IN DIESEM KAPITEL

Mathematik ist logisch: Aussagenlogik

Objekte der Mathematik: Mengen und Relationen

Zahlen, Zahlen – noch mehr Zahlen

Ganz einfach komplex! Die komplexen Zahlen

Kapitel 1
Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen und Zahlen

In diesem Kapitel wird die analytische Methode auf die Mathematik selbst angewendet. Dabei erfahren Sie angefangen bei der Aussagenlogik bis hin zu den verschiedenen Zahlenmengen all das über die Grundlagen und den Kern der Mathematik, was Sie für die folgenden Kapitel wissen müssen.

Aussagenlogik – die Sprache der Mathematik verstehen

In der Mathematik heißt die Kunst, aus bestimmten Aussagen weitere Aussagen logisch korrekt abzuleiten, *Aussagenlogik*. Um überhaupt Aussagen machen zu können braucht es Sprache.

Vielleicht finden Sie diese Aussage einfach nur offensichtlich und eigentlich nicht der Rede wert. Wir haben doch eine gemeinsame Sprache, ich schreibe und Sie lesen dieses Buch. Mathematik braucht allerdings eine besondere Sprache. Eine, die zwar viele Wörter mit der Alltagssprache gemein hat, aber die viel präziser ist und mit sehr viel weniger Bedeutungsnuancen auskommt. Das ist wichtig, denn eine klare und exakte Sprache ist das Werkzeug der Mathematik.

Stellen Sie sich den folgenden alltäglichen Dialog vor: »Wann kommst Du?« – »Wohl etwas später …«

Abhängig von der Situation und den beteiligten Personen kann das von »ich bin nicht ganz pünktlich« bis hin zu »wahrscheinlich komme ich doch nicht« so ziemlich alles bedeuten. Und nicht immer wird man die richtige Bedeutung auch herauslesen. Das ist recht unpraktisch, falls etwas unzweifelhaft und präzise ausgedrückt werden muss. Mathematiker verwenden daher eine eigene Abart unserer Sprache, bei der zwar dieselben Wörter vorkommen, allerdings oft mit einer mehr oder weniger unterschiedlichen Bedeutung. Dass dabei die selben Wörter verwendet werden, bringt Nichtmathematiker oft genug zum Kopfschütteln und liefert Mathematikern eine nahezu unerschöpfliche Quelle der Erheiterung.

Zum Beispiel versteht ein Mathematiker unter dem Begriff *fast alle*: alle, bis auf endlich viele Ausnahmen. Mathematisch und logisch korrekt (aber nicht besonders aussagekräftig) trifft also jede auch noch so seltsame Aussage auf fast alle Menschen zu: Fast alle Menschen werden tausend Jahre alt. Fast alle Autofahrer können nicht Auto fahren. Und so weiter. Mathematiker können stundenlang über solche Sachen lachen.

In den folgenden Abschnitten lernen Sie die Grundregeln der mathematischen Sprache kennen: wie Sie neue Wörter und Begriffe erhalten (durch eine Definition) und was eine (mathematische) Aussage ist.

Wörter erfinden: die Definition

Damit zweifelsfrei klar ist, was mit einem bestimmten Wort oder einer Bezeichnung tatsächlich gemeint ist, muss jeder (mathematische) Begriff definiert werden, bevor Sie oder ich ihn benutzen können. Eine Definition ist so etwas wie eine mathematische Taufe: Ein Sachverhalt, eine Methode oder ein Objekt bekommt einen Namen. Zum Beispiel:

»Eine ganze Zahl heißt gerade, falls sie ohne Rest durch zwei teilbar ist.«

Mit einer Definition erkläre ich Ihnen also die Bedeutung eines neuen Begriffs, hier *gerade Zahl*.

Damit dies auch tatsächlich funktioniert, darf ich mich dabei natürlich nicht im Kreis drehen: Die Definition »eine Zahl heißt gerade, falls sie gradzahlig ist« hilft Ihnen sicherlich nicht sonderlich weiter. Streng genommen darf in einer Definition überhaupt kein noch nicht definiertes Wort vorkommen – das ist allerdings kaum möglich. Irgendwelche Wörter setzt man also doch voraus und benutzt daher einfach die übliche Sprache, solange sie nicht zu missverständlich ist. Eine formal saubere Definition verlangt aber wenigstens, dass der zu definierende Begriff nicht selbstbezüglich verwendet wird.

Oft ist eine Definition auch einfach nur eine Abkürzung. $A := x^2 + 2x + 1$ erlaubt es, den längeren Term $x^2 + 2x + 1$ kurz mit A zu bezeichnen. Das erhöht meist die Lesbarkeit von Formeln. Manche Formeln und Aussagen werden sogar erst durch geschickte Abkürzungen verständlich.

Das Symbol $:=$ bedeutet *ist definitionsgemäß* oder *steht für*. Definiert wird das, was links von $:=$ steht, durch das, was rechts davon steht. Zum Beispiel definiert

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

das Summenzeichen $\sum$ mit Laufindex i von 1 bis n durch die Summe der Größen a_1, a_2 bis a_n.

Manchmal drehe ich das Symbol um: $B =: A$ bedeutet dann, dass ich A durch B definiere. Der Doppelpunkt entscheidet also darüber, was wodurch definiert wird. Er steht grundsätzlich auf derselben Seite des Gleichheitszeichens wie der zu definierende Ausdruck.

Weder bei Definitionen noch bei Abkürzungen ist etwas zu beweisen. Allerdings sollten Sie sich immer Gedanken machen, ob eine Definition sinnvoll ist. »Eine ganze Zahl n heißt unmöglich, falls gilt $n = 1$ und gleichzeitig $n = 0$.« Offensichtlich gibt es keine »unmöglichen Zahlen«, daher ist die Definition nicht besonders nützlich.

Wörter verbinden: die Aussage

Im Gegensatz zu einer Definition ist $A = B$ eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann, wie zum Beispiel $1 = 1$, $1 = 0$ … Umgangssprachliche Sätze wie »die Sonne scheint« oder »bei Regen ist die Straße nass« sind genauso Aussagen wie mathematische Sätze: »In jedem rechtwinkligen ebenen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypothenusenquadrats« oder »17 ist die einzige gerade Zahl, die keine Primzahl ist«. Während die erste Aussage (der *Satz des Pythagoras*) bekanntlich wahr ist, gibt es doch begründete Zweifel an der zweiten … Mathematische Aussagen sind Behauptungen, deren Wahrheitsgehalt untersucht werden muss. Sie sollten bewiesen oder widerlegt werden.

Es gibt noch eine weitere Sorte von mathematisch-logischen Aussagen, die in einem gewissen Sinne zwischen Definition und Behauptung stehen. Das sind die so genannten *Axiome*. Ein Axiom können Sie sich als Beschreibung einer bestimmten unmittelbar einleuchtenden Eigenschaft vorstellen. Axiome sind Aussagen, die nicht abgeleitet oder bewiesen werden. Üblicherweise verwenden Mathematiker Axiome, um bestimmte mathematische Objekte zu beschreiben, meist in einer besonders grundlegenden, nicht einfach abzukürzenden Definition. Die natürlichen Zahlen sind dafür ein gutes Beispiel.

Rasiermesserscharfe Logik – eine Basis für alle Mathematik

Da Aussagen wahr oder falsch sein können, müssen sie bewiesen oder widerlegt werden: Da $\frac{17}{2} = 8$ Rest 1, ist 17 keine gerade Zahl. Also ist die Aussage falsch.

Ob die Sonne scheint, können Sie mit einem Blick aus dem Fenster leicht selbst feststellen. Ähnlich werden Sie die regennasse Straße sofort einsehen – falls die Straße nicht gerade überdacht ist, ist diese Folgerung schlicht und einfach logisch.

Logisch? Jawohl. In der Mathematik ist Logik das einzig funktionierende Mittel, Aussagen zu beweisen (oder zu widerlegen). Niemand würde auf den Gedanken kommen, über die Wahrheit einer mathematischen Behauptung abzustimmen. Nun, fast niemand.

Stellen Sie sich vor, A und B seien Aussagen. Dann ist »aus A folgt B« ebenfalls eine Aussage: ein ***Satz***. Wie können Sie diesen Satz beweisen (oder widerlegen)? Dazu gibt es grob gesehen vier verschiedene Methoden:

- ✔ **der direkte Beweis:** Beim direkten Beweis folgert man von A ausgehend so lange mit Hilfe gegebener Axiome und bereits bewiesener Sätze weitere wahre Aussagen, bis schließlich die Aussage B herauskommt.
- ✔ **der indirekte Beweis:** Der indirekte Beweis benutzt die logische Tatsache, dass »aus A folgt B« genau dasselbe bedeutet wie »wenn B nicht gilt, dann gilt auch nicht A« und startet bei »B gilt nicht« um mittels eines direkten Beweises dann zu folgern: »Auch A gilt nicht«.
- ✔ **der Widerspruchsbeweis:** Eine besondere Variante des indirekten Beweises ist der Widerspruchsbeweis. Dabei wird angenommen, dass einerseits die Aussage B falsch ist, obwohl andererseits A als geltend angenommen wird. Dann zeigt man, dass dies zu einem Widerspruch zur Aussage A, den Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen führt. Die direkte Folgerung aus diesem Widerspruch: Die ursprüngliche Annahme war falsch, B muss wahr sein.
- ✔ **die vollständige Induktion:** Der Induktionsbeweis ist eine Variante des direkten Beweises für Aussagen, die mit natürlichen Zahlen zusammenhängen.

Mathematik ist logisch. Ohne Logik funktioniert Mathematik nicht. Logik wird oft schon beim Aufschreiben einer mathematischen Aussage verwendet. Mit Hilfe logischer und weiterer mathematischer Symbole wird eine Behauptung viel präziser und klarer formuliert, als dies allein mit Worten möglich wäre. Logische Symbole sind kaum missverständlich, Aussagen lassen sich dadurch nicht nur einfacher formulieren und lesen, sondern meist auch leichter merken. Zum Beispiel kennen Sie den Satz des Pythagoras wahrscheinlich schon seit Ihrer Schulzeit in der Form: $a^2 + b^2 = c^2$.

Die Quadratur des Kreises und das $\pi = 3.2$-Gesetz

Die mathematische Frage, ob und wie mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu einem gegebenem Kreis ein flächengleiches Quadrat konstruiert werden könnte, hatte schon die alten Griechen beschäftigt. Erst Jahrtausende später gelang es 1882 dem Mathematiker Ferdinand von Lindemann, zu beweisen, dass die *Quadratur des Kreises* prinzipiell nicht möglich ist. Eine beliebig genaue Berechnung der Kreiszahl $\pi \approx 3.14159265358979323846264 33 \ldots$ ist allerdings möglich – falls Sie genügend Zeit und Rechenkapazität haben.

Obwohl seit 1882 also bekannt war, dass die Quadratur des Kreises unmöglich ist, beschäftigten sich Ende des 19. Jahrhunderts viele Hobbymathematiker weiterhin mit diesem Thema. So veröffentlichte der Arzt Edward J. Goodwin mehrere Arbeiten zur Kreisquadratur, nachdem er nach eigenen Angaben im Jahre 1888 auf »übernatürliche Art und Weise das exakte Maß des Kreises« erfahren hatte. Eine dieser Arbeiten wurde als Annonce Goodwins in der Zeitschrift »American Mathematical Monthly« abgedruckt. Obwohl diese Anzeige vom mathematischen Standpunkt aus nicht sehr klar ist, scheint es, als hätte Goodwin durch seine (falsche!) Konstruktionsmethode den Wert $\pi = 3.2$ berechnet.

Im Jahr 1897 wurde diese Konstruktionsmethode dem Staat Indiana von Goodwin unter der Voraussetzung, die Methode zum Gesetz zu erheben, kostenlos angeboten.

Angelockt von der Kostenfreiheit wurde nach einigen Runden in verschiedenen parlamentarischen Ausschüssen das Gesetz durch das Repräsentantenhaus von Indiana angenommen. Zur vollständigen Gesetzeskraft fehlte nun nur noch die Zustimmung des Senats. Zufällig war aber am Abstimmungstag der Mathematikprofessor Clarence A. Waldo im Repräsentantenhaus anwesend. Diesem gelang es in den folgenden Wochen den Senat zumindest davon zu überzeugen, sich nicht weiter mit diesem Gesetz zu befassen. Der endgültige Beschluss über das $\pi = 3.2$-Gesetz wurde auf unbestimmte Zeit vertagt – und ist auch heute noch nicht gefasst worden.

Logisch schreiben: Symbole, Symbole

Komplizierte mathematische Aussagen können oft überhaupt nicht mehr verbal ausgedrückt werden, ohne dass man sich dabei hoffnungslos verheddert. Die Symbolschreibweise ist da die einzige Rettung.

Verbreitet ist die Verwendung der symbolischen und formelhaften Sprache bei mathematischen Beweisen.

Abgesehen von den Rechensymbolen $(+, -, \cdot, \sum, \int, \ldots)$ werden im wesentlichen die folgenden logischen Symbole verwendet:

- ✔ $A \Rightarrow B$ bedeutet »aus A folgt B«.
- ✔ $A \Leftrightarrow B$ bedeutet »A ist äquivalent zu B«.
- ✔ $\forall\, x$ bedeutet »für alle x«.
- ✔ $\exists\, x$ bedeutet »es existiert ein x«.
- ✔ $\neg\, A$ bedeutet »nicht A«, die logische Negation der Aussage A.
- ✔ $A \wedge B$ bedeutet »A und B«, beide Aussagen zusammen.
- ✔ $A \vee B$ bedeutet »A oder B«, mindestens eine der beiden Aussagen.

Mengen und Relationen

Wenn Sie jemand fragt, womit sich Mathematiker beschäftigen, dann denken Sie höchstwahrscheinlich an Zahlen. In einem gewissen Sinne sind Zahlen tatsächlich das Grundgerüst der Mathematik – aber den meisten Mathematikern begegnen Zahlen in ihrem Berufsleben so, wie allen anderen Menschen auch: als ein reines Hilfsmittel zum Messen und Zählen. Mathematiker betrachten dabei Objekte, die sie in Mengen zusammenfassen. Ob diese Objekte Zahlen sind oder etwas ganz anderes, ist dabei nicht so wichtig. Interessant und wichtig sind dagegen die Beziehungen, die *Relationen*, zwischen einzelnen Elementen oder Teilmengen dieser Mengen.

Bösartige Mengen und ein logischer GAU

Der Mathematiker Georg F. L. P. Cantor (1845–1918) erforschte die Grundlagen der Mathematik und ist der Begründer der mathematischen Mengenlehre. Von ihm stammt auch die Definition von Mengen aus dem Abschnitt »Eine Menge Mengen«. Ich verwende sie allerdings nur unter Vorbehalt: Zwar scheint Cantors Mengendefinition abgesehen von der etwas wunderlichen Sprache durchaus anschaulich und recht harmlos zu sein. Und doch enthält sie eine logische Falle, die streng genommen diese Definition des Begriffs Menge mathematisch absolut unbrauchbar macht. Denken Sie einmal nach. Mengen sind sicherlich »Objekte unseres Denkens«, also können Sie diese wieder zu Mengen zusammenfassen. Beispielsweise könnten Sie auf die Idee kommen, die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen zu bilden, die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Manche solcher Mengenmengen sind bei näherer Betrachtung ziemlich kompliziert. Zum Beispiel die Menge aller Mengen, die mehr als ein Element enthalten. Sie entdecken sofort mehrere Mengen, die darin enthalten sind: unter anderem die Mengen $\{1, 2\}$ und $\{1, 2, 3\}$. Also mindestens zwei Elemente – oh … 2 ist mehr als 1, also ist die Menge aller »mehr als einelementigen Mengen« auch eine Menge mit mehr als einem Element. Und folglich muss sie sich selbst enthalten.

Bis hierher ist die Sache vielleicht verwirrend, aber noch kein eigentliches Unglück. Auch die Menge aller Mengen, die sich selbst enthalten, ist zwar eine Stufe verwirrender, aber immer noch kein wirkliches Problem. Die Falle schnappt aber zu, sobald Sie über die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, nachdenken: Diese Menge enthält sich genau dann selbst, wenn sie sich nicht selbst enthält.

Dieser Widerspruch, bekannt als die *Russel'sche Antinomie*, wird man nur mit einem längeren Ausflug in die Mengenlehre hin zur Kategorientheorie los. Das aber führt viel zu weit …

Glücklicherweise schnappt die Falle in den meisten praktischen Fällen nicht zu. Wir können also für den alltäglichen Gebrauch bei Cantors Definition bleiben, mit dem etwas vagen Zusatz, dass wir nur harmlose Mengen ohne solche Widersprüche betrachten.

Bei den Mengen fängt die Mathematik wirklich an. Alles, von Abbildungen bis hin zu Zahlen, wird in Mengen einsortiert und gegliedert. Es gibt – natürlich! – einige wenige Ausnahmen. Dazu mehr im Kasten »Bösartige Mengen und ein logischer GAU«. Grund genug sich den Begriff Menge ein wenig genauer ansehen.

Eine Menge Mengen

Ohne logische Widerhaken sauber zu beschreiben, was eine Menge wirklich ist, das ist gar nicht so einfach und führt direkt in die Tiefen mathematischer Grundlagenforschung. Zum Glück müssen Sie diesem Weg nicht weiter folgen und können sich mit der naheliegenden klassischen Definition nach Cantor begnügen:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Dabei wird vorausgesetzt, dass im Folgenden nur unproblematische Mengen auftreten, die nicht zu logischen Widersprüchen führen.

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte nennt man ihre *Elemente*. Sind das endlich viele, dann kann die betreffende Menge prinzipiell einfach aufgeschrieben werden. Beispiele wie $\{1, 2, 3\}$ oder $\{a, b, c, d, e\}$ kennen Sie sicherlich seit Ihrer Schulzeit.

Dabei gilt:

- ✔ Zwischen den geschweiften Klammern stehen die einzelnen Elemente der Menge.
- ✔ Die Reihenfolge ist gleichgültig.
- ✔ Jedes Element muss einmal auftreten – darf aber durchaus auch mehrfach auftauchen.

Dass ein Element in der Aufzählung mehrfach auftreten darf, klingt zwar nicht besonders sinnvoll, ist aber bei komplizierten Aufzählungen recht nützlich.

Natürlich möchte niemand sehr große Mengen hinschreiben oder gar lesen. Eine explizite Aufzählung solcher Mengen ist nicht nur unübersichtlich, sondern oft nur theoretisch, aber nicht praktisch möglich.

In vielen Fällen wird daher die Lesbarkeit durch *Fortsetzungspunkte* verbessert:

Die Darstellung $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ ist sofort verständlich und viel einfacher zu verwenden. Selbst einige unendlich große Mengen können auf diese Weise geschrieben werden. Unter $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ werden Sie fraglos die Menge der geraden natürlichen Zahlen verstehen. Allerdings sollten Sie mit den Fortsetzungspunkten vorsichtig umgehen. Mitunter gerät man sonst doch heftig ins Grübeln, was denn da wohl gemeint war. Zum Beispiel ist mit $\{1, 2, 3, 5, \dots\}$ noch nicht eindeutig eine bestimmte Menge gegeben. Es könnte sich dabei genauso gut um die Menge aller natürlichen Zahlen, die nur durch 1 oder sich selbst teilbar sind, oder um die Menge der so genannten Fibbonacci-Zahlen handeln. Diese werden von den beiden Zahlen 1 und 2 dadurch bestimmt, dass die nächste Zahl durch Addition der aktuellen und der vorangegangenen Zahl entsteht. $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ und so weiter. Wenn

Sie also nicht gerade einen Rätselwettbewerb veranstalten wollen, dann müssen Sie sich da doch etwas genauer ausdrücken.

Am besten gelingt die Beschreibung einer Menge, wenn durch einige wenige Eigenschaften beschrieben werden kann, was die Elemente dieser Menge auszeichnet. Genau das habe ich bei den letzten Mengen getan, wenn ich zum Beispiel »die Menge aller geraden natürlichen Zahlen« hinschreibe. Eine solche implizite Beschreibung wird ebenfalls in Mengenklammern geschrieben:

$\{n \mid n \in \mathbb{N},\ n \text{ nur durch } 1 \text{ oder } n \text{ teilbar}\}$

bezeichnet zum Beispiel die Menge aller Primzahlen. Dabei steht vor dem geraden Strich ein allgemeines Element der Menge und hinter dem Strich die charakteristische Beschreibung: $\{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$. Gelesen wird das dann als »die Menge aller x mit der Eigenschaft E« . Welcher Buchstabe vor dem Strich steht, ist eigentlich gleichgültig – es muss nur hinter dem Strich derselbe verwendet werden, um ein beliebiges allgemeines Element der Menge zu charakterisieren.

Ist M eine Menge, dann bedeutet $x \in M$, dass x ein Element der Menge M ist.

Entsprechend bedeutet $y \notin M$, dass y kein Element der Menge M ist.

Im obigen Beispiel bedeutet $n \in \mathbb{N}$, dass n eine natürliche Zahl ist ($\mathbb{N}$ steht ja gerade für die Menge aller natürlicher Zahlen).

Es gibt auch eine Menge ganz ohne Elemente: die leere Menge $\{\ \}$, oft auch als $\emptyset$ geschrieben. Die – nicht vorhandenen – Elemente der leeren Menge lassen sich dadurch charakterisieren, dass sie alle Eigenschaften gleichzeitig haben. Auch (oder gerade) solche, die sich gegenseitig ausschließen.

Teilmengen

Einzelne Elemente einer Menge (oder auch alle) können durchaus zu verschiedenen Mengen gehören: Die geraden Zahlen sind eben nicht nur gerade, sondern auch Zahlen. Gehören alle Elemente einer Menge N auch zur Menge M, dann heißt N Teilmenge von M, oder kurz: $N \subseteq M$.

Die Definition mit Hilfe logischer Symbole sieht so aus:

$$N \subseteq M \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x\colon\ x \in N \ \Longrightarrow \ x \in M.$$

Zwei etwas seltsame Teilmengen sind:

✔ Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder beliebigen Menge M, $\emptyset \subseteq M$, da alle Elemente aus $\emptyset$ natürlich auch in M sind. Das klingt verwirrend, ist aber logisch: Es gibt ja keine Elemente in $\emptyset$, also ist diese Aussage ungefährlich und trivialerweise richtig. Umgekehrt gilt das natürlich nicht: Kein Element irgendeiner Menge M ist in der leeren Menge $\emptyset$, sonst wäre sie ja nicht leer …

- ✔ Die gesamte Menge M ist eine Teilmenge ihrer selbst. Probieren Sie es aus – es ist ja gerade jedes Element aus M in M ...

Das klingt wieder einmal typisch »mathematisch« und wirkt wie eine überflüssige Bemerkung, ist aber einfach nur eine Folge der Bequemlichkeit. Ich habe bei der Definition des Begriffs Teilmenge nicht gefordert, dass es neben den Elementen der Teilmenge noch weitere Elemente in M gibt. Das kann man natürlich tun. Diese Art von Teilmengen, die dadurch definiert sind, nennt man daher *echte Teilmengen*. In Symbolen schreibt sich das ohne Gleichheitszeichen $N \subset M$.

Die Menge N ist genau dann eine echte Teilmenge von M, wenn N eine Teilmenge von M ist und es mindestens ein Element von M gibt, das kein Element von N ist, oder symbolisch dargestellt:

$$N \subset M \quad \Longleftrightarrow \quad N \subseteq M \quad \text{und} \quad \exists\, y\colon\ y \in M \text{ und } y \notin N.$$

Mit Hilfe der Teilmengenbeziehung lässt sich auch die Gleichheit zweier Mengen beschreiben.

Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn sowohl N Teilmenge von M, als auch umgekehrt M Teilmenge von N ist:

$$N = M \quad \Longleftrightarrow \quad N \subseteq M \quad \text{und} \quad M \subseteq N.$$

Diese Definition der Gleichheit zweier Mengen wird in der Praxis sehr oft verwendet um zwei unterschiedlich gegebene Mengen auf Gleichheit zu überprüfen.

Verbundmengen

Aus zwei oder mehr verschiedenen Mengen können leicht weitere Mengen erzeugt werden, die so genannten *Verbundmengen*.

Vereinigung, Durchschnitt und Differenz zweier Mengen M_1 und M_2 sind nahezu selbsterklärende Begriffe:

- ✔ $M_1 \cup M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ ist die Vereinigungsmenge.
- ✔ $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ ist die Schnittmenge.
- ✔ $M_1 \setminus M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ ist eine Differenzmenge M_1 ohne die Elemente von M_2.

Weniger bekannt ist das *kartesische Produkt* zweier beliebiger Mengen. Die Elemente des kartesischen Produkts $M_1 \times M_2$ sind alle möglichen Paare (x, y) mit erster Komponente x aus M_1 und zweiter Komponente y aus M_2

$$M_1 \times M_2 := \{(x, y) | x \in M_1,\ y \in M_2\}.$$

Die Reihenfolge der Komponenten ist bei diesem Produkt wesentlich, im Allgemeinen ist $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$.

Zu einer Teilmenge $N \subset M$ der Menge M ist $\overline{N} := M \setminus N$ das *Komplement von N in M*.

Aufgabe A1.1: Stellen Sie sich die beiden Mengen vor:

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$$
$$M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| \leq 5\}$$

Geben Sie die folgenden vier Verbundmengen aus M_1 und M_2 in Formelschreibweise an und skizzieren Sie diese:

a) $M_1 \cup M_2$, c) $M_1 \setminus M_2$,

b) $M_1 \cap M_2$, d) $M_2 \setminus M_1$.

Zahlen, Zahlen, noch mehr Zahlen

Wahrscheinlich waren die ersten mathematischen Objekte Ihres Lebens die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Jeder kennt das: kleine Kinder, die auf die Frage nach ihrem Alter stolz die Finger heben: »Ich bin schon drei Jahre alt!« und anfangen, ständig die Dinge in ihrer Umgebung abzuzählen. Diese Zahlen sind so grundlegend und natürlich, dass sie auch genau so heißen: die *natürlichen Zahlen*.

Mit Hilfe der Logik zählen lernen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3 \ldots \}$$

bezeichnet. Null gehört nicht zu den natürlichen Zahlen. Das ist für uns heute nicht mehr direkt nachvollziehbar, aber es ist tatsächlich eine Leistung gewesen, diese Zahl überhaupt erst zu »entdecken«, denn viele Kulturen kannten die null nicht oder sie kam ihnen doch sehr unnatürlich vor. Im römischen Zahlensystem gibt es beispielsweise keine Ziffer für die null. Wenn Sie die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen hinzunehmen wollen, schreiben Sie für die erweiterte Menge kurz $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots \}$.

Wenn Sie es genau nehmen (und das sollten Sie in der Mathematik immer tun!), dann habe ich die natürlichen Zahlen überhaupt nicht richtig definiert, denn ich habe die Zahlen beziehungsweise ihre Symbole $1, 2, 3, \ldots$ selbst in der Definition verwendet. Ich kann das aber mathematisch und logisch einwandfrei machen. Die Idee, die dahintersteckt, ist die grundlegende Charakteristik der natürlichen Zahlen zur Definition zu verwenden. Welche könnte das sein? Was machen Sie meistens mit diesen Zahlen? Richtig! Sie zählen!

Zählen fängt irgendwo an, normalerweise (aber nicht notwendig) bei der 1. Haben Sie einmal angefangen, dann geht es fast automatisch weiter: Zählen zu können bedeutet ja nichts weiter, als zu wissen, dass nach jeder Zahl eine weitere Zahl kommt – und welche das ist: gerade »eins mehr«. Umgekehrt kann von jeder Zahl ein Vorgänger angegeben werden – nur nicht von der allerersten, der 1.

Es gibt fünf Grundregeln, die *Peano'schen Axiome*, die die grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, und damit gewissermaßen des üblichen Zählens, eindeutig beschreiben:

- ✔ 1 ist eine natürliche Zahl.
- ✔ Jeder natürlichen Zahl n ist genau eine natürliche Zahl n' zugeordnet, der ***Nachfolger*** von n.
- ✔ 1 ist kein Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.

  Die 1 ist also die erste natürliche Zahl. Sicher, Sie könnten auf die Idee kommen und nicht mit der 1 anfangen zu zählen, sondern schon mit der 0 (oder erst mit 17, warum nicht?). Was dann?

  Jeder Mathematiker reagiert gelassen auf ein solches Ansinnen und lässt Ihnen Ihren Spaß. Denn letztlich führt das nur zu einem Umbenennen der natürlichen Zahlen: Was Sie 0 (oder 17) nennen, übernimmt eben die Rolle der 1 in den Peano'schen Axiomen. Die so entstehende Menge ist für das Zählen ganz genauso geeignet und hat exakt dieselben Eigenschaften. Für Mathematiker sind alle solche Mengen nur verschiedene Formen der natürlichen Zahlen, nichts wirklich Neues.

- ✔ Sind zwei natürliche Zahlen n, m verschieden, dann gilt das auch für ihre Nachfolger.

  Das bedeutet, dass Sie immer weiterzählen können und dabei keiner Zahl mehr als einmal begegnen werden. $1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots$ ist eben nicht das, was unter Zählen verstanden wird …

- ✔ Enthält eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ die 1 und folgt aus $n \in M$ sofort $n' \in M$, so muss $M = \mathbb{N}$ sein.

  Also enthalten die natürlichen Zahlen keine zum Zählen unnötigen Zahlen: Wenn ich in einer Teilmenge M der natürlichen Zahlen bei der eins mit dem Zählen anfangen und endlos weiterzählen kann, ohne diese Teilmenge zu verlassen, dann enthält M schon alle Zahlen, die zum Zählen gebraucht werden – also sollte M auch die ganze Menge der natürlichen Zahlen sein.

Mit den natürlichen Zahlen kann man noch ein bisschen mehr machen, als nur zählen. Sie können beispielsweise die Mädchen in einer Schulklasse abzählen und genauso die Jungen. Falls Sie dann wissen wollen, wie viele Kinder überhaupt in der Klasse sind, werden Sie sicherlich nicht noch einmal anfangen zu zählen, sondern die beiden Zahlen einfach addieren. Sie können mit dem Rechnen beginnen …

Logarithmisches Zählen

Das Zählen mit Hilfe der natürlichen Zahlen und deren gedachte Anordnung in regelmäßigen, gleich großen Abständen haben wir offenbar so gut gelernt, dass wohl kaum jemand die Benennung der Zahlen in Frage stellen würde. Aber so natürlich scheinen diese Zahlen nach psychologischen Studien unter Amazonasindianern und Vorschulkindern denn doch nicht zu sein: Die Indianer des Mundurukustamms ordnen Zahlen offenbar nicht linear (also mit gleich großen Abständen) an, sondern ähnlich wie Vorschulkinder in verschiedenen westlichen Ländern auf einer logarithmischen Skala: zwischen den kleinen Zahlen 2 und 3 sind da deutlich größere Abstände als etwa zwischen 8 und 9. Erwachsene Menschen in unserem Kulturkreis verwenden dagegen die »normale« lineare Anordnung. Die logarithmische Anordnung lässt sich aus der Evolution erklären: Es ist wohl ein deutlicher Unterschied, ob man von zwei oder von drei Wölfen angegriffen wird – dagegen ist der Unterschied zwischen einem angreifenden Wolfsrudel aus 20 und einem solchen aus 25 Wölfen eher von akademischem Interesse …

Wie tief das logarithmische Denken in uns verwurzelt ist, zeigt sich, wenn man die Aufgabenstellung ein wenig abändert und nicht Zahlen anordnen lässt, sondern größere Punktemengen. Sind diese Mengen so groß, dass die Anzahl nicht sofort abzuzählen ist, tendieren auch westlich gebildete Erwachsene wieder zu einer logarithmischen Anordnung. So gesehen sollten eigentlich Logarithmen als »natürliche Zahlen« definiert werden.

In der praktischen und theoretischen Mathematik sind Logarithmen zwar mitunter hilfreich, aber die linear angeordneten Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ sind so grundlegend und wichtig, dass ich in Übereinstimmung mit der Mathematik doch lieber bei der gewohnten Bezeichnung bleibe.

Die Sache mit den Schulden – Negative Zahlen

Aus den natürlichen Zahlen ergeben sich alle anderen Zahlen durch geschicktes Fragen. Das geht so:

Wenn Sie zwei natürliche Zahlen n und m haben, dann ist die Summe $n + m$ der beiden wieder eine natürliche Zahl. Kurz, es gilt die Aussage:

$$n \in \mathbb{N} \ \wedge \ m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow (n + m) \in \mathbb{N}$$

Anders sieht das aus, wenn ich die Sache ein bisschen verdrehe und für zwei natürliche Zahlen n und m die Frage stelle: für welche Zahl x gilt, dass $n + x = m$ ist? Es stellt sich schnell heraus, dass nicht für alle Kombinationen $n, m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl x existiert, die diese Gleichung erfüllt. Probieren Sie nur $n = 2$ und $m = 1$ aus. Es gibt keine natürliche Zahl x, für die gilt: $2 + x = 1$.

Das ist unbefriedigend und Sie wissen natürlich auch schon, wie die Sache zu reparieren ist. Mit Hilfe der null und der negativen Zahlen $-1, -2, -3, \ldots$, kurz: mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Die Menge

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\},$

heißt die Menge der *ganzen Zahlen*. Dabei steht $-n$ für genau diejenige Zahl, für die gilt: $n + (-n) = 0$.

Sie empfinden diese ganzen Zahlen vielleicht als ebenso natürlich, wie die natürlichen Zahlen selbst. Womöglich, weil jedem der Begriff von Geldschulden sehr geläufig ist … Ähnlich wie bei der Zahl null bedeuten aber auch die negativen ganzen Zahlen einen ziemlich großen Schritt in Richtung dessen, was heute Mathematik ist.

Mit den ganzen Zahlen können Sie nun die obige Gleichung nach x auflösen:

$x = m - n$

und es gilt

$x \in \mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$

Diese Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen ist die Antwort auf die Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung $n + x = m$ mit gegebenen natürlichen Zahlen n, m. Es gilt sogar noch ein bisschen mehr: n und m dürfen auch aus den negativen Zahlen in $\mathbb{Z}$ gewählt werden, die Gleichung bleibt dabei in $\mathbb{Z}$ immer lösbar, das heißt, es gibt eine (genau eine!, nicht zwei oder mehr) Zahl $x \in \mathbb{Z}$, für die die Gleichung erfüllt ist.

Die ganzen Zahlen zerbrechen – Rationale Zahlen

Addition und Subtraktion sind die Rechenoperationen, die zur Menge der ganzen Zahlen dazugehören. Die Addition ist eigentlich nichts anderes als eine Verallgemeinerung des Zählens, die Subtraktion die Umkehrung der Addition.

Die Multiplikation führt einen Schritt weiter. Zwei ganze Zahlen können nicht nur addiert oder subtrahiert, sondern auch multipliziert werden. Heraus kommt immer wieder eine ganze Zahl. Nicht so, wenn ich die Sache wieder umdrehe. Die Gleichung

$a \cdot x = b, \qquad \text{für beliebige} \qquad a, b \in \mathbb{Z}$

hat in den ganzen Zahlen nicht immer eine Lösung …

Sie ahnen schon, wie die Geschichte weitergeht: Erfinden wir eben neue Zahlen, die diese Sorte von Gleichungen ebenfalls immer lösbar machen. Die Antwort auf die Frage nach der Lösbarkeit dieser Gleichung liefert die Menge der rationalen Zahlen.

Rationale Zahlen sind Ausdrücke (Brüche) der Form $\frac{b}{a}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, wobei $a \neq 0$ vorausgesetzt wird. Die Darstellung der rationalen Zahlen als Brüche ist leider nicht eindeutig: Die Symbole

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{222}{333}, \dots$

sehen zwar verschieden aus, sind aber alle Lösungen der Gleichung

$$3 \cdot x = 2$$

und bezeichnen dieselbe Zahl. Idealerweise sollen aber möglichst alle solche Gleichungen eine eindeutige Lösung in der neuen Zahlenmenge haben.

Die rationalen Zahlen werden als »gekürzte« Brüche definiert:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, GGT(p,q) = 1 \right\}$$

Dabei steht $GGT(p,q)$ für den *Größten Gemeinsamen Teiler* von p und q.

In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hat die Gleichung $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ fast immer eine eindeutige Lösung. Fast immer, denn es gibt keine Lösung der Gleichung

$$0 \cdot x = b$$

mit $b \neq 0$. Durch null darf eben nicht geteilt werden. Ist $b = 0$, dann hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen, jedes $x \in \mathbb{Q}$ darf hier eingesetzt werden.

Da fehlt doch was – Reelle Zahlen

Mit den rationalen Zahlen ist der Zahlenzoo aber noch immer nicht vollständig. Denn bestimmte Gleichungen erfordern zur Lösung neue Zahlen. Betrachten Sie zum Beispiel Gleichungen der Form

$$x^2 = a \qquad \text{für} \quad a \in \mathbb{Q} \qquad \text{mit} \quad a \geq 0.$$

Sie können zum Beispiel keine rationale Zahl finden, die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist. Dafür brauchen Sie die *reellen Zahlen*. Leider lässt sich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, mit denen solche Gleichungen lösbar werden, nicht genauso einfach konstruieren, wie Sie das bei den ganzen oder den rationalen Zahlen gesehen haben. Denn es gibt für die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ keine explizite Beschreibung.

Aber implizit lässt sich die Menge $\mathbb{R}$ durch eine Reihe von Axiomen definieren:

- ✔ die Körperaxiome
- ✔ die Ordnungsaxiome
- ✔ das Axiom der Ordnungsvollständigkeit

Die Körperaxiome

Die Körperaxiome sind eine Beschreibung der charakteristischen Rechenregeln der beiden Operationen Addition und Multiplikation, jeweils mit ihren Umkehrungen Subtraktion und Division und der besonderen Stellung von null und eins.

Für die reellen Zahlen lauten die Körperaxiome so: Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ erklärt, so dass mit $a, b \in \mathbb{R}$ auch $a + b$ und $a \cdot b$ Elemente von $\mathbb{R}$ sind und die folgenden Regeln erfüllt sind:

- ✔ $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a.$

  Die Addition ist *kommutativ*, das heißt: Es kommt nicht auf die Reihenfolge an.

- ✔ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c.$

  Die Addition ist *assoziativ*, das bedeutet: Es kommt nicht darauf an, welche der beiden Additionen zuerst ausgeführt wird.

- ✔ $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a.$

  Das *neutrale Element der Addition* ist die 0.

- ✔ $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$

  Es gibt zu jeder Zahl eine *additiv inverse Zahl*.

- ✔ $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$

  Die Multiplikation ist kommutativ.

- ✔ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

  Die Multiplikation ist assoziativ.

- ✔ $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$

  Das neutrale Element der Multiplikation ist die 1.

- ✔ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$

  Es gibt zu jeder Zahl außer der 0 eine *multiplikativ inverse Zahl*.

- ✔ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

  Das *Distributivgesetz* regelt die Kombination von Addition und Multiplikation.

Alle weiteren Rechenregeln für die beiden Grundrechenarten Addition und Multiplikation lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten. Jede Zahlenmenge, für die diese Axiome gelten, heißt *Körper*. Da diese Grundrechenarten genauso für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definiert sind, ist $\mathbb{Q}$ ebenfalls ein Körper. Daher beschreiben die Körperaxiome alleine noch keine neue Zahlenmenge.

Die Ordnungsaxiome

Die Ordnungsaxiome beschreiben eine weitere grundlegende Operation: den Größenvergleich »<«. Wann immer Sie zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ aus den (noch zu definierenden) reellen Zahlen haben, können Sie eine der drei Aussagen machen:

$$a < b, \qquad a = b \quad \text{oder} \quad b < a.$$

Die für diese Vergleichsoperation geltenden grundlegenden Rechenregeln sind die *Ordnungsaxiome*.

- ✔ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$ oder $b < a$.

  Die Relation $<$ ist eine *Trichotomie*.
- ✔ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: Falls $a < b$ und $b < c$, dann folgt $a < c$.

  Die Relation $<$ ist *transitiv*.
- ✔ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: Falls $a < b$, dann folgt $a + c < b + c$.

  Die Relation $<$ ist mit der Addition verträglich.
- ✔ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: Aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$.

  Die Relation $<$ ist mit der Multiplikation verträglich.

Mengen, für deren Elemente eine solche Vergleichsoperation existiert, nennt man *total geordnet*. *Total* bezieht sich darauf, dass alle Elemente miteinander verglichen werden können.

Die reellen Zahlen sind total geordnet. Das gilt auch für die rationalen Zahlen: Die rationalen Zahlen sind ebenfalls ein total geordneter Körper. Daher reichen auch die Ordnungsaxiome nicht aus, um die neue Zahlenmenge $\mathbb{R}$ zu definieren.

Das Vollständigkeitsaxiom

Alle bisherigen Axiome lassen sich als einfache Rechenregeln für Addition, Multiplikation und die Vergleichsrelation »<« relativ einfach aufschreiben. Das letzte für die Definition der reellen Zahlen notwendige Axiom, das *Vollständigkeitsaxiom*, dagegen hat es in sich. Das muss es auch, damit tatsächlich neue Zahlen beschrieben werden und nicht nur die schon bekannten rationalen Zahlen wieder entstehen.

Um das Vollständigkeitsaxiom hinschreiben zu können, muss ich Ihnen zunächst erklären, was eine *nach oben beschränkte Teilmenge* und was eine *obere Schranke* ist.

Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen heißt nach oben beschränkt, falls es eine reelle Zahl S gibt, mit

$\forall a \in B \;\text{ gilt }\; a \leq S.$

S heißt *obere Schranke* von B.

Eine reelle Zahl s heißt *kleinste obere Schranke* von B, falls s eine obere Schranke von B ist und für jede obere Schranke S von B gilt: $s \leq S$.

Damit lautet das Vollständigkeitsaxiom:

»Jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $s \in \mathbb{R}$.«

Die kleinste obere Schranke einer nach oben beschränkten Teilmenge B heißt auch das *Supremum von* B.

Ich könnte für das Vollständigkeitsaxiom statt den Begriffen »nach oben beschränkte Teilmenge« und »Supremum« auch die analogen Begriffe »nach unten beschränkte Teilmenge«, »untere Schranke« und »Infimum« verwenden – an der Bedeutung des Axioms würde sich dadurch nichts ändern.

Die Körperaxiome und die Ordnungsaxiome beschreiben zusammen mit dem Vollständigkeitsaxiom eine neue Zahlenmenge, nämlich genau das, was Sie als die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kennen und was graphisch als die »Zahlengerade« veranschaulicht wird.

Das Vollständigkeitsaxiom ist dabei dafür verantwortlich, dass es in der Menge der reellen Zahlen keine »Löcher« mehr gibt, sondern solche Zahlen, wie die Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge 1, auch vorhanden sind. Diese Länge ist nach dem Satz des Pythagoras die Lösung der Gleichung

$$x^2 = 2,$$

die in den reellen Zahlen (im Gegensatz zu den rationalen Zahlen) tatsächlich eine Lösung hat. Genau genommen sogar zwei: $\pm\sqrt{2}$. Außerdem sorgt das Vollständigkeitsaxiom ganz nebenbei dafür, dass auch solche Zahlen wie π und die Euler'sche Zahl e zu den reellen Zahlen gehören.

Der Beweis dafür, dass aus dem Vollständigkeitsaxiom die Existenz der reellen Zahl $\sqrt{2}$ folgt, ist etwas länglich, läuft aber darauf hinaus zu zeigen, dass die nicht leere Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \text{ und } \ x^2 < 2\}$$

ein Supremum $s_M \in \mathbb{R}$ besitzt (das sichert gerade das Vollständigkeitsaxiom), für das gilt: $s_M^2 = 2$.

Komplex muss nicht kompliziert sein – komplexe Zahlen

Einen Schönheitsfehler hat die Sache mit den reellen Zahlen aber doch. Zwar gilt: Nicht nur die Gleichung $x^2 = a$ mit einer beliebigen nicht negativen rationalen Zahl a hat in den reellen Zahlen Lösungen, sondern diese Gleichung hat auch für alle nicht negativen reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ Lösungen. Was ist aber mit negativen Zahlen $a < 0$? Es gibt keine Lösung irgendeiner Gleichung

$$x^2 = a, \qquad \text{mit} \qquad a < 0$$

in den reellen Zahlen. Man kann aus negativen Zahlen keine Wurzeln ziehen. Jedenfalls nicht, wenn Sie erwarten, dass das Ergebnis eine reelle Zahl sein soll.

Und wie sieht es mit der Lösbarkeit von kubischen Gleichungen $x^3 = a$ oder ganz allgemein mit der Lösbarkeit irgendwelcher algebraischer Gleichungen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = a_0$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ aus? Das ist nicht einfach zu sagen – zumindest solange Sie nicht wissen, wie die Koeffizienten genau aussehen. Und selbst falls Sie diese kennen, nicht für jede solche Gleichung gibt es auch reelle Lösungen. Wenn Sie auf der Lösbarkeit all dieser Gleichungen bestehen, müssen Sie wieder einmal neue Zahlen erfinden. Genau das führt zur Menge der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Eine Wurzel aus –1: Die komplexen Zahlen entstehen

Sie könnten nun auf die Idee kommen, scheibchenweise vorzugehen und für jede Gleichung alle Lösungen, die nicht eh schon zu den reellen Zahlen gehören, einfach hinzuzufügen. Es stellt sich aber heraus, dass es genügt, eine einzige Lösung j der Gleichung

$$x^2 = -1$$

mit allen ihren Kombinationen $z := a + b \cdot j,\ a, b \in \mathbb{R}$ zu den reellen Zahlen hinzuzufügen. Für $b = 0$ sind das die schon vorhandenen reellen Zahlen, aber falls $b \neq 0$ ist, dann haben Sie damit tatsächlich neue Zahlen hinzugefügt.

Die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ aller Kombinationen

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot j \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } j^2 = -1\}$$

ist die Menge der komplexen Zahlen.

Die Zahl j, eine Wurzel aus -1, wird in der Mathematik üblicherweise mit i bezeichnet. Da das aber bei Anwendungen etwa in der E-Technik zu Verwechslungen führt, wird in der Ingenieursmathematik meistens der Buchstabe j verwendet.

Die komplexen Zahlen enthalten die reellen Zahlen: Setzen Sie einfach $b = 0$ in der Summendarstellung $a + bj$. Wenn Sie umgekehrt $a = 0$ wählen, erhalten Sie die Menge der (rein) *imaginären Zahlen* bj. Aber die komplexen Zahlen enthalten nicht nur die reellen und die imaginären Zahlen, sondern auch jede beliebige Kombination aus diesen.

Angenehmerweise ist die Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen die letzte notwendige Erweiterung der Zahlenmenge. Es kann nämlich bewiesen werden, dass in der Menge der komplexen Zahlen alle Gleichungen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z = a_0$$

mit irgendwelchen Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau n Lösungen besitzen. Anders ausgedrückt:

Reelle Polynome mit reellen Koeffizienten haben maximal n Nullstellen in den reellen Zahlen, aber sie müssen nicht unbedingt eine reelle Nullstelle haben. Dagegen hat jedes komplexe Polynom

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

vom Grad n mit komplexen Koeffizienten $a_i,\ i = 0, \ldots, n$ genau n Nullstellen in den komplexen Zahlen.

Mathematiker sagen dazu: Der Körper der komplexen Zahlen ist *algebraisch abgeschlossen*. Es ist sehr beruhigend, dass Sie nun nicht mehr nach noch weiteren Zahlen suchen müssen. Spätestens mit den komplexen Zahlen ist in der Ingenieursmathematik alles vorhanden, was Sie an Zahlen benötigen werden.

Komplexe Zahlen anschaulich: Die komplexe Zahlenebene

Vielleicht ist Ihnen im Abschnitt »Komplex muss nicht kompliziert sein – komplexe Zahlen« aufgefallen, dass ich die komplexen Zahlen als Summen definiert habe und bislang konsequent die etwas umständlich wirkende Normalform $a + bj$ benutze. Das liegt daran, dass komplexe Zahlen etwas deutlich anderes sind als alle anderen Zahlen. Diese können auf der Zahlengeraden angeordnet werden, die natürlichen und die ganzen Zahlen erscheinen dort in regelmäßigen Abständen, die rationalen und die reellen Zahlen füllen sozusagen die Zwischenräume aus. Schon rein anschaulich bleibt da kein Platz für die komplexen Zahlen – wohin also mit diesen? Die Frage ist berechtigt. Um eine Antwort zu finden, betrachten Sie zunächst einmal die reellen Zahlen etwas anders: Jede reelle Zahl können Sie als einen Parameter betrachten, der angibt, wie weit Sie vom Nullpunkt (je nach Vorzeichen nach rechts oder nach links) entlang der Zahlengeraden laufen müssen, um zu dem Punkt zu gelangen, der dieser Zahl entspricht. Bei den komplexen Zahlen haben Sie nun zwei solche Parameter: a und b. Der Parameter a gibt Ihnen genau wie bisher die Länge entlang der reellen Geraden an. Der andere (das b) entspricht ebenfalls einer Länge, aber diesmal entlang der imaginären Geraden. Diese verläuft senkrecht zur reellen Achse durch deren Nullpunkt. Der Parameter b gibt also an, wie weit Sie nach oben (oder unten, wieder je nach Vorzeichen) gehen sollen. Durch diese beiden Parameter entsteht ein zweidimensionaler Raum. Mathematiker bezeichnen die komplexen Zahlen oft auch als die »Gauß'sche Zahlenebene«. Da die Parameter a und b jeweils aus den reellen Zahlen kommen, gilt

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Die komplexen Zahlen sind also offenbar nichts anderes als das kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst. Damit das auch funktioniert, muss ich natürlich auch die Rechenregeln richtig festlegen: Zum Beispiel muss

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

und

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

gelten. Mehr zu den Rechenregeln finden Sie im Abschnitt »Rechnen mit Komplexen Zahlen«.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Grundrechenarten mit komplexen Zahlen sind gar nicht so schwierig. Es geht eigentlich fast genauso, wie Sie es von den reellen Zahlen her kennen. Allerdings mit der Besonderheit, dass das Quadrat $j^2 = -1$ ist.

Der Punkt $(0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die imaginäre Einheit – er liegt ja genau 1 weit vom Nullpunkt nach oben auf der imaginären Achse. Interpretieren Sie $(0, 1)$ wieder als Summe, dann erhalten Sie die Zahl $j \in \mathbb{C}$.

Die erste Komponente in der »Paarversion« (a, b) einer komplexen Zahl $z = a + bj$ (oder der erste Summand) heißt der *Realteil* $Re \quad z$ von z. Entsprechend nennt man die zweite Komponente b den *Imaginärteil* $\mathrm{Im} \ z$.

Komplexe Zahlen addieren

Zwei komplexe Zahlen $z_1 := a_1 + b_1 j$ und $z_2 := a_2 + b_2 j$ werden folgendermaßen addiert:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 j) + (a_2 + b_2 j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, j =: a + bj$$

Hier sind der neue Realteil $a := a_1 + a_2$ und der neue Imaginärteil $b := b_1 + b_2$ wieder reelle Zahlen.

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen in Normalform geschieht komponentenweise für Realteil und Imaginärteil getrennt.

Zum Beispiel addieren Sie die beiden komplexen Zahlen $a := 3 + 5j$ und $b := 2 - 3j$ wie folgt:

$$a + b = 3 + 5j + 2 - 3j = (3 + 2) + (5 - 3)j = 5 + 2j$$

Komplexe Zahlen multiplizieren

Ähnlich funktioniert die Multiplikation, allerdings müssen Sie hier auf die Regel $jj = j^2 = -1$ achten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) \\ &= a_1 a_2 + a_1(b_2 j) + a_2(b_1 j) + (b_1 j)(b_2 j) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, j =: c + d\, j \end{aligned}$$

mit dem neuen Realteil $c := a_1 a_2 - b_1 b_2$ und Imaginärteil $d := a_1 b_2 + a_2 b_1$. Dabei gilt, dass $(b_1 j)(b_2 j) = b_1 b_2 j^2 = -b_1 b_2$ ist.

Zur Multiplikation komplexer Zahlen verwenden Sie die Normalform und gehen dabei wie bei reellen Zahlen vor. Allerdings mit der zusätzlichen Regel $j^2 = -1$.

Das Produkt der Zahlen $a := 3 + 5j$ und $b := 2 - 3j$ berechnen Sie also so:

$$\begin{aligned}
ab &= (3+5j)(2-3j) \\
&= 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3j + 5j \cdot 2 + 5j \cdot (-3j) \\
&= 6 - 9j + 10j - 15j^2 \\
&= 6 + j + 15 \\
&= 21 + j
\end{aligned}$$

Bruchrechnen mit komplexen Zahlen

Division durch eine komplexe Zahl – das komplexe Bruchrechnen – ist ein wenig komplizierter als Sie das von den reellen Zahlen her gewohnt sind. Mit Hilfe der konjugiert komplexen Zahl und des Betrags wird das Dividieren aber doch wieder recht einfach.

Die komplexe Zahl $\overline{z} := a - bj = (a, -b)$ heißt die zu z *konjugiert komplexe Zahl* oder kurz die *Konjugierte von* z.

Die Konjugierte $\overline{z}$ unterscheidet sich von z nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils:

$$Im\ \overline{z} = -Im\ z$$

Multiplizieren Sie z mit der konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$, dann erhalten Sie eine reelle Zahl:

$$z\overline{z} = (a + bj)(a - bj) = a^2 - b^2 j^2 = a^2 + b^2$$

Die Zahl $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der *Betrag von* z.

Es gilt die Rechenregel $|z|^2 = z\overline{z}$. Damit wird die Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 j$ und $z_2 = a_2 + b_2 j$ fast ein Kinderspiel:

Erweitern Sie einen Bruch mit der konjugiert Komplexen des Nenners, so wird dieser reell.

$$\frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} = \frac{(a_1 + b_1 j)(a_2 - b_2 j)}{(a_2 + b_2 j)(a_2 - b_2 j)} = \frac{(a_1 + b_1 j)(a_2 - b_2 j)}{(a_2^2 + b_2^2)}$$

Ausmultiplizieren des Zählers liefert dann das Ergebnis:

$$\frac{(a_1 + b_1 j)(a_2 - b_2 j)}{(a_2^2 + b_2^2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) j}{|z_2|^2} = \frac{a}{|z_2|^2} + \frac{b}{|z_2|^2} j$$

mit den reellen Zahlen $a := a_1 a_2 + b_1 b_2$ und $b := a_2 b_1 - a_1 b_2$.

Das Ergebnis der Division ist also:

$$\frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} = \frac{a}{|z_2|^2} + \frac{b}{|z_2|^2} j$$

Ein Rechenbeispiel: Dividieren Sie die Zahlen $z_1 = 2 + 3\,j$ und $z_2 = 1 + 4\,j$.

1. **Erweitern Sie mit dem konjugiert Komplexen des Nenners.**

$$\frac{2+3\,j}{1+4\,j} = \frac{(2+3\,j)(1-4\,j)}{(1+4\,j)(1-4\,j)} = \frac{(2+3\,j)(1-4\,j)}{1^2+4^2} = \frac{(2+3\,j)(1-4\,j)}{17}$$

2. **Multiplizieren Sie den Zähler aus.**

$$\frac{(2+3\,j)(1-4\,j)}{17} = \frac{2+3\,j-8\,j+12}{17} = \frac{14-5\,j}{17}$$

3. **Teilen Sie in Real- und Imaginärteil auf.**

   Das Ergebnis der Division lautet:

$$\frac{14-5\,j}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}\,j$$

Die Division $\frac{z_1}{z_2}$ zweier komplexer Zahlen in Normalform berechnen Sie am einfachsten durch Multiplikation von z_1 mit dem konjugiert komplexen $\overline{z_2}$ und anschließende Division durch das Quadrat $|z_2|^2$ des Betrags des Nenners.

Aufgabe A1.2: Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

a) $\dfrac{10-6j}{4+2j}$

b) $\dfrac{13}{-12+5j} + \dfrac{5}{4+3j}$

c) $\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^{99}$

d) $\dfrac{26}{12-5j} + \dfrac{39}{5+12j}$

Dass der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist, hat einen interessanten Nebeneffekt. Sie können nämlich jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten und Definitionsbereich $\mathbb{R}$ auch als ein komplexes Polynom auffassen – die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen. Als komplexes Polynom hat $p(x)$ genau so viele Nullstellen, wie sein Grad n angibt, manche davon sind allerdings möglicherweise komplexe Zahlen. Komplexe Nullstellen treten bei ursprünglich reellen Polynomen immer paarweise auf: Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine komplexe Nullstelle von p, dann ist es das konjugiert komplexe $\overline{z}$ ebenfalls.

Sie können $p(x)$ als Produkt aus Linearfaktoren $(x - x_i)$ für die reellen Nullstellen x_i und den quadratischen Faktoren $(x - z_i)(x - \overline{z_i}) = x^2 - 2\,Re(z_i)x + |z_i|^2$ schreiben. Falls eine Nullstelle mehrfach auftaucht, tritt der entsprechende Faktor genauso oft auf. Die *Linearfaktorzerlegung* von p ist dann

$$\begin{aligned} p(x) = {} & a_n(x-x_1)^{c_1} \cdot (x-x_2)^{c_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{c_k} \\ & (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{d_1}(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{d_l}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\beta_i = 2\ Re\ z_i$ und $\gamma_i = |z_i|^2$ für jedes komplex konjugierte Nullstellenpaar z_i und $\overline{z}_i$ von $p(x)$. Die Exponenten c_i und d_i entsprechen dabei den *Vielfachheiten* der reellen Nullstellen x_i beziehnungsweise der komplex konjugierten Nullstellenpaare z_i und $\overline{z}_i$.

Polarkoordinaten

Durch die Darstellung der komplexen Zahlen in Normalform sind Addition und Subtraktion genauso wie Multiplikation und Division für die komplexen Zahlen direkt aus den entsprechenden Rechenregeln für die reellen Zahlen abzuleiten. Kompliziertere Berechnungen sind so zwar prinzipiell auch möglich, werden unter Umständen aber viel schwieriger. Allerdings gibt es eine weitere Darstellung für komplexe Zahlen, die Potenzieren und Wurzelziehen recht einfach gestaltet: die Polarkoordinaten.

Die Idee dabei ist recht einfach: Um eine komplexe Zahl $z = (a, b)$ auf der Zahlenebene zu erreichen, können Sie, anstatt vom Nullpunkt $(0, 0)$ aus a Einheiten entlang der reellen Achse nach rechts und dann b weit parallel zur imaginären Achse nach oben zu gehen, auf direktem Weg dahin gelangen, wie in Abbildung 1.1 dargestellt. Dazu müssen Sie die Richtung, in der (a, b) vom Ursprung $(0, 0)$ aus gesehen liegt, und die Entfernung r kennen. Die Länge der Linie von $(0, 0)$ nach (a, b) erhalten Sie nach dem Satz des Pythagoras durch den Betrag $r := \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bj|$. Die Richtung wird durch den Winkel φ zwischen der reellen Achse und der Strecke von $(0, 0)$ nach (a, b) angegeben.

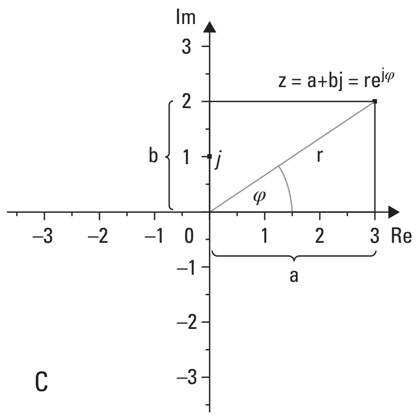

Abbildung 1.1: Polar- und Normalform einer komplexen Zahl

Die beiden Parameter r und φ heißen die *Polarkoordinaten* des Punktes in der komplexen Zahlenebene.

Für die Berechnung der Polarkoordinaten einer komplexen Zahl z aus der Normalform $z = a + bj$ gilt die Formel:

$$z = (a, b) = a + bj = (r\ \cos(\varphi), r\ \sin(\varphi)) = r[\cos(\varphi) + \sin(\varphi)j\ ]$$

mit Betrag $r = |z|$ und Winkel φ, der als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = \dfrac{a}{r} \\ \sin(\varphi) & = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

gegeben ist. Es gibt allerdings mehr als eine Lösung φ dieses Gleichungssystems – das ist auch klar: Sie können sich natürlich mehrmals im Kreis drehen, bevor Sie schließlich in eine bestimmte Richtung schauend anhalten. Jede solche Lösung φ heißt Polarwinkel. Unter diesen Lösungen gibt es genau eine Lösung φ_0 im Intervall $(-\pi, \pi]$. Also können Sie, ohne dass Ihnen durch überflüssiges Im-Kreis-Drehen schwindelig werden muss, sich direkt in die entsprechende Richtung wenden. Diese spezielle Lösung heißt das *Argument der komplexen Zahl* z, kurz:

$$\varphi_0 =: \arg(z)$$

Die Menge der Polarwinkel von z ist mit Hilfe des Arguments von z durch

$$\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \varphi = \varphi_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

gegeben.

Zum Schluss noch eine Rechenformel, um das Argument einer komplexen Zahl $z = a + bj$ direkt zu berechnen:

$$\varphi_0 = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \dfrac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan \dfrac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan \dfrac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$

Komplexes Potenzieren und Wurzelziehen

Mit Hilfe der Polarkoordinaten wird Potenzieren oder Wurzelziehen bei komplexen Zahlen kinderleicht. Damit das gelingt, muss aber einige Vorarbeit geleistet werden und die komplexe Exponentialfunktion definiert werden.

Für komplexe Zahlen $z = x + jy$ heißt die durch

$$e^z = e^{x+jy} := e^x(\cos(y) + j\sin(y))$$

gegebene Funktion die *komplexe Exponentialfunktion*.

Ist $\varphi \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, dann gilt die *Euler'sche Formel*:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

Sie können an der Normalform von $e^{j\varphi}$ direkt den Betrag $|e^{j\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$ ablesen. Außerdem ergeben sich die folgenden nützlichen Regeln direkt aus der Definition der komplexen Exponentialfunktion:

$$e^{j(\varphi+2k\pi)} = e^{j\varphi}$$
$$e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{j\varphi_1}\ e^{j\varphi_2}$$

und als Verallgemeinerung die *Summenformel von de Moivre*:

$$(e^{j\varphi})^n = \underbrace{e^{j\varphi}\ e^{j\varphi} \cdots e^{j\varphi}}_{n\text{-mal}} = e^{j(\varphi+\cdots+\varphi)} = e^{j(n\varphi)}$$

Für alle komplexen Zahlen z existiert die *Polardarstellung*

$$z = |z|\ e^{j\varphi}$$

mit dem Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Anschaulich wird dabei eben die Zahl z (also ein Punkt in der Zahlenebene) durch ihren Abstand $|z|$ vom Ursprung $(0, 0)$ und die Richtung φ eindeutig bestimmt.

Nützlich ist die Polardarstellung zum Beispiel bei der Multiplikation und der Division. Es gilt für komplexe Zahlen z_1 und z_2 mit Argumenten φ_1 bzw φ_2

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\ e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \text{und} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Komplexe Zahlen in Polarform multiplizieren Sie durch Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente.

Die Division komplexer Zahlen in Polarform berechnen Sie durch Division der Beträge und Subtraktion der Argumente.

$|z_1||z_2|\ e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$ ist eine Zahl, die aus z_1 durch Streckung um $|z_2|$ und Drehung um den Ursprung mit dem Winkel φ_2 entsteht – die Multiplikation irgendeiner Zahl z_1 mit z_2 entspricht also einer Drehstreckung.

Mit dieser Vorarbeit kann ich jetzt auch Potenzieren und Wurzelziehen definieren.

Für eine komplexe Zahl $b \in \mathbb{C}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt jede Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = b$ eine *n-te Wurzel von b.*

Ist $z = re^{j\varphi}$ die Polardarstellung von z, dann können Sie die n-te Potenz von z mit der folgenden Formel berechnen:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{-mal}} = r^n\ \underbrace{e^{j\varphi}\ e^{j\varphi} \cdots e^{j\varphi}}_{n\text{-mal}} = r^n\ e^{j(n\varphi)}$$

Potenzieren ist in Polarform deutlich einfacher: Potenzieren Sie den Betrag und multiplizieren Sie das Argument mit dem Exponenten.

Das funktioniert auch, falls $n \in \mathbb{R}$ keine natürliche Zahl ist.

Besitzt $b \neq 0$ die Polardarstellung $b = \alpha\, e^{j\psi}$ mit $\alpha = |b| > 0$, so muss für die Polardarstellung $z = re^{j\varphi}$ jeder n-ten Wurzel z von a

$$r^n = \alpha \qquad \text{und} \qquad n\varphi = \psi + 2k\pi$$

mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gelten. Also ist

$$r = \sqrt[n]{\alpha} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{k}{n}2\pi.$$

Jede Lösung der Gleichung $z^n = b$ hat daher die Form

$$z_k = \sqrt[n]{\alpha}\;\; e^{j(\frac{\psi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)}$$

mit $\alpha = |b|$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Wurzelziehen ist Potenzieren mit einem Bruch.

Aufgabe A1.3: Bestimmen Sie die Normalform von

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2}j}.$$

Unter diesen unendlich vielen Zahlen sind aber nur $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ voneinander verschieden, denn es ist

$$\begin{array}{ccccc} z_n & = & \sqrt[n]{\alpha}\;\; e^{j(\frac{\psi}{n}+2\pi)} & = & z_0 \\ z_{n+1} & = & \sqrt[n]{\alpha}\;\; e^{j(\frac{\psi}{n}+\frac{1}{n}2\pi)} & = & z_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Ist $a = |a|\; e^{j\psi} = |a|(\cos(\psi) + j\sin(\psi))$, so sind diese Lösungen gegeben durch

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{|a|}\;\; e^{j(\frac{\psi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)} \\ &= \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + j\sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)\right) \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Diese Lösungen bilden in der komplexen Zahlenebene die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Einheitskreis $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt[n]{|a|} \right\}$.