IN DIESEM KAPITEL

Kapitel 1
Die wesentlichen mathematischen Grundlagen ...

Zur Berechnung elektrotechnischer Aufgaben müssen Sie kein Mathematiker sein, doch Sie werden sich beim Austüfteln der Lösungen leichter tun, wenn Sie einige wesentliche mathematische Gesetze kennen. Nachfolgend sind die für die Elektrotechnik wichtigen mathematischen Grundlagen zusammengefasst, sodass Sie beim Lösen der Aufgaben nachschauen können, wie die zugehörige Mathematik funktioniert.

Geradengleichung leicht gemacht

Häufig können Beziehungen zwischen physikalischen Größen durch Kurven dargestellt werden. Die *Gerade* ist eine besonders einfache Kurve. In Abbildung 1.1 (nächste Seite) ist die Hauptform einer Geraden dargestellt.

Für die in Abbildung 1.1 skizzierte Gerade gilt die Gleichung:

$$y = m \cdot x + b$$

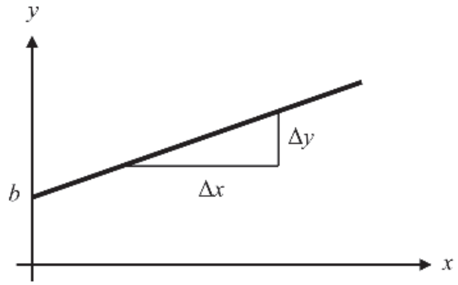

Abbildung 1.1: Hauptform der Geraden

Die Variablen x und y sind die Koordinaten eines beliebigen Geradenpunktes. Die Größe m ist deren Steigung. Die Größe b gibt an, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse schneidet. Für die Steigung m der Geraden gilt der Zusammenhang:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Der Logarithmus in seiner vollen Pracht

Auch der *Logarithmus* ist eine wichtige mathematische Grundlage für die Elektrotechnik. Eine Zahl der Form $\log_a b$ heißt Logarithmus und wird als »Logarithmus b zur Basis a« ausgesprochen. Der Logarithmus ist als eindeutige Lösung x zur Gleichung $a^x = b$ definiert. Damit gilt:

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

Weiterhin gilt für den Logarithmus eines Produkts die Regel:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

Der Logarithmus eines Produkts ist also gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren. Für den Logarithmus eines Bruches gilt eine entsprechende Regel:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Exponenten multiplizierten Logarithmus der Basis, also gilt:

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a u$$

Daraus folgt direkt, wie es um den Logarithmus einer Wurzel bestellt ist, nämlich:

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$$

Denken Sie daran, dass unter dem Wurzelzeichen keine negative Zahl stehen darf! Übrigens, den Logarithmus zur Basis e bezeichnen wir mit $\log_e b = \ln b$.

Eins, zwei oder drei – Dreiecke und ihre Winkel

In manchen Aufgaben müssen Sie Strecken berechnen, deren Längen und Winkel in Beziehung zueinander stehen. Dann spielen Dreiecke eine wichtige Rolle. Abbildung 1.2 zeigt ein einfaches *Dreieck* mit den Seitenlängen a, b und c sowie den Winkeln α, β und γ.

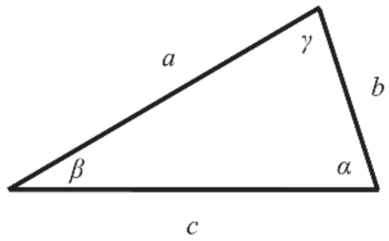

Abbildung 1.2: Einfaches Dreieck

Die *Winkelsumme* in einem beliebigen Dreieck ist 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Kennen Sie zwei Winkel des Dreiecks, können Sie den dritten Winkel berechnen.

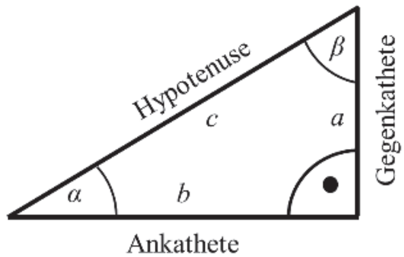

Abbildung 1.3: Rechtwinkliges Dreieck

Rechtwinklige Dreiecke wie in Abbildung 1.3 sind ganz besondere Dreiecke. Neben dem *rechten Winkel* von 90° besitzt ein rechtwinkliges Dreieck zwei weitere Winkel, die mit α und β gekennzeichnet sind. Nehmen Sie den Winkel α als Ausgangspunkt, so gelten folgende Bezeichnungen:

- Die *Gegenkathete a* ist die Seite, die dem Winkel α gegenüberliegt.
- Die *Ankathete b* ist die Seite, die an den Winkel α angrenzt.
- Die *Hypotenuse c* ist die lange Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt.

Für das rechtwinklige Dreieck sind die *trigonometrischen Funktionen* definiert:

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c};\ cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c};\ \tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$

Skalare und Vektoren

In der Elektrotechnik vorkommende Felder haben neben ihrer Stärke (das heißt ihrem Betrag) auch eine Richtung. Deshalb benötigen Sie Kenntnisse zu Skalaren und Vektoren.

Ein *Skalar* ist eine Größe, die einen *Betrag* besitzt. So ist der physikalische Druck eine skalare Größe mit einem Wert (zum Beispiel 1 bar). Auch die Zeit ist eine skalare Größe. Ein Vektor ist eine Größe, die einen Betrag und eine *Richtung* besitzt. Die Geschwindigkeit ist hingegen ein Vektor, weil ihr Betrag alleine nicht ausreicht, um ihre Wirkung zu beschreiben.

Eine skalare Größe wird mit kursiven Buchstaben gekennzeichnet (zum Beispiel p für den Druck). Vektorielle Größen werden wir in diesem Buch stets mit einem Pfeil über dem Buchstaben kennzeichnen (zum Beispiel $\vec{E}$ für das elektrische Feld).

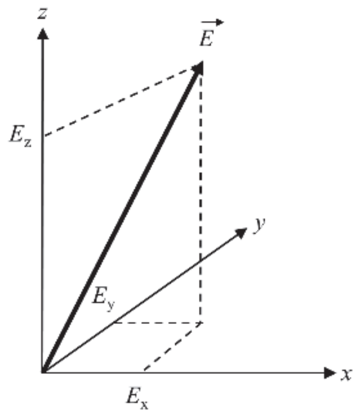

Abbildung 1.4: Vektor im kartesischen Koordinatensystem

Der Vektor $\vec{E}$, in Abbildung 1.4 als dicker Strich mit Pfeilspitze gezeichnet, ist durch seinen Betrag (Länge des Pfeiles) und seinen Richtungssinn charakterisiert. Um den Richtungssinn anzuzeigen, geben Sie an, wie weit der Vektor mit seinen Komponenten in die x-Richtung (E_x), wie weit in die y-Richtung (E_y) und wie weit in die z-Richtung (E_z) verläuft, um vom Anfang des Vektors bis zu dessen Spitze zu gelangen. Die *komponentenweise Darstellung* eines Vektors lautet damit:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Die Länge eines Vektors wird als *Betrag* bezeichnet. Diesen kennzeichnen Sie durch zwei senkrechte Striche und schreiben $|\vec{E}|$. Häufig schreiben Mathematiker dafür vereinfacht nur E, also ohne Pfeil über dem Formelzeichen und damit folglich auch ohne die zwei senkrechten Striche (Betragszeichen). Um den Betrag des Vektors $\vec{E}$ aus seinen Komponenten zu bestimmen, gilt die Beziehung

$$E = |\vec{E}| = \left|\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

Aus zwei mach eins: Vektoren addieren

Die *Addition von Vektoren* erfolgt rechnerisch, indem Sie die einzelnen Komponenten der Vektoren addieren:

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \iff \begin{pmatrix} E_{ges,x} \\ E_{ges,y} \\ E_{ges,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1,x} + E_{2,x} \\ E_{1,y} + E_{2,y} \\ E_{1,z} + E_{2,z} \end{pmatrix}$$

Die additive Überlagerung zweier elektrischer Felder $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ können Sie auch grafisch durchführen, wie in Abbildung 1.5 gezeigt.

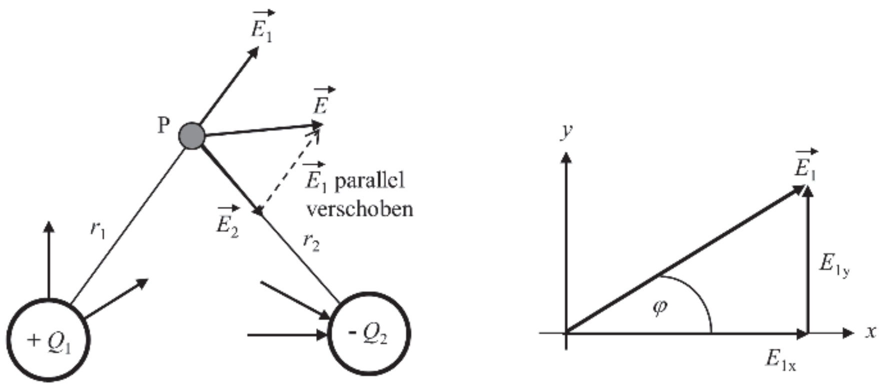

Abbildung 1.5: Addition und Länge von Vektoren

Ein von der Ladung Q_1 verursachtes elektrisches Feld und dessen Wirkung auf den Raumpunkt P wird durch den Vektor $\vec{E}_1$ in Abbildung 1.5 (linke Darstellung) aufgezeigt. Ebenso das von der Ladung Q_2 verursachte Feld durch den Vektor $\vec{E}_2$. Die Wirkung beider Felder auf den Raumpunkt P ist durch den Vektor $\vec{E}$ gegeben. Er ergibt sich aus der Addition der beiden Vektoren zu $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Um den resultierenden Summenvektor $\vec{E}$ grafisch zu bestimmen, wird der Vektor $\vec{E}_1$ parallel vom Punkt P aus entlang des Vektors $\vec{E}_2$ verschoben, bis er mit seinem Anfang an der Spitze des Vektors $\vec{E}_2$ angelangt ist. Dort wird er durch eine gestrichelte Linie eingezeichnet. Der Summenvektor $\vec{E}$ verläuft dann vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{E}_2$ zur Spitze des parallel verschobenen Vektors $\vec{E}_1$. Die Bestimmung des

Vektorbetrags ist ein Spezialfall der Vektoraddition, wie rechts in Abbildung 1.5 gezeigt. Sie können sich die Komponenten $E_{1,x}$ und $E_{1,y}$ als Vektoren $\vec{E}_{1x}$ und $\vec{E}_{1y}$ entlang der x- beziehungsweise y-Achse vorstellen. Der Vektor $\vec{E}_1$ ist dann die Summe dieser beiden senkrecht zueinander stehenden Teilvektoren.

Das Skalarprodukt verbindet Vektoren

Möchten Sie zwei Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ multiplizieren, dann können Sie dies über die Berechnung des *Skalarprodukts* tun, siehe Abbildung 1.6.

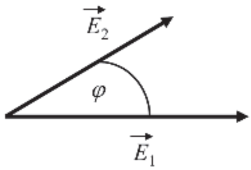

Abbildung 1.6: Skalarprodukt zweier Vektoren

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ ist definiert als:

$$S = \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{1,x} \\ E_{1,y} \\ E_{1,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{2,x} \\ E_{2,y} \\ E_{2,z} \end{pmatrix} = E_{1,x} \cdot E_{2,x} + E_{1,y} \cdot E_{2,y} + E_{1,z} \cdot E_{2,z}$$

Das Ergebnis ist eine Zahl, also ein Skalar. Sie können das Skalarprodukt auch über

$$S = \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = |\vec{E}_1| \cdot |\vec{E}_2| \cdot \cos\varphi$$

ermitteln. Darin ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$.

Das Vektorprodukt mit dem Kreuz

Das *Vektorprodukt* beziehungsweise *Kreuzprodukt* zweier Vektoren heißt so, weil es wiederum einen Vektor liefert, siehe Abbildung 1.7. Statt des Multiplikationszeichens »·« wird dafür ein kleines Kreuz »×« verwendet.

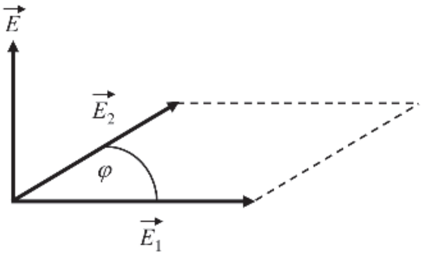

Abbildung 1.7: Vektorprodukt zweier Vektoren (räumlich dargestellt)

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ ergibt einen Vektor $\vec{E}$, dessen Betrag der Fläche entspricht, die von den beiden Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ aufgespannt wird. Der Vektor $\vec{E}$ steht dabei senkrecht auf den Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$.

Mathematisch ist das Vektorprodukt definiert als:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{1,x} \\ E_{1,y} \\ E_{1,z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{2,x} \\ E_{2,y} \\ E_{2,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1,y} \cdot E_{2,z} - E_{1,z} \cdot E_{2,y} \\ E_{1,z} \cdot E_{2,x} - E_{1,x} \cdot E_{2,z} \\ E_{1,x} \cdot E_{2,y} - E_{1,y} \cdot E_{2,x} \end{pmatrix}$$

Sie können den Betrag E des Vektors $\vec{E}$ auch über die Gleichung

$$E = |\vec{E}_1 \times \vec{E}_2| = |\vec{E}_1| \cdot |\vec{E}_2| \cdot \sin\varphi$$

ermitteln. Er entspricht der Fläche des von den beiden Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ aufgespannten Parallelogramms, das in Abbildung 1.7 dargestellt ist. Dabei ist φ wiederum der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$.

Lineare Gleichungssysteme und der Gauß'sche Algorithmus

Bei der Lösung von gemischten Schaltungen entstehen häufig *lineare Gleichungssysteme*. Im folgenden Beispiel lösen Sie ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten mithilfe des Gauß'schen Algorithmus. Mit diesem Eliminationsverfahren beseitigen Sie zunächst schrittweise alle Unbekannten, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten verbleibt. Diese lässt sich dann einfach bestimmen. Rückwirkend lösen Sie dann damit alle weiteren Unbekannten auf recht einfache Weise. Gegeben ist also:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 4 \\ -x + y + 3z &= -1 \\ 2x + 7y - z &= 11 \end{aligned}$$

In Matrixnotation lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ziel des Gauß'schen Algorithmus ist es, dass Sie das Gleichungssystem durch Umformen in die folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Damit können Sie die Lösung der Unbekannten direkt im Lösungsvektor ablesen. Folgende Umformungen sind dabei erlaubt:

- ✔ Vertauschen von Zeilen
- ✔ Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null
- ✔ Addition und Subtraktion von Zeilen

In unserem Beispiel ist es zunächst ratsam, dass Sie in der ersten Spalte der zweiten Zeile eine Null erzeugen. Hierzu addieren Sie zu Zeile 2 die Zeile 1 und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Um auch unten in der ersten Spalte eine Null zu erzeugen, addieren Sie zu Zeile 3 das (-2)-fache von Zeile 1 und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun gilt es, die zweite Spalte umzuformen. Um in der Mitte von Zeile 3 eine Null zu erhalten, addieren Sie zu Zeile 3 die mit -1 multiplizierte Zeile 2 und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt es, in der letzten Spalte in Zeile 1 eine Null zu erzeugen. Dies gelingt, wenn Sie die mit -1 multiplizierte Zeile 3 zur Zeile 1 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun fehlt noch eine Null in der letzten Spalte in Zeile 2. Dies gelingt, wenn Sie die mit 2 multiplizierte Zeile 3 zur Zeile 2 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um in der letzten Spalte von Zeile 3 eine Eins zu erzeugen, müssen Sie lediglich mit -1 durchmultiplizieren und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In der mittleren Spalte von Zeile 2 erzeugen Sie eine Eins, indem Sie Zeile 2 durch 3 dividieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluss eliminieren Sie die 2 in der mittleren Spalte von Zeile 1, indem Sie Zeile 2 mit -2 multiplizieren und zu Zeile 1 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist also:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

So macht Gleichungslösen doch Spaß, oder?

Ohne Schwingungen geht es nicht

Die wichtigsten trigonometrischen Funktionen sind die *Sinusfunktion* und die *Kosinusfunktion*. Mit ihrer Hilfe können Sie wiederkehrende Ereignisse wie den zeitlichen Verlauf einer Schwingung in einem elektrischen Schwingkreis beschreiben. Die allgemeine Form für eine (harmonische) Schwingung ist definiert mit

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

Darin ist A die *Amplitude* der Schwingungsfunktion $s(t)$. ω ist die *Kreisfrequenz* (in Winkeleinheiten pro Sekunde). Sie gibt an, wie schnell sich etwas dreht.

Verwechseln Sie nicht die Kreisfrequenz ω mit der *Frequenz f*! Die Kreisfrequenz ω gibt die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde an und wird in der Mechanik als Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Frequenz f gibt die Anzahl der Schwingungsperioden pro Sekunde an. Es gilt der Zusammenhang:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

In der praktischen Anwendung werden die Sinus- und Kosinusfunktion hauptsächlich als Funktion eines mit dem Bogenmaß x bezeichneten Winkels und in der Schreibweise $y = \sin x$ dargestellt.

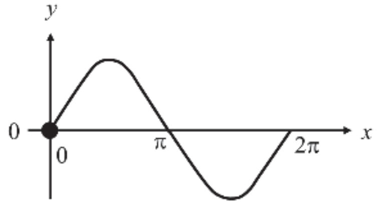

Abbildung 1.8: Sinusfunktion

In Abbildung 1.8 ist eine Sinusfunktion in dieser Weise aufgezeigt. Neben dem typischen Verlauf ist für Sie wichtig, charakteristische Funktionswerte bei unterschiedlichen Winkeln zu kennen. Auch werden Ihnen folgende trigonometrische Beziehungen von Nutzen sein:

$$\cos\ x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\ x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos\ 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos\ 2x)$$

Für die Ableitung gibt es keine Umleitung

Ableitungen nach der Zeit t (auch *Differenziationen* genannt) tauchen in der Elektrotechnik häufig auf. Doch keine Angst! Am Beispiel des Kondensators werden Sie sehen, wie Ihnen die zeitliche Änderung einer Größe Auskunft zu wichtigen Fragestellungen gibt. In Abbildung 1.9 erkennen Sie, dass die Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit der Zeit zunimmt.

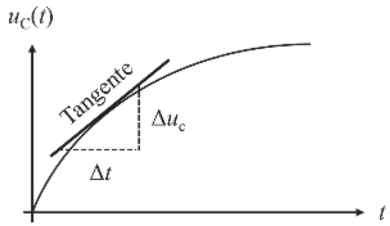

Abbildung 1.9: Ableitungen und die Tangente

Nun können Sie die Änderung der Kondensatorspannung Δu_C im Verhältnis zur Veränderung der Zeit Δt angeben. Ist die Änderung der Zeit größer als die Änderung der Spannung ($\Delta t > \Delta u_C$), wird der Verlauf der Spannung mit der Zeit flacher. Gilt andererseits $\Delta u_C > \Delta t$, wird der Verlauf der Kennlinie steiler. Ein mathematisches Maß für die Steilheit ist die *Tangente* am Verlauf der Kondensatorspannung. Die Steigung m_T der Tangente ist gegeben durch:

$$m_T \approx \frac{\Delta u_C}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{du_C(t)}{dt}$$

Im Grenzfall sehr kleiner Zeiträume Δt entspricht die Tangentensteigung der Ableitung $\dot{u}_C(t)$ der Kondensatorspannung nach der Zeit.

Ableitungen nach der Zeit werden mit einem Punkt über der betreffenden Funktion geschrieben, das heißt $\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$. Ableitungen nach anderen Variablen werden häufig durch einen Apostroph gekennzeichnet, zum Beispiel $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Ein weiteres Beispiel für Ableitungen ist die Beschleunigung a, die als erste Ableitung aus der Geschwindigkeit v nach der Zeit t hervorgeht:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Vielleicht erinnern Sie sich aus der Schule, dass die Geschwindigkeit v die zeitliche Änderung des Ortes x nach der Zeit t ist. Auch hier gilt:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Setzen Sie diese Gleichung in die Beschleunigung a ein, erhalten Sie:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

Die Beschleunigung a ist also die zweite Ableitung des Ortes x nach der Zeit t.

Für die Elektrotechnik wichtige Ableitungen:

- ✔ $\frac{d}{dx}c = 0$ (Konstanten fallen bei der Differenziation weg)
- ✔ $\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$
- ✔ $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- ✔ $\frac{d}{dx}\cos\ x = -\sin x$

Wichtige Ableitungsregeln

- ✔ $f'[g(x)] = f'(g) \cdot g'(x)$ oder $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ (Kettenregel)
- ✔ $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ (Produktregel)

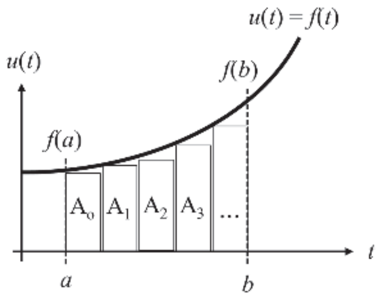

Abbildung 1.10: Integration und Flächenintegral

Auch an der Integration führt kein Weg vorbei

Aufgabe der Integration ist die Berechnung der Fläche unter einer beliebigen Funktion. In Abbildung 1.10 ist der Verlauf einer Spannung $u(t)$ aufgezeigt. Um die Fläche im Intervall $[a,b]$ zwischen der Funktion und der t-Achse zu berechnen, benötigen Sie das *Flächenintegral*:

$$A = \int_a^b f(t) \cdot dt$$

Anschaulich ist die Integration nichts anderes, als würden Sie gleichmäßige Kästchen zwischen dem Funktionsverlauf $u(t)$ und der t-Achse einzeichnen; wie die Kästchen $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$ in Abbildung 1.10. Summieren Sie die Flächen aller Kästchen auf, erhalten Sie annähernd die Fläche zwischen der Funktion und der t-Achse. Je kleiner Sie die Breite der Kästchen machen, desto genauer wird die Flächenberechnung.

$F(x)$ ist eine *Stammfunktion* von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. So wird der Zusammenhang zwischen der Ableitung und der Integration dargestellt:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$$

Das dargestellte Integrationszeichen zeigt ein sogenanntes unbestimmtes Integral.

Beim *unbestimmten Integral* werden keine Integrationsgrenzen angegeben. Die Integrationskonstante c ist über Anfangs- oder Randbedingungen zu bestimmen.

Das *bestimmte Integral* ist gegeben durch:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

Es ergibt sich aus der zugehörigen Stammfunktion, die am Integrationsanfang, gekennzeichnet durch die untere Integrationsgrenze a, beziehungsweise -ende, gekennzeichnet durch die obere Integrationsgrenze b, ausgewertet wird.

Einige nützliche Funktionen und ihre Stammfunktionen:

$$\int c \cdot dx = c \cdot x$$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x|$$

$$\int \sin ax \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax$$

$$\int \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax$$

Lösung einer Differenzialgleichung erster Ordnung

In der Elektrotechnik unterliegen physikalische Größen meist dynamischen Veränderungen. Am Beispiel der Differenzialgleichung für die Spannung $u_C(t)$ am Kondensator zeige ich Ihnen, was es damit auf sich hat. Gegeben ist die Gleichung:

$$R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) - U_q = 0$$

Mit dieser Gleichung haben Sie eine *Differenzialgleichung erster Ordnung* für die gesuchte Kondensatorspannung $u_C(t)$ vorliegen. Der Parameter C steht für die Kapazität des Kondensators, R für den Ohm'schen Widerstand und U_q ist die Quellenspannung. Zur Lösung dieser Differenzialgleichung dividieren Sie zunächst beidseitig durch $R \cdot C$, damit Sie den Ableitungsterm $\frac{d}{dt} u_C(t)$ separieren, und erhalten:

$$\frac{d}{dt} u_C(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_C(t) - \frac{1}{R \cdot C} \cdot U_q = 0$$

Nun bringen Sie U_q und $u_C(t)$ auf die rechte Gleichungsseite und fassen gemeinsame Faktoren zusammen:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_q - u_C(t)}{R \cdot C}$$

Durch *Trennung der Veränderlichen* stellen Sie jetzt die Gleichung so um, dass $du_C(t)$ und dt auf verschiedenen Gleichungsseiten stehen:

$$\frac{du_C(t)}{U_q - u_C(t)} = \frac{dt}{R \cdot C}$$

Sie sehen, damit stehen alle Komponenten mit der Kondensatorspannung auf der linken Gleichungsseite. Jetzt ersetzen Sie durch *Substitution* zuerst den Ausdruck

$$U_q - u_C(t) = x$$

und über eine beidseitige Differenziation dieses Ausdrucks ersetzen Sie noch:

$$-du_C(t) = dx$$

Bedenken Sie bei der letzten Operation, dass die Quellenspannung U_q nicht zeitabhängig ist, beim Ableiten als Konstante also wegfällt. Durch Ersetzen (Substitution) dieser beiden Terme können Sie die Differenzialgleichung jetzt vereinfachen zu:

$$\frac{-dx}{x} = \frac{dt}{R \cdot C}$$

Beidseitige Integration bringt Sie dann der Lösung ein großes Stück näher:

$$\int \frac{-dx}{x} = \int \frac{dt}{R \cdot C}$$

Die linke Gleichungsseite lässt sich durch ein Standardintegral lösen und Sie erhalten:

$$\ln|x| = -\int \frac{dt}{R \cdot C}$$

Die rechte Gleichungsseite ist ebenfalls leicht zu integrieren:

$$\ln x = -\frac{t}{R \cdot C} + K$$

Das Betragszeichen bei $\ln|x|$ können Sie weglassen, solange Sie $x > 0$ voraussetzen. Die Integrationskonstante K können Sie so wählen, dass $K = \ln k$ gilt (dabei ist k ebenfalls eine Konstante). Dies ist ein mathematischer Trick, um die Lösung zu vereinfachen. Mithilfe des Logarithmusgesetzes erhalten Sie damit:

$$\ln \frac{x}{k} = -\frac{t}{R \cdot C}$$

Jetzt kehren Sie durch *Rücksubstitution* zur Ausgangsgleichung zurück, indem Sie

$$x = U_\mathrm{q} - u_\mathrm{C}(t)$$

wieder ersetzen, und erhalten:

$$\ln \frac{U_\mathrm{q} - u_\mathrm{C}(t)}{k} = -\frac{t}{R \cdot C}$$

Den logarithmischen Ausdruck lösen Sie auf, indem Sie die erhaltene Gleichung beidseitig mit der e-Funktion multiplizieren. Für die linke Seite gilt dabei:

$$e^{\ln x} = x$$

Multiplizieren Sie beidseitig noch mit k, erhalten Sie schließlich:

$$U_\mathrm{q} - u_\mathrm{C}(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Die Integrationskonstante k ergibt sich aus der Anfangsbedingung $u_C(t = 0) = 0$ zu $k = U_\mathrm{q}$. Daraus erhalten Sie dann letztlich die gesuchte Kondensatorspannung:

$$u_\mathrm{C}(t) = U_\mathrm{q} - U_\mathrm{q} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U_\mathrm{q} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

Abbildung 1.11 zeigt die grafische Darstellung der Lösung. Im Prinzip können Sie jede Differenzialgleichung erster Ordnung auf diese Weise lösen. Für Differenzialgleichungen höherer Ordnung schlagen Sie in der Fachliteratur nach.

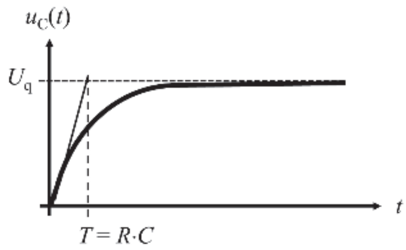

Abbildung 1.11: Zeitverlauf einer Differenzialgleichung erster Ordnung

Das Wunder der komplexen Rechnung

Komplexe Zahlen brauchen Sie, damit Sie die Aufgaben in der Wechselstromtechnik einfacher und komfortabel berechnen können.

Zeigerdarstellung in der Gauß'schen Zahlenebene

In der höheren Mathematik würde die Lösung der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

zum Ziehen der Wurzel aus der Zahl -1 führen:

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm\mathrm{i}$$

Dies ist im reellen Zahlenbereich jedoch nicht erlaubt, weshalb dieser um neue Zahlen erweitert werden muss, mit deren Hilfe diese Gleichung lösbar wird. Dies führt Sie zur Welt der *komplexen Zahlen*. Das Symbol i wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Eine komplexe Zahl ist als die additive Verknüpfung einer reellen Zahl R mit einer sogenannten »imaginären« Zahl $\mathrm{i} \cdot X$ (mit X als reale Zahl) definiert und es gilt:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{i} \cdot X$$

Wie Sie sehen, wird eine komplexe Zahl $\underline{Z}$ durch Unterstreichen gekennzeichnet. R ist der *Realteil* und X der *Imaginärteil*.

Wegen der Verwechslungsgefahr mit dem Strom $i(t)$ wird in der Elektrotechnik für die imaginäre Einheit ein j statt eines i verwendet. Eine komplexe Zahl sieht dann so aus:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$$

Die komplexe Zahl $\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$ wird in der Gauß'schen Zahlenebene durch einen »Punkt« repräsentiert und lässt sich grafisch darstellen, wie Sie es in Abbildung 1.12 sehen. Demnach kann die komplexe Zahl auch als Zeiger, der durch den Koordinatenursprung gehend auf den Punkt $\underline{Z}$ zeigt, aufgefasst werden.

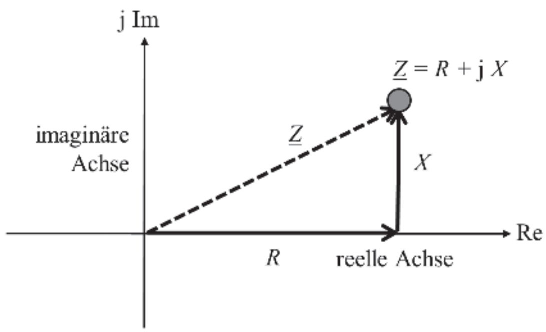

Abbildung 1.12: Darstellung einer komplexen Zahl

Für komplexe Zahlen gelten folgende Regeln:

- ✔ $\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X$ Komplexe Zahl
- ✔ $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ Betrag der komplexen Zahl
- ✔ $\underline{Z}^* = R - \mathrm{j} \cdot X$ Konjugiert komplexe Zahl
- ✔ $R = Z \cdot \cos\ \varphi$ Realteil
- ✔ $X = Z \cdot \sin\ \varphi$ Imaginärteil
- ✔ $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$ Winkel oder Phase

Die konjugiert komplexe Zahl ist ein Zeiger, der durch Spiegelung des Zeigers $\underline{Z}$ an der x-Achse hervorgeht, wie dies Abbildung 1.13 zeigt.

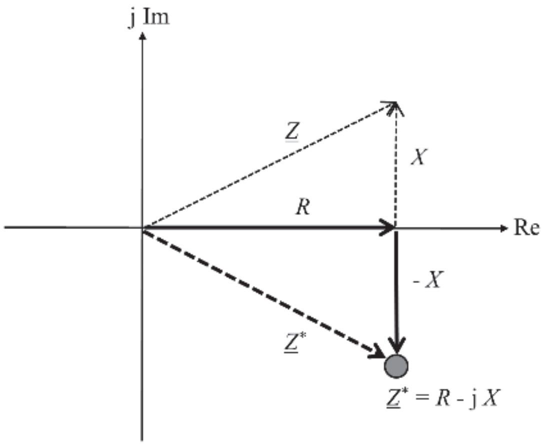

Abbildung 1.13: Konjugiert komplexe Zahl

Aus der Normalform der komplexen Zahl lässt sich die *trigonometrische Form* ableiten:

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j} \cdot X = Z \cdot \cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot Z \cdot \sin\ \varphi = Z \cdot (\cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi)$$

Die Exponentialform erhalten Sie mithilfe der *Euler'schen Gleichung*:

$$e^{\mathrm{j} \cdot \varphi} = \cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi$$

Demnach lässt sich eine komplexe Zahl $\underline{Z}$ darstellen als:

$$\underline{Z} = Z \cdot (\cos\ \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi) = Z \cdot e^{\mathrm{j} \cdot \varphi}$$

Die zugehörige konjugiert komplexe Zahl lautet:

$$\underline{Z}^* = Z \cdot (\cos\ \varphi - \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi) = Z \cdot e^{-\mathrm{j} \cdot \varphi}$$

Darin ist $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ der Betrag und $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$ der Winkel der komplexen Zahl. Abbildung 1.14 zeigt diese Zusammenhänge in der Gauß'schen Zahlenebene.

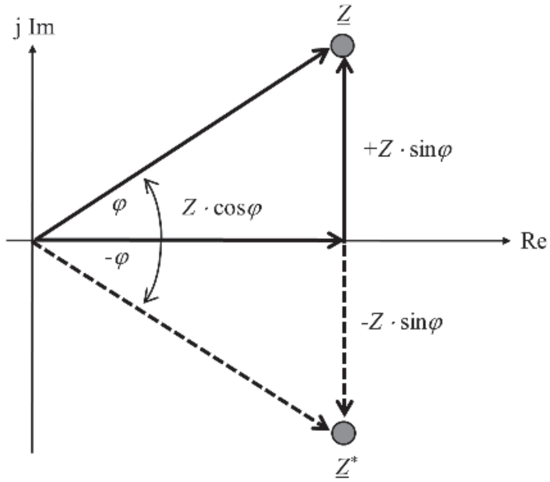

Abbildung 1.14: Komplexe Zahl in Polarkoordinaten

Alle komplexen Zahlen $\underline{Z}$ mit $|\underline{Z}| = 1$ liegen auf einem Kreis mit Radius 1.

Abbildung 1.15 zeigt, was geschieht, wenn ein komplexer Zeiger mit dem Betrag 1 in verschiedenen Winkeln φ gedreht wird:

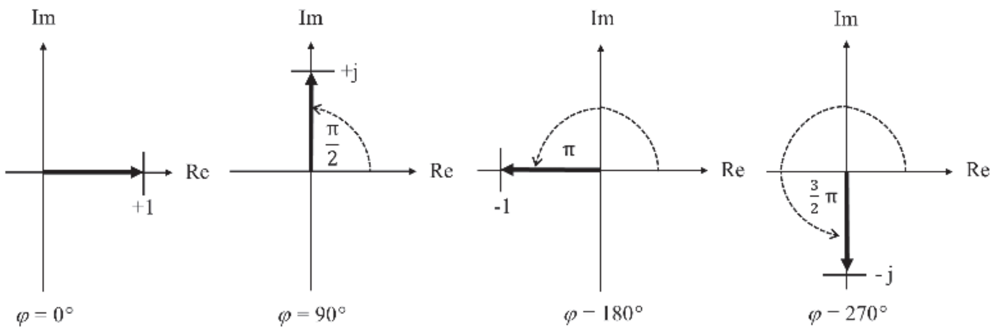

Abbildung 1.15: Wirkung der Drehung des Zeigers

- ✔ $\varphi = 0°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 0 + \mathrm{j} \cdot \sin\ 0) = 1 + 0 = 1$
- ✔ $\varphi = 90°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 90 + \mathrm{j} \cdot \sin\ 90) = 0 + \mathrm{j} = \mathrm{j}$
- ✔ $\varphi = 180°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 180 + \mathrm{j} \cdot \sin\ 180) = -1 + 0 = -1$
- ✔ $\varphi = 270°$ ergibt $\underline{Z} = 1 \cdot (\cos\ 270 + \mathrm{j} \cdot \sin\ 270) = 0 - \mathrm{j} = -\mathrm{j}$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Für zwei komplexe Zahlen

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j} \cdot X_1 = Z_1 \cdot e^{\mathrm{j} \cdot \varphi_1}$$

und

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j} \cdot X_2 = Z_2 \cdot e^{\mathrm{j} \cdot \varphi_2}$$

gelten die folgenden Additions- und Subtraktionsregeln:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (R_1 + R_2) + \mathrm{j} \cdot (X_1 + X_2)$$
$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (R_1 - R_2) + \mathrm{j} \cdot (X_1 - X_2)$$

Addition und Subtraktion werden komponentenweise durchgeführt. Gleiches gilt bei der trigonometrischen Form mit

$$\begin{aligned}\underline{Z}_0 &= \underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_2 = Z_1 \cdot (\cos\ \varphi_1 + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi_1) \pm Z_2 \cdot (\cos\ \varphi_2 + \mathrm{j} \cdot \sin\ \varphi_2)\\ &= (Z_1 \cdot \cos\ \varphi_1 \pm Z_2 \cdot \cos\ \varphi_2) + \mathrm{j} \cdot (Z_1 \cdot \sin\ \varphi_1 \pm Z_2 \cdot \sin\ \varphi_2).\end{aligned}$$

Für die Summe konjugiert komplexer Zahlen gilt:

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z} + \underline{Z}^* = (R + \mathrm{j} \cdot X) + (R - \mathrm{j} \cdot X) = 2 \cdot R + \mathrm{j} \cdot X - \mathrm{j} \cdot X = 2 \cdot R$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z} + \underline{Z}^*)$$

Aus der Differenz konjugiert komplexer Zahlen folgt entsprechend:

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z} - \underline{Z}^*)$$

Diese Gleichungen, angewandt auf die trigonometrische Darstellung der komplexen Zahl, liefert zwei für die Praxis sehr wichtige Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot (e^{\mathrm{j} \cdot \varphi} + e^{-\mathrm{j} \cdot \varphi})$$
$$\mathrm{j} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot (e^{\mathrm{j} \cdot \varphi} - e^{-\mathrm{j} \cdot \varphi})$$

Kehrwert einer komplexen Zahl

Der Kehrwert einer komplexen Zahl ist:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j} \cdot X} = \underline{Y}$$

Durch Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl, Ausmultiplizieren und Umsortieren ergibt sich für den Kehrwert die Formel:

$$\underline{Y} = \frac{R - \mathrm{j} \cdot X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \mathrm{j} \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}$$

In Exponentialform gilt:

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z \cdot e^{j \cdot \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \cdot \varphi}$$

Der Winkel des Kehrwerts ist also gleich dem negativen Ausgangswinkel.

Multiplikation und Division

In der Polarform ist die Multiplikation zweier komplexer Zahlen definiert als:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = Z_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1} \cdot Z_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2} = Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Mit anderen Worten: Beträge werden multipliziert und Phasen werden addiert. In trigonometrischer Form sieht das wie folgt aus:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = Z_1 \cdot Z_2 \cdot \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}$$

Für die Division gilt analog:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}}{Z_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Mit anderen Worten: Beträge werden dividiert und Phasen werden subtrahiert.

Potenzieren und Radizieren

Auch beim Potenzieren starten Sie am besten mit der Exponentialdarstellung:

$$\underline{Z}^n = (Z \cdot e^{j \cdot \varphi})^n = Z^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi}$$

$$\underline{Z}^n = Z^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

Für das Wurzelziehen gilt entsprechend:

$$\underline{Z}^{1/n} = \sqrt[n]{\underline{Z}} = Z^{1/n} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\varphi}{n}\right)} = \sqrt[n]{Z} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\varphi}{n}\right)}$$

Differenzieren und Integrieren von Schwingungsfunktionen

Für die Ableitung einer komplexen zeitabhängigen Größe der Form

$$\underline{u} = \underline{\hat{u}} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

nach der Zeit *t* gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\hat{u}} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot j \cdot \omega = j \cdot \omega \cdot \underline{u}$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Amplitude $\underline{\hat{u}}$ konstant bezüglich t ist. Die Differenziation einer »komplexen Schwingung« führt also zu einer Multiplikation mit $\mathrm{j} \cdot \omega$. In der Gauß'schen Zahlenebene bedeutet dies anschaulich, dass $\underline{u}$ mit der reellen Größe ω multipliziert und um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird. Für die unbestimmte Integration der oben eingeführten Größe finden Sie ganz analog:

$$\int \underline{u} \cdot dt = -\mathrm{j} \cdot \frac{\underline{u}}{\omega} = \frac{\underline{u}}{\mathrm{j} \cdot \omega}$$

Die Integration führt also zu einer Division durch $\mathrm{j} \cdot \omega$. In der Gauß'schen Zahlenebene bedeutet dies anschaulich, dass $\underline{u}$ durch die reelle Größe ω dividiert und um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ gedreht wird.

Zu guter Letzt der Kosinussatz

An dieser Stelle gilt es noch, einen für Sie wichtigen Satz zur Dreiecksberechnung anzufügen, den Sie in den folgenden Aufgaben brauchen; und zwar immer dann, wenn Sie kein rechtwinkliges Dreieck vorliegen haben. Für ein beliebiges Dreieck, wie dies in Abbildung 1.16 dargestellt ist, können Sie den Sinus- wie auch den Kosinussatz anwenden, um die Seitenlängen oder einen der angegebenen Winkel zu berechnen.

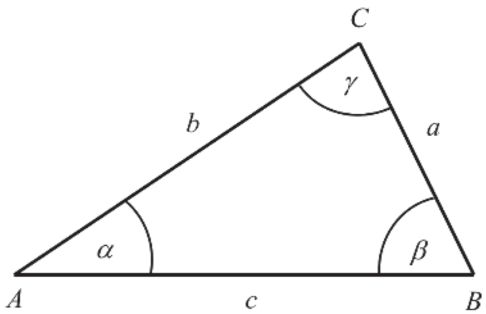

Abbildung 1.16: Winkelberechnung mit dem Kosinussatz

Für die Winkelsumme in diesem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Für den Sinussatz gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \ \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \ \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Und letztlich für den Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Im rechtwinkligen Dreieck geht der Kosinussatz über in den Satz von Pythagoras. Diese beiden Sätze gelten für beliebige, spitzwinklige oder stumpfwinklige Dreiecke.