Ein flächendeckender Ansatz für das Flächenproblem

1

In diesem Kapitel...

- Die Fläche von Formen mit Hilfe klassischer und analytischer Geometrie messen
- Die Integration als Lösung für das Flächenproblem verstehen
- Eine Formel für die Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung von Riemann-Summen entwickeln
- Die Integration auf die reale Welt anwenden
- Folgen und Reihen betrachten
- Einen Ausblick auf die fortgeschrittenere Mathematik wagen

COPYRIGHTED MATERIAL

Seit Tausenden von Jahren messen die Menschen die Flächen von Formen. Eine praktische Anwendung dieses Könnens ist es, die Fläche eines Grundstücks zu messen. Es ist ganz einfach, Quadrate oder Rechtecke zu messen, deshalb wird Land häufig in diese Formen aufgeteilt.

Die Flächenbestimmung für ein Dreieck, einen Kreis oder ein Polygon ist ebenfalls einfach, aber sobald die Formen unregelmäßiger werden, wird es auch schwieriger, ihre Fläche zu messen. Die Griechen waren zwar mit Kegelschnitten vertraut – Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln –, aber es war ihnen nicht möglich, Formen mit auf diesen Figuren basierenden Kanten zuverlässig zu messen.

Die von Descartes erfundene analytische Geometrie – die Betrachtung von Linien und Kurven als in einem Graphen dargestellte Gleichungen – brachte enorme Einsichten in die Beziehungen zwischen den Kegelschnitten. Aber selbst die analytische Geometrie konnte die Frage nicht beantworten, wie die Fläche innerhalb einer Form gemessen wird, die irgendwo von einer Kurve begrenzt wird.

In diesem Kapitel zeige ich Ihnen, wie sich die *Integralrechnung* (kurz *Integration*) aus den Versuchen entwickelt hat, diese grundlegende Frage zu beantworten, das so genannte *Flächenproblem*. Nach dieser Einführung in die bestimmten Integrale können Sie die Besonderheit bei der Flächenmessung angehen. Der Schlüssel für die Annäherung einer Fläche, die Sie nicht messen können, ist die Zerlegung dieser Fläche in Formen, die Sie messen können (beispielsweise Rechtecke).

Diese Zerlegung von Flächen ist die Grundlage für die *Riemann-Summe*, die Ihnen ermöglicht, eine Folge immer weiterer Annäherungen für eine bestimmte Fläche innerhalb einer Grenze vorzunehmen, bis Sie die genaue Fläche erhalten. Ich werde Sie hier durch einen schrittweisen Prozess führen, der Ihnen genau zeigt, wie die formale Definition für das bestimmte Integral ganz intuitiv entsteht, wenn Sie beginnen, unregelmäßige Formen in hübsche, unkomplizierte Rechtecke zu zerlegen.

Es geht um die Fläche!

Es ist ganz einfach, die Fläche einiger grundlegender Formen zu bestimmen: Quadrate, Rechtecke, Dreiecke oder Kreise. Aber eine zuverlässige Methode für die Bestimmung der Fläche von Formen, die exotischere Kurven beinhalten, hat sich den Mathematikern über Jahrhunderte verschlossen. Ich werde Ihnen die Grundlagen vermitteln, wie dieses Problem, das so genannte Flächenproblem, unter Verwendung eines neuen Konzepts definiert wird, nämlich des bestimmten Integrals.

Das *bestimmte Integral* stellt die Fläche auf einem Graphen dar, die begrenzt ist durch eine Funktion, die x-Achse und zwei vertikale Geraden, die so genannten *Integrationsgrenzen*. Ohne zu tief in die Rechenmethoden der Integration einzutauchen, werde ich Ihnen hier die Grundlagen vermitteln, wie das Flächenproblem formal unter Verwendung des bestimmten Integrals gelöst werden kann.

Vergleich der klassischen und der analytischen Geometrie

In der klassischen Geometrie gibt es eine Vielzahl einfacher Formeln, um die Fläche verschiedener Formen zu berechnen. Abbildung 1.1 zeigt die Formeln für die Fläche eines Rechtecks, eines Dreiecks und eines Kreises.

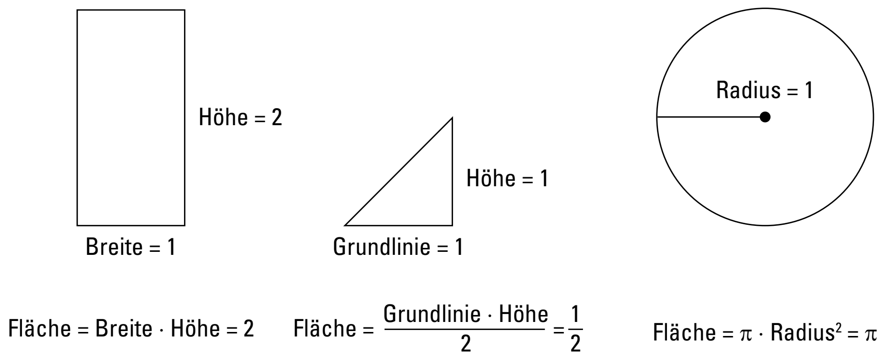


Abbildung 1.1: Formeln für die Fläche eines Rechtecks, eines Dreiecks und eines Kreises.

Die Weisheit des Altertums

Lange vor der Erfindung der Analysis verwendete der alte griechische Mathematiker Archimedes seine *Ausschöpfungsmethode*, um die genaue Fläche eines Parabelsegments zu berechnen. Indische Mathematiker entwickelten auch *Quadratur*-Methoden für einige schwierige Formen, bevor die Europäer im 17. Jahrhundert mit ihren Forschungen begannen.

Diese Methoden setzten einige Kenntnisse aus der Analysis voraus. Aber vor der Analysis gab es keinen Denkansatz, wie man die Fläche unter beliebigen Kurven messen konnte.

Wenn Sie sich der analytischen Geometrie zuwenden – also der Geometrie im Kartesischen Koordinatensystem –, erhalten Sie neue Einblicke in die klassische Geometrie. Die analytische Geometrie schafft eine Verbindung zwischen der Algebra und der klassischen Geometrie. Sie werden feststellen, dass Kreise, Quadrate und Dreiecke – und viele andere Formen – durch Gleichungen oder Gleichungsmengen dargestellt werden können, wie in Abbildung 1.2 gezeigt.

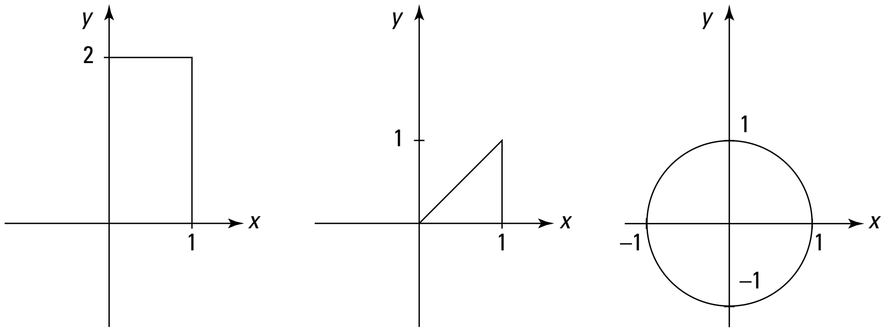


Abbildung 1.2: Ein Rechteck, ein Dreieck und ein Kreis, die in den Graphen eingebettet sind.

Sie können weiterhin die guten alten Methoden der klassischen Geometrie anwenden, um die Flächen dieser Figuren zu bestimmen. Aber die analytische Geometrie eröffnet Ihnen mehr Möglichkeiten – und mehr Probleme.

Ein neuer Studienbereich

Abbildung 1.3 zeigt drei Kurven, die mit Hilfe der analytischen Geometrie sehr viel einfacher zu untersuchen sind als mit der klassischen Geometrie: eine Parabel, eine Ellipse und eine Hyperbel.

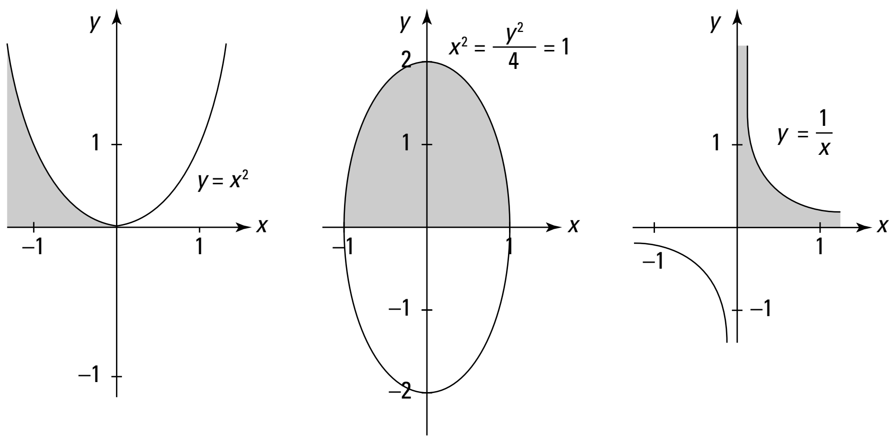


Abbildung 1.3: Eine Parabel, eine Ellipse und eine Hyperbel im Graphen.

Die analytische Geometrie verdeutlicht sehr genau die Verbindung zwischen algebraischen Gleichungen und den Kurven auf einem Graphen. Allerdings teilt uns die analytische Geometrie nichts darüber mit, wie man die in Abbildung 1.3 grau unterlegt dargestellten Flächen berechnet.

Vergleichbar dazu zeigt Abbildung 1.4 drei weitere Gleichungen im Koordinatensystem: eine Sinuskurve, eine Exponentialkurve und eine logarithmische Kurve.

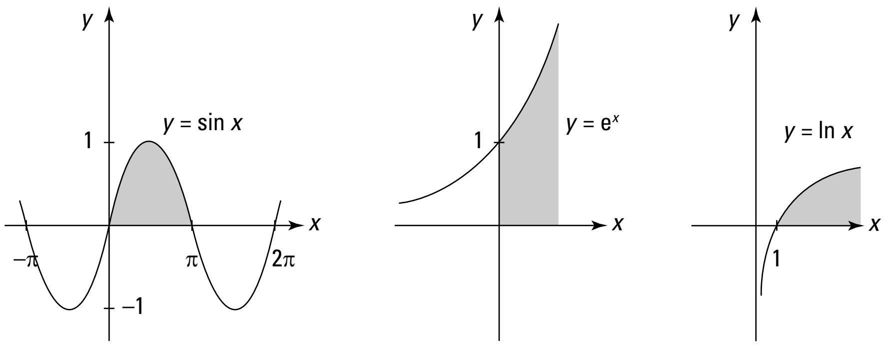


Abbildung 1.4: Eine Sinuskurve, eine Exponentialkurve und eine logarithmische Kurve im Koordinatensystem.

Auch hier schafft die analytische Geometrie eine Verbindung zwischen diesen Gleichungen und wie sie als Kurven im Koordinatensystem dargestellt werden. Sie erkennen daran jedoch nicht, wie Sie die grau unterlegten Flächen in Abbildung 1.4 berechnen können.

Verallgemeinerung des Flächenproblems

Beachten Sie, dass ich in allen Beispielen aus dem vorigen Abschnitt alle Flächen auf ganz besondere Weise grau unterlegt habe. Oben ist die Fläche durch eine Funktion begrenzt. Unten ist sie durch die x-Achse begrenzt. Und links und rechts ist die Fläche durch vertikale Geraden begrenzt (in einigen Fällen bemerkt man diese Geraden jedoch nicht, weil die Funktion an dieser Stelle die x-Achse schneidet).

Sie können dieses Problem verallgemeinern, um beliebige stetige Funktionen zu untersuchen. Um dies zu verdeutlichen, zeigt der grau unterlegte Bereich in Abbildung 1.5 die Fläche unter der Funktion $f(x)$ zwischen den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$.

Beim Flächenproblem geht es immer darum, die Fläche unterhalb einer stetigen Funktion zwischen zwei konstanten Werten von x zu bestimmen, den so genannten *Integrationsgrenzen*, normalerweise als a und b bezeichnet.

Die Integrationsgrenzen sind keine Grenzwerte in dem Sinne, wie Sie sie aus der Analysis I kennen. Es handelt sich dabei einfach um Konstanten, die die Breite des Bereichs vorgeben, den Sie messen wollen.

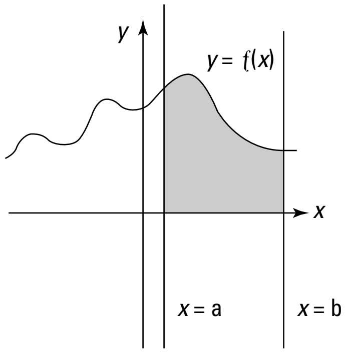


Abbildung 1.5: Ein typisches Flächenproblem.

In gewisser Hinsicht unterscheidet sich diese Formel für den grau unterlegten Bereich nicht wesentlich von derjenigen, die ich früher in diesem Kapitel gezeigt habe. Es ist einfach nur eine Formel, das heißt, wenn Sie die richtigen Zahlen einsetzen und dann rechnen, erhalten Sie das richtige Ergebnis.

Der Haken liegt jedoch im Wort *rechnen*. Wie genau rechnen Sie unter Verwendung dieses neuen Symbols, $\int$? Wie Sie vielleicht schon ahnen, ist die Antwort genau der Titel dieses Buches: *Analysis*. Genauer gesagt: *Integralrechnung* oder *Integration*.

In der Regel geht es in den Kursen zu Analysis II bei Ihnen an der Schule oder Universität um die Integration – die Lehre, wie das Flächenproblem zu lösen ist. Wenn Sie irgendwann Probleme mit Analysis II haben (und ehrlich gesagt, irgendwann wird das unvermeidbar sein), dann versuchen Sie, sich an die zentrale Frage zu erinnern: »Wie hilft mir das, was ich gerade mache, die Fläche unter einer Funktion zu finden?«

Das bestimmte Integral liefert bestimmte Antworten

Vielleicht sind Sie überrascht, dass Sie schon jahrelang wussten, wie bestimmte Funktionen integriert werden, ohne sie überhaupt zu kennen. (Es kommt tatsächlich vor, dass man etwas kann, ohne zu wissen, dass man es kann.)

Angenommen, Sie wollen die rechteckige Fläche unter der Funktion $y = 2$ zwischen $x = 1$ und $x = 4$ bestimmen, wie in Abbildung 1.6 gezeigt.

Dies ist einfach ein Rechteck mit einer Länge von 3 und einer Höhe von 2, deshalb ist die Fläche offensichtlich gleich 6. Aber dies ist gleichzeitig ein Flächenproblem, das als Integration ausgedrückt werden kann:

$$\text{Fläche} = \int_1^4 2dx = 6$$

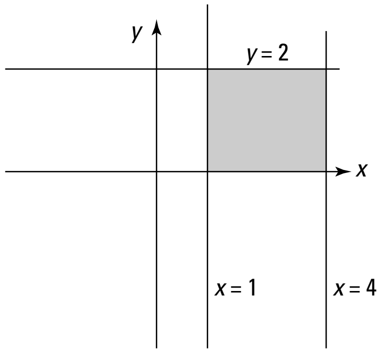


Abbildung 1.6: Die rechteckige Fläche unter der Funktion y = 2 zwischen x = 1 und x = 4.

Wie Sie sehen, integriere ich hier die Funktion $f(x) = 2$. Die Integrationsgrenzen sind 1 und 4 (beachten Sie, dass der größere Wert jeweils oben steht). Sie wissen bereits, dass die Fläche gleich 6 ist, Sie können dieses Analysisproblem also lösen, ohne auf irgendwelche komplizierten Methoden zurückzugreifen. Dennoch führen Sie hier eine *Integration* durch, klopfen Sie sich also auf die Schulter – stellvertretend für mich.

Der folgende Ausdruck wird als bestimmtes Integral bezeichnet:

$$\int_1^4 2dx$$

Hier sollten Sie sich nicht allzu viele Gedanken über die tiefere Bedeutung hinter dem Symbol $\int$ machen, und auch nicht über das dx (an das Sie sich vielleicht noch von Ihrer Differentiation in Analysis I her erinnern). Stellen Sie sich das $\int$ und das dx einfach nur als eine Art Notation vor, die um eine Funktion herum geschrieben wird – eine Notation, die für die *Fläche* steht.

Was ist so bestimmt beim bestimmten Integral: Eigentlich zwei Dinge:

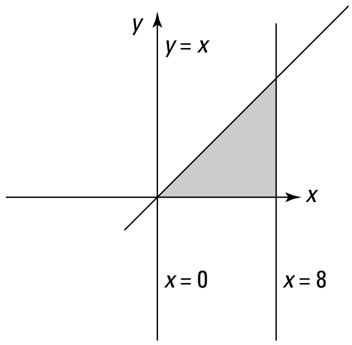
- ✔ **Die Integrationsgrenzen sind bestimmt** (in diesem Fall 1 und 4). Ihr Vorhandensein unterscheidet ein bestimmtes Integral von einem *unbestimmten Integral*, worüber Sie in Kapitel 3 mehr erfahren werden. Bestimmte Integrale beinhalten immer die Integrationsgrenzen, unbestimmte Integrale tun dies nie.
- ✔ **Ein bestimmtes Integral ist immer gleich einer bestimmten Zahl** (vorausgesetzt, die Integrationsgrenzen sind ebenfalls Zahlen). Diese Zahl kann einfach zu bestimmen sein, aber auch so schwierig, dass man einen ganzen Saal voller Mathematikprofessoren braucht, die gewaltigen Rechnungen mit spitzen Bleistiften zu Papier bringen. Letztlich ist aber eine Zahl immer eine Zahl. Und weil ein bestimmtes Integral ein Flächenmaß ist, sollten Sie davon ausgehen, dass die Lösung eine Zahl ist.

Wenn die Integrationsgrenzen *keine* Zahlen sind, muss ein bestimmtes Integral nicht unbedingt gleich einer Zahl sein. Ein bestimmtes Integral beispielsweise, dessen Integrationsgrenzen gleich k und $2k$ sind, ist sehr wahrscheinlich eher ein algebraischer Ausdruck, in dem k vorkommt. Analog dazu wäre ein bestimmtes Integral, dessen Integrationsgrenzen $\sin\theta$ und $2\cdot\sin\theta$ sind, sehr wahrscheinlich ein trigonometrischer Ausdruck mit θ. Insgesamt kann man sagen, dass ein bestimmtes Integral immer gleich einer Zahl ist, weil es eine Fläche darstellt – dass es aber nicht unbedingt möglich sein muss, diese Zahl zu berechnen.

Als weiteres Beispiel versuchen Sie, die Dreiecksfläche unter der Funktion $y = x$ zwischen $x = 0$ und $x = 8$ zu finden, wie in Abbildung 1.7 gezeigt.

Hier ist die Form des schattierten Bereichs ein Dreieck mit der Grundlinie 8 und einer Höhe von 8, die Fläche ist also gleich 32 (weil die Fläche eines Dreiecks die Hälfte der Grundlinie mal der Höhe ist). Aber auch dies ist ein Flächenproblem, das wie folgt mit Hilfe der Integration dargestellt werden kann:

$$\text{Fläche} = \int_0^8 x\,dx = 32$$



Fläche $= \int_0^8 x\,dx$

Abbildung 1.7: Die Dreiecksfläche unter der Funktion y = x *zwischen* x = *0 und* x = *8.*

Die Funktion, die ich hier integriere, ist $f(x) = x$, und die Integrationsgrenzen sind 0 und 8. Auch dieses Integral kann mit Hilfe von Methoden aus der klassischen und analytischen Geometrie ausgewertet werden. Und auch hier gilt, dass das bestimmte Integral als Zahl zu berechnen ist, die gleich der Fläche unterhalb der Funktion und oberhalb der x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 8$ ist.

Als letztes Beispiel betrachten Sie die halbkreisförmige Fläche zwischen $x = -4$ und $x = 4$, wie in Abbildung 1.8 gezeigt.

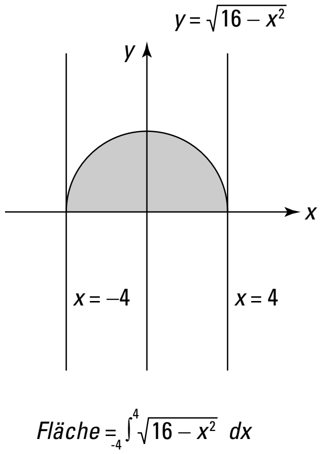


Abbildung 1.8: Die halbkreisförmige Fläche zwischen x = –4 und x = 4.

Als Allererstes erinnern Sie sich aus Ihrem bisherigen Mathematikunterricht, wie die Fläche eines Kreises mit einem Radius von 4 Einheiten ausgerechnet wird:

$$x^2 + y^2 = 16$$

Anschließend lösen Sie diese Gleichung nach y auf:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

Mit ein bisschen grundlegender Geometrie erkennen Sie, dass die Fläche des gesamten Kreises gleich 16π ist, die Fläche des schattierten Halbkreises ist also 8π. Auch wenn ein Kreis keine Funktion ist (und denken Sie daran, dass sich die Integration ausschließlich mit *stetigen Funktionen* beschäftigt!), liegt die schattierte Fläche in diesem Fall unter dem oberen Teil des Kreises. Als Gleichung für diese Kurve gilt also die folgende Funktion:

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Sie können also diese schattierte Fläche als bestimmtes Integral darstellen:

$$\text{Fläche} = \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx = 8\pi$$

Auch hier ergibt das bestimmte Integral eine Zahl, nämlich die Fläche unter der Funktion zwischen den Integrationsgrenzen.

Aufgeschnitten

Ein guter Ansatz für eine komplizierte Aufgabe – von der Planung einer Hochzeit bis hin zur Besteigung des Mount Everest – ist es, das Ganze in kleinere und damit überschaubarere Teile zu zerlegen.

In diesem Abschnitt zeige ich Ihnen die Grundlagen, wie der Mathematiker Bernhard Riemann diesen Ansatz angewendet hat, um das bestimmte Integral zu berechnen, das ich im vorigen Abschnitt »Es geht um die Fläche« vorgestellt habe. Hier verwende ich als Beispiel die Fläche unter der Funktion $y = x^2$ zwischen $x = 1$ und $x = 5$. Die Darstellung dieses Beispiels finden Sie in Abbildung 1.9.

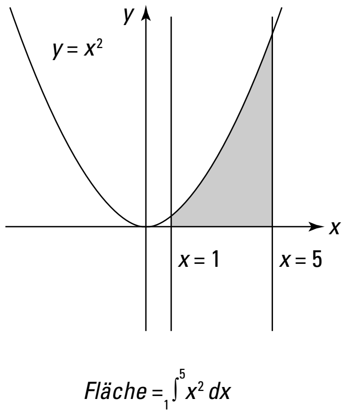


Abbildung 1.9: Die Fläche unter der Funktion $y = x^2$ zwischen $x = 1$ und $x = 5$.

Annäherung an ein schwieriges Problem mit Hilfe von Rechtecken

Im obigen Abschnitt »Es geht um die Fläche« haben Sie erfahren, wie das bestimmte Integral geschrieben wird, das die Fläche des schattierten Bereichs in Abbildung 1.9 darstellt:

$$\int_1^5 x^2 dx$$

Leider entspricht dieses bestimmte Integral – anders als die früher in diesem Kapitel vorgestellten – nicht den Methoden der klassischen und analytischen Geometrie, die ich verwendet habe, um die früher in diesem Kapitel vorgestellten Aufgaben zu lösen. (Wäre dies nicht so, wäre die Integration sehr viel einfacher und dieses Buch wäre sehr viel dünner!)

Auch wenn Sie dieses bestimmte Integral nicht direkt lösen können (noch nicht!), können Sie es annähern, indem Sie den schattierten Bereich in zwei Teile zerlegen, wie in Abbildung 1.10 gezeigt.

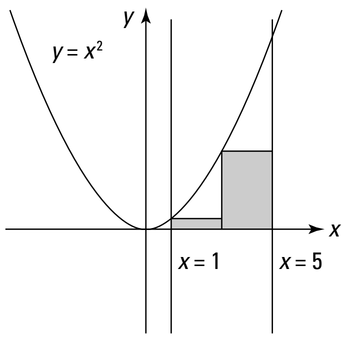


Abbildung 1.10: Fläche, die mit Hilfe von zwei Rechtecken angenähert wird.

Offensichtlich ist der jetzt schattierte Bereich – der aussieht wie zwei Treppenstufen, die nach oben verlaufen aber ins Nichts führen – kleiner als die Fläche, die Sie bestimmen wollen. Glücklicherweise führen diese Treppenstufen letztlich doch zu einem Ziel, weil die Berechnung der darunter liegenden Fläche relativ einfach ist.

Jedes Rechteck hat eine Breite von 2. Die Oberkanten der beiden Rechecke befinden sich dort, wo die Funktion x^2 die Punkte $x = 1$ und $x = 3$ trifft, ihre Höhen sind also 1 und 9. Die Gesamtfläche der beiden Rechtecke beträgt also 20, weil:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (1 + 9) = 2 \cdot 10 = 20$$

Mit dieser Annäherung der Fläche unter dem ursprünglich schattierten Bereich kann man daraus Folgendes schließen:

$$\int_1^5 x^2 dx \approx 20$$

Natürlich ist dies eine sehr grobe Annäherung. Aber selbst eine noch so schlechte Annäherung ist besser als nichts. Um eine bessere Annäherung zu erhalten, versuchen Sie, die gemessene Form in mehr Scheiben zu schneiden, wie in Abbildung 1.11 gezeigt.

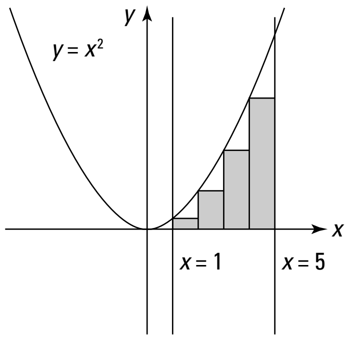


Abbildung 1.11: Eine genauere Annäherung. Die Fläche wird jetzt mit Hilfe von vier Rechtecken angenähert.

Auch diese Annäherung ist kleiner als der tatsächliche Bereich, nach dem Sie suchen. Jetzt hat jedes Rechteck eine Breite von 1. Und die Oberseiten der vier Rechtecke verlaufen dort, wo die Funktion x^2 die Punkte $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ und $x = 4$ trifft. Ihre Höhen sind also 1, 4, 9 und 16. Die Gesamtfläche der vier Rechtecke ist also gleich 30, weil:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 1 \cdot (1 + 4 + 9 + 16) = 1 \cdot 30 = 30$$

Wir haben also hier eine zweite Annäherung des gesuchten schattierten Bereichs:

$$\int_1^5 x^2 dx \approx 30$$

Ihre Intuition teilt Ihnen vielleicht schon mit, dass die zweite Annäherung besser als die erste ist, denn wenn die Rechtecke dünner geschnitten werden, können sie genauer an die

Funktion angepasst werden. Sie können dies nachprüfen, indem Sie überlegen, dass sowohl 20 als auch 30 *kleiner* als die tatsächliche Fläche sind. Egal, wie groß die Fläche also ist, 30 liegt näher beim Ergebnis.

Wie hoch ist oben?

Wenn Sie eine unregelmäßige Fläche in Rechtecke unterteilen, ist es ganz einfach, die Breite jedes Rechtecks zu bestimmen, weil sie alle gleich breit sind. Man dividiert einfach die Gesamtbreite der gemessenen Fläche, um gleich große Teile zu erhalten.

Die Höhe jedes dieser Rechtecke zu bestimmen, ist jedoch etwas aufwändiger. Sie beginnen, indem Sie die horizontalen Oberkanten aller Rechtecke zeichnen, die Sie verwenden. Anschließend gehen Sie für jedes Rechteck wie folgt vor:

1. **Sie stellen fest, wo die Oberkante des Rechtecks auf die Funktion trifft.**
2. **Sie ermitteln den Wert von x an dieser Stelle, indem Sie an der x-Achse direkt unterhalb von diesem Punkt nachsehen.**
3. **Sie bestimmen die Höhe des Rechtecks, indem Sie diesen x-Wert in die Funktion einsetzen.**

Sie können sich vielleicht vorstellen, dass Sie immer bessere Schätzungen erhalten, je weiter Sie die Fläche in Rechtecke zerlegen. Und auch hier täuscht Sie Ihre Intuition nicht: Wenn die Anzahl der Scheiben zunimmt, nähert sich das Ergebnis an 41,3333… an.

Sie können also schreiben:

$$\int_1^5 x^2 dx = 41,\overline{3}$$

Dies ist das richtige Ergebnis. Aber um diesen Schluss beweisen zu können, müssen Sie etwas genauer sein.

Eine Formel für die Flächenbestimmung aufbauen

Im vorigen Abschnitt haben Sie die Flächen von zwei Rechtecken bzw. vier Rechtecken wie folgt berechnet:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (1 + 9) = 2 \cdot 10 = 20$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 1 \cdot (1 + 4 + 9 + 16) = 1 \cdot 30 = 30$$

Dabei haben Sie jedes Mal die zu bestimmende Fläche in Rechtecke unterteilt, die alle dieselbe Breite aufweisen. Anschließend haben Sie diese Breite mit der Summe der Höhen *aller* Rechtecke multipliziert. Das Ergebnis ist die Fläche des schattierten Bereichs.

Allgemein lautet also die Formel für die Berechnung einer in n Rechtecke zerlegten Fläche:

$$\text{Fläche der Rechtecke} = w \cdot h_1 + w \cdot h_2 + \ldots + w \cdot h_n$$

In dieser Formel ist w die Breite jedes Rechtecks, und h_1, h_2, …, h_n usw. sind die verschiedenen Höhen der Rechtecke. Alle Rechtecke sind gleich breit, deshalb können Sie diese Formel wie folgt vereinfachen:

Fläche der Rechtecke = $w \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$

Beachten Sie, dass sich mit zunehmendem n – das heißt, je mehr Rechtecke Sie zeichnen – die Gesamtfläche aller Rechtecke an die Form annähert, deren Fläche Sie bestimmen wollen.

Sie stimmen mir sicherlich zu, dass diese Formel nicht besonders kompliziert ist. Es handelt sich um grundlegende Geometrie, wobei die Fläche von Rechtecken gemessen wird, indem ihre Breite und Höhe multipliziert wird. Im restlichen Abschnitt wandle ich diese einfache Formel in die folgende Formel um, die so genannte *Riemann-Summenformel* für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

Überwältigend! Aus diesem Grund habe ich die Formel beginnend mit der einfachen Flächenformel schrittweise aufgebaut – so dass Sie verstehen, dass diese verrückte Schreibweise einfach nur eine Erweiterung dessen ist, was Sie selbst bereits erkannt haben.

Wenn Sie nicht genau wissen, was diese ganzen Symbole bedeuten – wie etwa das Σ oder der Grenzwert –, lesen Sie weiter, weil ich sie nach und nach erklären werde. (Weitere Informationen über diese Symbole finden Sie in Kapitel 2.)

Das bestimmte Integral annähern

Ich habe Ihnen in diesem Kapitel bereits erklärt, dass das bestimmte Integral für die Fläche steht. Durch die Umwandlung der einfachen Formel

Fläche der Rechtecke = $w \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$

ist der erste Schritt also, einfach das bestimmte Integral einzuführen:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx w \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

Wie Sie sehen, wurde das Gleichheitszeichen (=) in ein Ungefährzeichen (≈) umgewandelt, das heißt, in der Gleichung wird darauf hingewiesen, dass es sich um eine Annäherung handelt. Diese Änderung ist angemessen – das bestimmte Integral ist die *exakte* Fläche innerhalb der angegebenen Grenzen, die die Fläche der Rechtecke nur annähert.

Den Fehlerspielraum begrenzten

Bei zunehmendem n – das heißt, je mehr Rechtecke Sie zeichnen – wird die Annäherung immer besser. Mit anderen Worten, wenn sich n an Unendlich annähert, nähert sich die Fläche der gemessenen Rechtecke der zu messenden Fläche an.

Sie werden nicht überrascht sein, wenn nach Darstellung dieser Annäherung mit Hilfe eines Grenzwerts der Fehlerspielraum wegfällt und die Annäherung den Status einer Gleichung erhält:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} w\cdot(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

Dieser Grenzwert drückt einfach auf mathematische Weise aus, was ich im vorigen Abschnitt gesagt habe: Wenn sich n Unendlich annähert, nähert sich die Fläche aller Rechtecke der *genauen* Fläche an, die das bestimmte Integral darstellt.

Das Verständnis der Breite erweitern

Im nächsten Schritt ersetzen wir die Variable w, die für die Breite jedes Rechtecks steht, durch einen sinnvolleren Ausdruck.

Sie wissen, dass die Integrationsgrenzen die Breite der zu bestimmenden Fläche darstellen, wobei a den kleineren und b den größeren Wert repräsentieren. Sie können also die Breite der gesamten Fläche als $b - a$ schreiben. Und wenn Sie diese Fläche in n Rechtecke unterteilen, hat jedes Rechteck die folgende Breite:

$$w = \frac{b-a}{n}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Annäherung ein, erhält man Folgendes:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

Wie Sie sehen, drücke ich hier nur die Variable w mit Hilfe von a, b und n aus.

Mit der Sigma-Notation Dinge summieren

Vielleicht erinnern Sie sich, dass es Ihnen die Sigma-Notation (das griechische Symbol Σ, das man in Gleichungen verwendet) erlaubt, Gleichungen eleganter darzustellen, in denen sehr lange Zahlenketten addiert werden. In Kapitel 2 finden Sie einen Überblick über die Sigma-Notation, lesen Sie also nach, wenn Sie sich nicht genau erinnern.

Der Ausdruck $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ ist ein guter Kandidat für die Sigma-Notation:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$$

Sie können also in unserer Gleichung eine einfache Substitution vornehmen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i$$

Jetzt verschönere ich die ganze Gleichung noch ein wenig, indem ich $\frac{b-a}{n}$ in den Sigma-Ausdruck hinein ziehe (das ist eine zulässige Umformung, wie in Kapitel 2 erklärt wird):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Die Funktionalität der Höhe verstehen

Sie wissen, dass die Variable h_i die Höhe eines einzelnen Rechtecks darstellt, das Sie messen wollen. (Um die Addition dieser Höhen kümmert sich die Sigma-Notation.) Der letzte Schritt ist, h durch etwas Funktionaleres zu ersetzen. Und *funktional* ist genau das richtige Wort, weil die Funktion die Höhe jedes Rechtecks bestimmt.

Hier folgt die kurze Erklärung, die ich später noch weiter verdeutliche: Die Höhe jedes einzelnen Rechtecks wird bestimmt durch einen Wert der Funktion an einem Wert von x, der irgendwo auf diesem Rechteck liegt, also:

$$h_i = f(x_i^*)$$

Die Notation x_i^*, die ich im Abschnitt »Nach links, nach rechts oder in die Mitte« genauer erkläre, bedeutet in etwa: »ein geeigneter Wert von x_i«. Das bedeutet, für jedes h_i in Ihrer Summe (h_1, h_2 usw.) können Sie die Variable h in der Gleichung durch einen geeigneten Wert der Funktion ersetzen. Und so sieht das aus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Dies ist die komplette Summenformel nach Riemann für das bestimmte Integral. Ich bin also gewissermaßen fertig. Aber ich schulde Ihnen noch die ausführliche Erklärung für diese letzte Ersetzung, die Sie nachfolgend finden.

Nach links, nach rechts oder in die Mitte

Wir betrachten noch einmal unser Anfangsbeispiel und sehen uns an, wie ich den schattierten Bereich in vier Rechtecke zerlegt habe, wie in Abbildung 1.12 gezeigt.

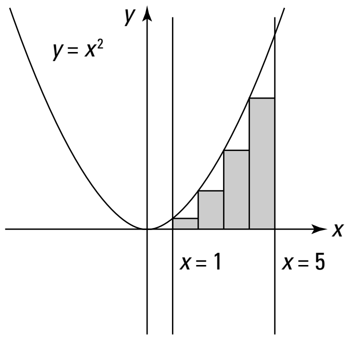


Abbildung 1.12: Annäherung der Fläche mit linken Rechtecken.

Wie Sie sehen, werden die Höhen der vier Rechtecke bestimmt durch den Wert von $f(x)$, wenn x gleich 1, 2, 3 bzw. 4 ist – das heißt $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ und $f(4)$. Beachten Sie, dass die obere linke Ecke jedes Rechtecks die Funktion berührt und die Höhe des betreffenden Rechtecks bestimmt.

Angenommen, ich zeichne jetzt die Rechtecke wie in Abbildung 1.13 gezeigt.

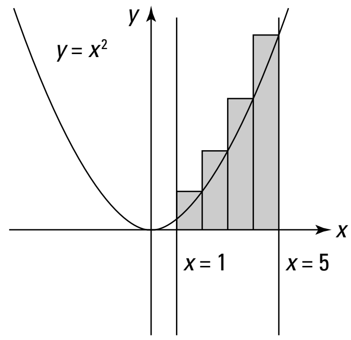


Abbildung 1.13: Annäherung der Fläche mit rechten Rechtecken.

In diesem Fall berührt die obere rechte Ecke die Funktion, die Höhen der vier Rechtecke sind also $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ und $f(5)$.

Angenommen, ich zeichne die Rechtecke jetzt, wie in Abbildung 1.14 gezeigt.

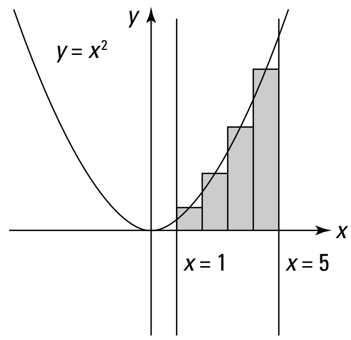


Abbildung 1.14: Annäherung der Fläche mit Mittelpunktrechtecken.

Hier berührt die Mitte der Oberseite jedes Rechtecks die Funktion, die Höhen der Rechtecke sind also $f(1,5)$, $f(2,5)$, $f(3,5)$ und $f(4,5)$.

Man kann also die Rechtecke auf mindestens dreierlei unterschiedliche Arten zeichnen, um die zu bestimmende Fläche anzunähern. Sie alle führen zu unterschiedlichen Annäherungen, welche davon führt also zu der richtigen Antwort? Die Antwort lautet: *alle*.

Diese überraschende Antwort resultiert aus der Tatsache, dass die Gleichung für das bestimmte Integral einen Grenzwert beinhaltet. Egal, wie Sie die Rechtecke zeichnen, so lange die Oberseite jedes Rechtecks an (mindestens) einem Punkt mit der Funktion zusammenfällt, glättet der Grenzwert die Abweichungen, wenn sich n an Unendlich annähert. Dieses Spiel innerhalb der Gleichung zeigt sich als der * im Ausdruck $f(x_i^*)$.

In dem Beispiel mit den vier Rechtecken etwa befindet sich das erste Rechteck an der Stelle von $x = 1$ bis $x = 2$, also gilt:

$$1 \leq x_i^* \leq 2 \qquad \text{und damit} \qquad 1 \leq f(x_i^*) \leq 4$$

Tabelle 1.1 zeigt den Bereich der zulässigen Werte für x_i, wenn diese Fläche mit Hilfe von vier Rechtecken angenähert wird. In jedem Fall können Sie die Höhe des Rechtecks in einem Bereich unterschiedlicher Werte von x zeichnen.

Wert von *i*	**Position des Rechtecks**	**Zulässiger Wert von x_i^***	**Niedrigster Wert von $f(x_i^*)$**	**Höchster Wert von $f(x_i^*)$**
$i = 1$	$x = 1$ bis $x = 2$	$1 \leq x_1^* \leq 2$	$f(1) = 1$	$f(2) = 4$
$i = 2$	$x = 2$ bis $x = 3$	$2 \leq x_2^* \leq 3$	$f(2) = 4$	$f(3) = 9$
$i = 3$	$x = 3$ bis $x = 4$	$3 \leq x_3^* \leq 4$	$f(3) = 9$	$f(4) = 16$
$i = 4$	$x = 4$ bis $x = 5$	$4 \leq x_4^* \leq 5$	$f(4) = 16$	$f(5) = 25$

Tabelle 1.1: Zulässige Werte von x_i^* für $n = 4$

In Kapitel 3 werde ich dieses Konzept genauer beschreiben. Dort erfahren Sie auch sehr viel mehr über die wichtigsten Punkte der Formel für das bestimmte Integral.

Definition des Unbestimmten

Die Riemann-Summenformel für das bestimmte Integral, um die es im vorigen Abschnitt gegangen ist, erlaubt die Berechnung von Flächen, die mit der klassischen oder analytischen Geometrie nicht zu berechnen sind. Der Nachteil dieser Formel ist, dass sie recht unhandlich ist. In Kapitel 3 zeige ich Ihnen, wie Sie damit die Fläche berechnen, aber die meisten Studenten schreien an dieser Stelle laut auf und rufen »Da muss es doch noch etwas anderes geben!«

Diese bessere Methode wird als das *unbestimmte Integral* bezeichnet. Das unbestimmte Integral sieht ganz ähnlich wie das bestimmte Integral aus. Vergleichen Sie selbst:

Bestimmte Integrale	**Unbestimmte Integrale**
$\int_1^5 x^2 dx$	$\int x^2 dx$
$\int_0^\pi \sin(x)\, dx$	$\int \sin(x)\, dx$
$\int_{-1}^1 e^x dx$	$\int e^x dx$

Wie das bestimmte Integral ist das unbestimmte Integral ein Werkzeug, um die Fläche unterhalb einer Funktion zu bestimmen. Anders als das bestimmte Integral hat das unbestimmte Integral jedoch keine Integrationsgrenzen, so dass Sie durch seine Auswertung keine Zahl erhalten. Stattdessen erhalten Sie durch Auswertung eines unbestimmten Integrals eine *Funktion*, die Sie nutzen können, um alle verwandten bestimmten Integrale zu erhalten. In Kapitel 3 erfahren Sie mehr darüber, wie bestimmte und unbestimmte Integrale zusammenhängen.

Unbestimmte Integrale stellen eine praktische Methode dar, bestimmte Integrale zu berechnen. Letztlich ist das unbestimmte Integral die Umkehrung der *Ableitung*, die Sie aus Analysis I kennen. (Machen Sie sich keine weiteren Gedanken, wenn Sie sich nicht mehr an den genauen Sachverhalt bei den Ableitungen erinnern – in Kapitel 2 finden Sie alles, was Sie brauchen.) Mit Umkehrung meine ich, dass das unbestimmte Integral einer Funktion eigentlich die *Anti-Ableitung* (die *Stammfunktion*) dieser Funktion ist. Die Verbindung zwischen Integration und Differentiation ist mehr als nur ein Gerücht. Man spricht auch vom *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung* (HDI).

Sie wissen beispielsweise, dass die Ableitung von x^2 gleich $2x$ ist. Sie erwarten also, dass die Anti-Ableitung – das heißt das unbestimmte Integral, also die Stammfunktion – von $2x$ gleich x^2 ist. Das ist grundsätzlich richtig, mit einem kleinen Trick, den ich in Kapitel 3 ausführe.

Wenn Sie die Integration als Anti-Differentiation betrachten, können Sie unzählige Integrale lösen, ohne die Riemann-Summenformel anwenden zu müssen (mehr darüber in Kapitel 4). Aber die Integration kann dennoch unangenehm sein, abhängig davon, welche Funktion Sie integrieren wollen. Die Mathematiker haben unzählige Techniken entwickelt, um Integrale auszuwerten. Einige dieser Methoden sind die Variablensubstitution (Kapitel 5), die teilweise (oder partielle) Integration (Kapitel 6), die trigonometrische Substitution (Kapitel 7) und die Integration durch Partialbruchzerlegung (siehe Kapitel 8).

Mit der Integration Aufgaben lösen

Nachdem Sie verstanden haben, wie man mit Hilfe des bestimmten Integrals eine Flächenaufgabe beschreibt (Teil I), und wie man Integrale berechnet (Teil II), können Sie es anpacken und die unterschiedlichsten Aufgabenstellungen lösen.

Einige dieser Aufgabenstellungen wissen, was sich gehört, und bleiben in zwei Dimensionen. Andere erheben sich zur Revolution in die dritte Dimension. In diesem Abschnitt präsentiere ich Ihnen einen Vorgeschmack auf diese Art von Aufgabenstellungen und lade Sie ein, in Teil III dieses Buchs mehr darüber zu erfahren.

Drei Aufgabenstellungen, die Sie mit höchster Wahrscheinlichkeit in einer Prüfung antreffen, sind die Bestimmung der Fläche zwischen Kurven, die Bestimmung der Länge einer Kurve und das Volumen eines Drehkörpers. Ich werde mich auf diese und viele andere Aufgabenstellungen in den Kapiteln 9 und 10 konzentrieren.

Ganz einfach: Die Fläche zwischen Kurven bestimmen

Wenn Sie wissen, wie das bestimmte Integral die Fläche unter einer Kurve darstellt, ist es auch nicht schwierig, die Fläche zwischen Kurven zu bestimmen. Sie zerlegen einfach die Aufgabe in mehrere kleinere Abschnitte. Angenommen, Sie wollen die Fläche zwischen der Funktion $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{4}$ bestimmen, das heißt die schattierte Fläche A in Abbildung 1.15.

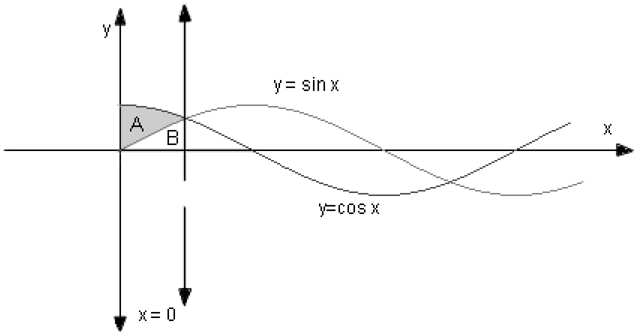


Abbildung 1.15: Die Fläche zwischen der Funktion $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{4}$

In diesem Fall bestimmen Sie durch Integration von $y = \cos(x)$, die Gesamtfläche A + B. Durch Integration von $y = \sin(x)$ erhalten Sie die Fläche von B. Um die Fläche von A zu erhalten, subtrahieren Sie A + B – B

Weitere Informationen über die Bestimmung der Fläche zwischen Kurven finden Sie in Kapitel 9.

Die lange und kurvige Straße

Mit der klassischen und analytischen Geometrie ist es ganz einfach, einen Abschnitt einer geraden Linie oder einen Kreisbogen zu messen. Aber wie messen Sie die Länge einer unregelmäßigen Kurve, die durch eine Polynom-, Exponential- oder trigonometrische Gleichung erzeugt wird?

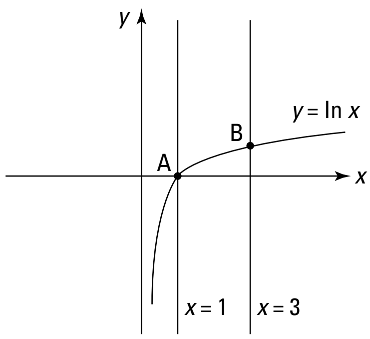


Abbildung 1.16: Der Abstand zwischen Punkt A und Punkt B entlang der Funktion $y = \ln(x)$.

Wie groß beispielsweise ist der Abstand zwischen Punkt A und Punkt B auf der Kurve in Abbildung 1.16?

Auch hier hilft Ihnen mal wieder die Integration. In Kapitel 9 werde ich Ihnen zeigen, wie Sie durch Anwendung der Integration eine Formel erhalten, die Ihnen dabei hilft, die Bogenlänge zu messen.

Drehkörper

Die Analysis ermöglicht Ihnen auch, das Volumen unregelmäßiger Körper zu bestimmen. Größtenteils ist an der Berechnung des Volumens ein Dimensionssprung in die *mannigfaltige Analysis* erforderlich, ein Thema aus Analysis III, das ich in Kapitel 14 kurz ansprechen werde.

In einigen Situationen ermöglicht Ihnen die Formulierung eines Integrals, das Volumen zu berechnen, indem über eine einfache Variable integriert wird – unter Verwendung der Methoden, die Sie in Analysis II kennen lernen werden.

Zu den kompliziertesten Aufgabenstellungen gehört der *Rotationskörper* einer Kurve. Bei diesen Aufgabenstellungen erhalten Sie eine Fläche unter einer Kurve. Anschließend stellen Sie sich den Körper vor, der entsteht, wenn Sie diese Fläche um die Achse drehen, und Sie berechnen das Volumen dieses Körpers, wie in Abbildung 1.17 gezeigt.

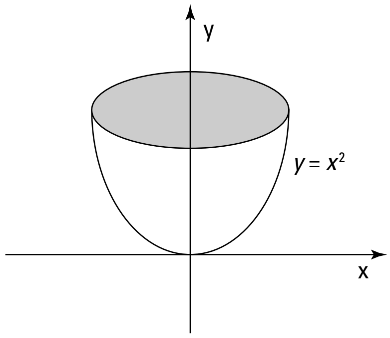


Abbildung 1.17: Ein Rotationskörper, erzeugt durch Rotation der Funktion $y = x^2$ um die Achse $x = 0$.

Offensichtlich brauchen Sie für die Bestimmung der Fläche dieses Bereichs die Analysis. Und Sie brauchen noch mehr Analysis und einen durchdachten Angriffsplan, um das Volumen zu berechnen. Wie das geht, erkläre ich in Kapitel 10.

Unendliche Reihen

Das letzte Drittel eines typischen Kurses in Analysis II – also etwa fünf Wochen – konzentriert sich normalerweise auf das Thema der unendlichen Reihen. Ich werde dieses Thema detailliert in Teil IV beschreiben. Es folgt ein Überblick über einige der Konzepte, die Sie dort kennen lernen werden.

Folgen und Reihen unterscheiden

Eine *Folge* ist eine Zahlenkette in bestimmter Reihenfolge. Beispiel:

$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Folgen können endlich oder unendlich sein, aber die Analysis beschäftigt sich mit der Unendlichkeit, deshalb ist es kaum überraschend, dass sie sich nur mit den *unendlichen Folgen* befasst.

Sie machen aus einer unendlichen Folge eine *unendliche Reihe*, indem Sie die Kommas in Pluszeichen umwandeln:

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

Die Sigma-Notation, die ich in Kapitel 2 genauer erkläre, ist praktisch, um die unendlichen Folgen knapper darzustellen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Reihen auswerten

Häufig ist es möglich, eine unendliche Reihe zu berechnen. Das bedeutet, Sie können feststellen, welche Summe alle diese Zahlen ergeben. Nachfolgend eine Lösung, die ganz offensichtlich sein sollte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots = \infty$$

Eine praktische Methode, bestimmte Reihen in den Griff zu bekommen, ist es, eine entsprechende *Folge von Teilsummen* zu erstellen, das heißt eine Folge, die den ersten Term, die Summe der beiden ersten Terme, die Summe der ersten drei Terme usw. beinhaltet.

Nachfolgend finden Sie die Teilsummenfolge für die zweite der oben gezeigten Reihen:

$$1 = \mathbf{1}$$

$$1+\frac{1}{2}=\mathbf{1\frac{1}{2}}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\mathbf{1\frac{3}{4}}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\mathbf{1\frac{7}{8}}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\mathbf{1\frac{15}{16}}$$

Die resultierende Teilsummenfolge bietet einen starken Beweis für diese Schlussfolgerung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots 0$$

Konvergente und divergente Reihen erkennen

Wenn die Auswertung einer Reihe eine Zahl ergibt, wie etwa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, wird sie als *konvergente Reihe* bezeichnet. Ergibt die Auswertung der Reihe Unendlich, wie etwa $\sum_{n=1}^{\infty}2n$, wird sie als *divergente Reihe* bezeichnet.

Es ist nicht immer ganz einfach zu erkennen, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist. Betrachten Sie beispielsweise die dritte Reihe, die ich oben in diesem Abschnitt gezeigt habe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = ?$$

Man spricht auch von der *harmonischen Reihe*, aber erkennen Sie auf den ersten Blick, ob sie konvergent oder divergent ist? (Bevor Sie anfangen, die Brüche zu addieren, möchte ich Sie warnen, dass die Teilsumme der ersten 10.000 Zahlen kleiner als 10 ist.)

Ein ständiges Problem bei der Betrachtung unendlicher Reihen ist die Entscheidung, ob eine bestimmte Reihe konvergent oder divergent ist. In Kapitel 13 finden Sie ein paar Tests, die Ihnen dabei helfen können.

Fortschreiten in die fortgeschrittene Mathematik

Obwohl wir schon weiter in der Mathematik sind, als sich manche träumen lassen hätten, ist die Analysis nicht das Ende, sondern ein Anfang. Egal, ob Sie in einen Analysis-II-Kurs gehen oder dieses Buch nur für sich selbst lesen – hier folgt ein kurzer Überblick über einige Bereiche der Mathematik, die nach der Integration kommen.

Mannigfaltige Analysis

Die mannigfaltige Analysis bringt die Differentiation und die Integration in die dritte Dimension und darüber hinaus. Für die Differentiation in mehr als zwei Dimensionen benötigt man *partielle Ableitungen*. Für die Integration in mehr als zwei Dimensionen braucht man *Mehrfachintegrale*.

In der Praxis ist die in den meisten Analysis-III-Kursen unterrichtete mannigfaltige Analysis auf drei Dimensionen beschränkt, wobei drei Achsen und die drei Variablen x, y und z verwendet werden. In Kapitel 14 wird es noch genauer um die mannigfaltige Analysis gehen.

Partielle Ableitungen

Wie Sie aus der Analysis I wissen, ist die *Ableitung* die Steigung einer Kurve an einem bestimmten Punkt im Graphen. Wenn Sie das Konzept der Steigung auf drei Dimensionen erweitern, entstehen neue Aufgabenstellungen.

Angenommen, Sie stehen an einem Berg, der nach oben hin ansteigt. Wenn Sie am Berg eine Linie durch Ihren Standpunkt nach oben und nach unten zeichnen, ist die Steigung dieser Linie steil. Zeichnen Sie dagegen eine Linie durch den Berg durch denselben Punkt, hat die Linie wenig bis gar keine Steigung. (Aus diesem Grund werden Bergstraßen häufig in Serpentinen auf den Berg gewunden, statt gerade auf und ab zu verlaufen.)

Wenn Sie die Steigung einer gekrümmten Oberfläche in drei Dimensionen berechnen, müssen Sie nicht nur den *Punkt* berücksichtigen, wo Sie die Steigung messen, sondern auch die *Richtung*, in der Sie sie messen. Partielle Ableitungen erlauben Ihnen, diese zusätzliche Information einzubeziehen.

Mehrfachintegrale

Früher in diesem Kapitel haben Sie gelernt, dass die Integration Ihnen ermöglicht, die Fläche unter einer Kurve zu messen. In drei Dimensionen müssen Sie dementsprechend das Volumen unter einer gekrümmten Oberfläche finden. *Mehrfachintegrale* (Integrale, die in andere Integrale verschachtelt sind) gestatten Ihnen, solche Volumen zu berechnen.

Differentialgleichungen

Nach der mannigfaltigen Analysis sind das nächste Thema, das den meisten Studenten auf ihrer mühsamen Reise durch die Mathematik begegnet, die *Differentialgleichungen*.

Differentialgleichungen benötigt man in vielen Bereichen der Wissenschaft, wie unter anderem in der Physik, wo es um Schlüsselkonzepte wie Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Objekts geht, die mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung berechnet werden. Die resultierenden Gleichungen enthalten komplizierte Kombinationen der Ableitungen, die bisweilen verwirrend und schwierig zu lösen sind. Ein Beispiel:

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen, in denen nur gewöhnliche Ableitungen vorkommen, enthalten *partielle Differentialgleichungen* – wie etwa die Wärmegleichung oder die Laplace-Gleichung – *partielle Ableitungen*.

Ein Beispiel:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

In Kapitel 15 präsentiere ich Ihnen einen Überblick über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen.

Fourier-Analyse

In der Physik wird so vieles in Differentialgleichungen ausgedrückt, dass es für die Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts zur zwingenden Notwendigkeit wurde, zuverlässige Methoden für die Lösung dieser Gleichungen zu finden. Der Mathematiker Joseph Fourier war darin außerordentlich erfolgreich.

Fourier entwickelte eine Methode, jede Funktion als die Funktion einer unendlichen Reihe aus Sinus- und Kosinus-Ausdrücken darzustellen. Weil trigonometrische Funktionen stetig und unendlich differenzierbar sind, stellt die Fourier-Analyse einen vereinheitlichten Ansatz dar, große Familien von Differentialgleichungen zu lösen, die zuvor nicht berechenbar waren.

Numerische Analyse

Ein Großteil der Mathematik ist theoretisch und idealisiert: die Suche nach genauen Lösungen ohne Beziehung zu praktischen Betrachtungen, wie etwa: »Wie lang wird es dauern, diese Aufgabe zu lösen?« (Wenn Ihnen je in einer Mathematikprüfung die Zeit ausgegangen ist, werden Sie wissen, wovon ich spreche!).

Im Gegensatz dazu ist die *numerische Analyse* die Suche nach einer Lösung, die gut genug ist, und zwar innerhalb einer sinnvollen Zeit.

Das folgende Integral beispielsweise kann nicht berechnet werden:

$$\int e^{x^2} dx$$

Aber auch wenn man es nicht lösen kann, kann man seine Lösung in jedem gewünschten Genauigkeitsgrad *annähern*. Und für Anwendungen aus der Praxis ist eine gute Annäherung häufig ausreichend, so lange Sie (oder vielmehr ein Computer) diese in einer vertretbaren Zeit berechnen können. Ein solches Verfahren für die Annäherung der Lösung für ein Problem wird auch als *Algorithmus* bezeichnet.

Die numerische Analyse untersucht Algorithmen für Qualitäten wie etwa *Genauigkeit* (der Fehlerspielraum für eine Annäherung) und die *Komplexität* (wie lange die Berechnung für einen bestimmten Genauigkeitsgrad dauert).