] dem, w[a]s ist; [ni]cht d[ie] M[at]h[em]a[tik], w[e]l-
 20 che d[ie] Wiss[enschaft] ist || v.[on] d[e]m, w[a]s seyn kann. Sie sagt [nu]r, das
 kö[n]ne seyn.) |

Uib[e]r die kürzeste L[in]ie zw.[ischen] 2 P[un]ct[en]. |

L[e]hrs[atz]. Es [mu]ß e[in]e L[in]ie zw.[ischen] 2 P[un]ct[en] g[e]b[en], d[ie] so
 kurz ist, d[a]ß es k[ein]e kürz[e]re gibt. | D[e]r B[e]u[ei]s ist mir noch unb[e]-
 kannt. |

a • b Dies[e]r S[atz] ab[e]r als erwies[en] ang[e]nom[m]en, läßt
 25 sich l[ei]cht zeig[en], d[a]ß es d[ie] g[e]r[ade] || sey. |

Denn *erstl*[ich], d[a]ß d[ie] g[e]r[ade] L[in]ie e[in]e solche sey, üb[e]r die es
 k[ein]e kürz[e]re gibt, f[ol]gt so: | W[enn] es m[e]hr[e]re d[e]rgl[eichen] L[i]-
 nien gibt, so [mu]ß e[in]e d[e]rs.[elben] d[ie] B[esch]a[ff.]h[ei]t hab[en],
 d[a]ß alle ihre St[ü]cke d[e]m G[an]z[en] | ähnl[i]ch si[n]d. Denn w[er]l d[ie]ß
 30 [un]b[e]schadet ihr[e]r Länge s.[ein] ka[n]n; so [mu]ß es [un]t[e]r all[en] mög-
 l[i]ch[en] | b.[ei] E[ine]r w[ir]kl[i]ch st[ät]t fi[n]d[en]. ||

Zweyt[en]s. Nur d[ie] g[e]r[ade] L[in]ie allein ist so kurz, d[a]ß k[ein]e and[e]re
 kürz[e]r ist. | Denn 1., es sey amnb e[in]e L[in]ie, w[e]lche so kurz ist, d[a]ß
 k[eine] and[e]re k[ü]rz[e]r; so hat ihre | Länge L irg[en]d ein b[e]st[imm]t[e]s
 V[e]rh[ä]lt[ni]ß z[u]r Länge d[e]r g.[eraden] L[in]ie d[urc]h a u[nd] b; d[ie]-
 35 s[e] | V[e]rh[ä]lt[ni]ß sey 1:n (wo n irg[en]d e[in]e
 Z[a]hl, v[er]h[ältni]ß = 1 ist.) |

2., Eb[en] dass[e]lbe V[e]rh[ä]lt[ni]ß [mu]ß [nun] zw.[ischen] d[e]r Länge l des
 35 Bog[en]s mn, u.[nd] s[eine]r Chord[e] mn st[ät]t || f[ol]gd[en]; od[e]r es [mu]ß
 auch 1:mn = 1:n seyn. Denn wäre d[ie]s[e] V[e]rh[ä]lt[ni]ß > so | kö[n]nte,

^f Ein vertikaler Strich vor den Zeilen 15–18.