IN DIESEM KAPITEL

Zahlenmengen

Zahlensysteme

Grundlegende Rechenoperationen und -regeln

Mengenlehre und Logik

Kapitel 1
»Zahlen, bitte!« – von Zahlen und ihren Regeln

Ziel dieses Kapitels ist es, Ihnen grundlegende algebraische Beziehungen (wieder) nahezubringen. Das Ganze beginnt mit Ausführungen zu Zahlenmengen und -systemen, die Ihnen möglicherweise trivial erscheinen, aber für das weitere Fortgehen wesentlich sind. Es geht weiter mit grundlegenden Rechenregeln und endet mit Ausführungen zur Mengenlehre und zur Logik. Letzteres dient nicht zuletzt dazu, dass es Ihnen künftig leichterfallen wird, Fragestellungen, die in Textform formuliert sind, in die Welt der Mathematik, zum Beispiel in die Zahlenebene, zu übersetzen. Auch dieses mag Ihnen vielleicht trivial erscheinen, doch wir erleben oft, dass Textaufgaben Studierende vor einige Rätsel stellen. Ansonsten genießen Sie einfach das Gefühl, dass Sie schon einiges wissen!

Zahlenmengen: Eine Menge Zahlen

Lassen Sie uns den Einstieg in die Welt der Zahlen mit den Kernelementen der mathematischen Welt beginnen: mit Zahlen. Eine *Zahlenmenge* besteht aus verschiedenen Elementen oder eben Zahlen, die gemäß bestimmten Rechenregeln miteinander verknüpft werden können.

Natürliche Zahlen: Positiv und ganz

Haben Sie es ausschließlich mit positiven ganzen Zahlen zu tun, handelt es sich um die Menge der natürlichen Zahlen. Sie schreiben dann für eine beliebige Zahl a: $a \in \mathbb{N}^*$; das heißt in Worten: Die Zahl a ist Element des Zahlenbereichs der positiven *natürlichen Zahlen*. Beziehen Sie auch noch die 0 in die Zahlenmenge ein, so handelt es sich um die natürlichen Zahlen insgesamt: $a \in \mathbb{N}$. Bei bestimmten Häufigkeitszählungen – etwa von Maschinen als Produktionsfaktoren – kommt auch in der Ökonomie die Menge der natürlichen Zahlen vor.

Dies ist zumindest die unseres Wissens übliche Abgrenzung der natürlichen Zahlen; in manchen Lehrbüchern finden Sie die natürlichen Zahlen auch ohne die Null definiert.

In älteren Zahlensystemen – wie etwa dem Zahlensystem des Römischen Reiches – fehlte die Ziffer 0. Damit waren bestimmte Rechenoperationen nicht möglich, wie etwa die mathematische Darstellung der Differenz aus gleichen Werten. Man kann also sagen, dass die Verwendung der Ziffer 0 den Fortschritt der Mathematik beförderte. Manchmal sind Nullen also doch zu etwas gut …

Natürliche Zahlen haben – wie ersichtlich – keine Nachkommastellen, oder meinen Sie, dass es sinnvoll ist, etwa bei einer Volkszählung halbe oder gar nur Drittelmenschen zu zählen? Tun Sie das bitte niemals; ansonsten würden man Sie sehr schnell – und sicherlich nicht zu Unrecht – für unzurechnungsfähig halten!

Ganze Zahlen: Nichts Halbes

Werden bei einer bestimmten Fragestellung zusätzlich zu den natürlichen Zahlen die negativen ganzen Zahlen berücksichtigt, erhalten Sie – Sie haben es sich sicherlich schon gedacht – den Zahlenbereich der *ganzen Zahlen:* $a \in \mathbb{Z}$; auch dies können Sie in Text übersetzen, und zwar so: a ist Element des Zahlenbereichs der ganzen Zahlen. Ein ökonomisches Beispiel für ganze Zahlen – also insbesondere für negative ganze Zahlen – ist die Betrachtung der individuellen Vermögenslage, zumindest dann, wenn Sie Cent-Beträge vernachlässigen, sich also nur auf Euro-Beträge beziehen. In diesem Fall wären negative ganzzahlige Vermögenswerte mit einem negativen Vermögen gleichzusetzen.

Dies bedeutet inhaltlich, dass die Schulden – Ökonomen drücken sich etwas vornehmer aus und sprechen von Verbindlichkeiten – das Bruttovermögen übersteigen. Jemand, der also zum Beispiel ein Vermögen von –10.000 Euro hat, hat mehr Verbindlichkeiten (= Schulden) als positive Vermögenswerte.

BEISPIEL

Herr Müller hat bei seiner Bank einen Kredit in Höhe von 20.000 Euro aufgenommen, hat demnach bei seiner Bank Schulden in dieser Höhe. Er verfügt des Weiteren annahmegemäß nur über Sachvermögen (etwas Schmuck, ein paar Fahrräder und Ähnliches) im Wert von 5.000 Euro. Sein Gesamtvermögen ist netto folglich gleich 5.000 Euro minus 20.000 Euro, also gleich –15.000 Euro, das heißt negativ.

Rationale Zahlen: Wenn Brüche ins Spiel kommen

Verhältnisse aus ganzen Zahlen finden sich im Zahlenbereich der *rationalen Zahlen:* $a \in \mathbb{Q}$; auch hier in Worten: a ist Element der rationalen Zahlen. Interessieren Sie sich zum Beispiel für den Output an Quietscheentchen pro Arbeitskraft und haben Sie mit fünf Arbeitskräften 200 Quietscheentchen hergestellt, so sind dies

$$\frac{200 \text{ Quietscheentchen}}{5 \text{ Arbeitskräfte}} = 40 \text{ Quietscheentchen pro Arbeitskraft.}$$

Haben Sie hingegen mit fünf Arbeitskräften 163 Quietscheentchen hergestellt, bedeutet das

$$\frac{163 \text{ Quietscheentchen}}{5 \text{ Arbeitskräfte}} = 32{,}6 \text{ Quietscheentchen pro Arbeitskraft.}$$

Sie sehen, dass bei den rationalen Zahlen in Dezimaldarstellung auch Nachkommastellen möglich sind.

Rationale Zahlen können auch unendlich lange Dezimaldarstellungen haben. Gehen Sie zum Beispiel davon aus, dass drei Arbeitskräfte 700 Quietscheentchen pro Stunde produzieren, dann bedeutet das einen Output von $\frac{700}{3} = 233\frac{1}{3}$ Entchen pro Stunde. Die Dezimaldarstellung hiervon ist 233,333333333333333… und so weiter bis zum Jüngsten Tag. Dies notiert man auch als $233,\overline{3}$ und sagt »233 Komma Periode 3«.

Übrigens sind alle natürlichen Zahlen auch ganze Zahlen und alle ganzen Zahlen auch rationale Zahlen (teilen Sie einfach durch 1!).

Irrationale Zahlen: Euler, Kreiszahl und Co.

Wenn Sie jedoch auf eine Dezimalzahl stoßen, die *nicht* als Verhältnis aus zwei ganzen Zahlen dargestellt werden kann, befinden Sie sich im Zahlenraum der *irrationalen Zahlen*. Beispiele für eine irrationale Zahl sind die *Euler'sche Zahl* $e = 2{,}71828\ldots$ oder die *Kreiszahl* $\pi = 3{,}14159\ldots$

Reelle Zahlen: Rational, irrational, ganz egal

Die Gesamtmenge aller rationalen und irrationalen Zahlen stellt den Zahlenraum der *reellen Zahlen* dar: $a \in \mathbb{R}$; in Worten: a ist ein Element des Zahlenraums der reellen Zahlen.

Komplexe Zahlen: Gar nicht so kompliziert

Eine Erweiterung über den Zahlenraum der reellen Zahlen hinaus bildet der Zahlenbereich der *komplexen Zahlen:* $a \in \mathbb{C}$; in Worten: a ist ein Element der komplexen Zahlen.

Mit einer reellen Zahl ist die eigentlich ganz einfache Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar. Die Auflösung nach x ergibt nämlich: $x = \sqrt[2]{-1}$, und im Bereich der reellen Zahlen dürfen Sie nie und nimmer die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ziehen! Hier kommt jetzt die *imaginäre Zahl* i mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = (-1)$ ins Spiel, da mit ihr diese Bedingung lösbar ist.

Nehmen Sie die imaginäre Zahl i und alle ihre Vielfachen noch zum Zahlenraum der reellen Zahlen hinzu, stoßen Sie in den Zahlenraum der komplexen Zahlen vor. Grundsätzlich können komplexe Zahlen als $\alpha + \beta \cdot \mathrm{i}$ dargestellt werden (mit α und β als beliebigen reellen Zahlen). Mehr dazu gleich.

Alles auf einen Blick

Abbildung 1.1 stellt die verschiedenen Zahlenräume dar.

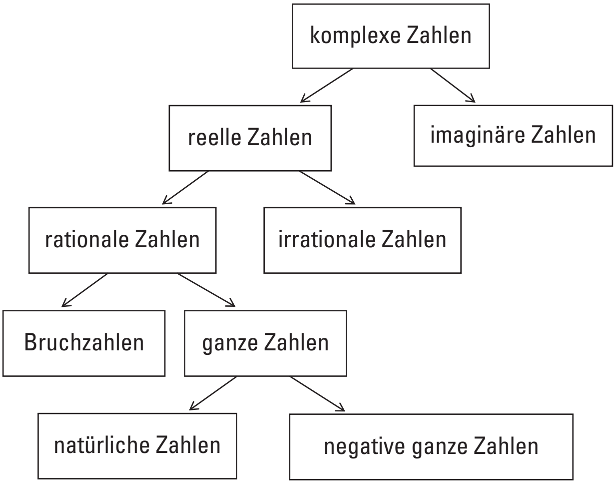

Abbildung 1.1: Die verschiedenen Zahlenräume

Wie aus Abbildung 1.1 hervorgeht, ist das *komplexe Zahlensystem* also vollständiger als das reelle Zahlensystem, weil es auch noch die imaginären Zahlen, also i und ihre Vielfachen enthält. Insgesamt können Sie dieses System der komplexen Zahlen nutzen, um reelle Zahlen, imaginäre Zahlen sowie Zahlen sowohl mit reellem als auch mit imaginärem Teil darzustellen. Das veranschaulichen wir Ihnen nachfolgend.

Die Bedeutung der komplexen Zahlen

Sie stellen sich vielleicht genau jetzt zwei wichtige Fragen: Wann brauchen Sie komplexe Zahlen, und wo begegnen Sie ihnen? Imaginäre Zahlen sind für die reale Welt genauso wichtig wie reelle Zahlen, aber ihre Anwendungen sind hinter sehr komplizierten Konzepten verborgen, wie etwa Chaostheorie oder Quantenmechanik. Darüber hinaus verwenden bestimmte Arten mathematischer Kunst komplexe Zahlen, nämlich die *Fraktale*. Das vielleicht berühmteste Fraktal ist die Mandelbrot-Menge. In der Ökonomie finden sich Anwendungen komplexer Zahlen zum Beispiel bei der Analyse von Konjunktur- oder Wachstumszyklen. Dort stehen sie dann im Zusammenhang mit Differenzialgleichungen (siehe Kapitel 10).

Lassen Sie uns bitte an dieser Stelle ausnahmsweise schon auf Kapitel 2 vorgreifen und beispielsweise die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ betrachten. Unter Verwendung der in Kapitel 2 näher besprochenen *abc*-Formel erhalten Sie (für den Grundausdruck $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$)

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{i}.$$

Beachten Sie, dass die *Diskriminante* (das heißt der Ausdruck $b^2 - 4ac$ unter der Wurzel) eine negative Zahl ist, was innerhalb der reellen Zahlen nicht zu lösen ist. Die ganz rechts dargelegte Lösung ist eine korrekte komplexe Lösung, genauer gesagt eine *komplexe Nullstelle.*

Manchmal gibt es Situationen, in denen Sie Operationen für reelle und imaginäre Zahlen gleichzeitig ausführen wollen; in diesem Fall stellen Sie beide Zahlen als komplexe Zahlen dar, um sie addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren zu können.

Betrachten Sie die folgenden drei Arten komplexer Zahlen:

- **Eine reelle Zahl als komplexe Zahl:** $3 + 0\mathrm{i}$

  Beachten Sie, dass der Imaginärteil dieses Ausdrucks 0 ist.

- **Eine imaginäre Zahl als komplexe Zahl:** $0 + 2\mathrm{i}$

  In diesem Ausdruck ist der Realteil 0.

- **Eine komplexe Zahl mit Realteil und Imaginärteil:** $1 + 4\mathrm{i}$

  Diese Zahl – und das ist der Normalfall in der Zahlenmenge $\mathbb{C}$ – kann nicht als rein reell oder rein imaginär beschrieben werden – daher der Begriff »komplex«.

Komplexe Zahlen können Sie genau wie reelle Zahlen arithmetisch bearbeiten, also Rechenoperationen mit ihnen ausführen. Sie müssen nur sorgfältig darauf achten, alle i zu berücksichtigen. Es ist nicht möglich, einen Realteil mit einem Imaginärteil durch Addition oder Subtraktion zu kombinieren, weil es sich nicht um ähnliche Terme (= mathematische Ausdrücke) handelt. Es ist also wichtig, sie separat voneinander zu behandeln.

Die folgende Liste stellt die möglichen Operationen mit komplexen Zahlen vor:

- **Um komplexe Zahlen zu addieren und zu subtrahieren**, kombinieren Sie einfach ähnliche Terme. Beispiel: $(3 - 2\mathrm{i}) - (2 - 6\mathrm{i}) = 3 - 2\mathrm{i} - 2 + 6\mathrm{i} = (3 - 2) + (-2 + 6)\mathrm{i} = 1 + 4\mathrm{i}$.

- **Um eine komplexe Zahl mit einer reellen Zahl zu multiplizieren**, multiplizieren Sie sowohl den reellen als auch den imaginären Teil der komplexen Zahl mit der reellen Zahl. Beispielsweise gehen Sie wie folgt vor, um die reelle Zahl 2 mit einer komplexen Zahl in Klammern zu multiplizieren: $2 \cdot (3 + 2 \cdot \mathrm{i}) = 6 + 4 \cdot \mathrm{i}$.

- Um das Produkt zweier komplexer Zahlen zu bilden, multiplizieren Sie einfach aus und beachten, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ ist:

  $(A + B \cdot \mathrm{i}) \cdot (C + D \cdot \mathrm{i}) = AC - BD + \mathrm{i}(AD + BC)$.

Natürlich können Sie komplexe Zahlen auch dividieren, die Regel dafür ist aber etwas unübersichtlich und wird im Folgenden auch nicht weiter benötigt.

An dieser Stelle dürfen wir Sie beruhigen: In der Ökonomenwelt beschränkt man sich in der Regel auf die reellen Zahlen!

Zahlensysteme

Zahlen lassen sich unterschiedlich darstellen. Je nach der »Basis« können Sie dabei verschiedene *Zahlensysteme* voneinander unterscheiden. Alle beschriebenen Zahlensysteme können unendlich viele Zahlen darstellen.

Dezimalsystem

Das verbreitetste und Ihnen sicherlich sehr vertraute Zahlensystem ist das *Dezimalsystem* (Zehnersystem), das auf den zehn *Ziffern* 0 bis 9 basiert. Aus den zehn Ziffern werden dabei Zahlen nach der *Rechenvorschrift* gebildet, dass die Ziffer an der niedrigsten Stelle einer Zahl mit 10^0 (also mit 1; Einerstelle), die Ziffer an der zweitniedrigsten Stelle mit 10^1 (also mit 10; Zehnerstelle), die Ziffer an der drittniedrigsten Stelle mit 10^2 (also mit 100; Hunderterstelle) multipliziert wird und so weiter. Die Zahl 386 kann demnach auch dargestellt werden als $3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$, da $3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ genau 386 ergibt. Nachkommastellen werden durch Multiplikation der ersten Nachkommastelle mit 10^{-1}, der zweiten Nachkommastelle mit 10^{-2} und so weiter erzeugt. Die Zahl 386,25 zum Beispiel ergibt sich als $3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$.

Binärsystem

Ein anderes Zahlensystem ist das *Binärsystem* (auch *Dualsystem* genannt). Es ist Ihnen vielleicht aus der elektronischen Datenverarbeitung am Computer (beziehungsweise aus der Wirtschaftsinformatik) bekannt und benutzt lediglich die beiden Ziffern 0 und 1. Eine Zahl des Binärsystems kann in eine Dezimalzahl überführt werden, indem die Binärziffer an der niedrigsten Rangstelle mit 2^0, an der zweitniedrigsten Rangstelle mit 2^1, an der drittniedrigsten Rangstelle mit 2^2 (und so weiter) multipliziert wird und das Ergebnis dann als Dezimalzahl notiert wird. Umgekehrt lässt sich die obige Dezimalzahl 386 wie folgt in eine Binärzahl umschreiben:

$$386 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

Die entsprechende Binärzahl lautet also 110.000.010. Auch im Binärsystem lassen sich Nachkommastellen darstellen, und zwar durch Multiplikation der ersten Nachkommastelle mit 2^{-1}, der zweiten Nachkommastelle mit 2^{-2} und so weiter. Die Zahl 386,25 wäre demnach gleich $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$; die Binärzahl lautet in diesem Fall folglich 110.000.010,01. Allerdings kann die Ermittlung von Nachkommastellen im Binärsystem ein langwieriger (und ziemlich langweiliger) Prozess sein. Beispielsweise ergibt die Dezimalzahl 386,24 in binärer Schreibweise 110.000.010,001.111.010.111.000.010.100.011.111; es ist dies eine Binärzahl mit sage und schreibe 27 Nachkommastellen! Für den betreffenden Nachkommabereich erhalten Sie in diesem Beispielsfall nämlich für den Dezimalausdruck 0,24: $0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 1 \cdot 2^{-8} + 0 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 1 \cdot 2^{-11} + 1 \cdot 2^{-12} + 0 \cdot 2^{-13} + 0 \cdot 2^{-14} + 0 \cdot 2^{-15} + 0 \cdot 2^{-16} + 1 \cdot 2^{-17} + 0 \cdot 2^{-18} + 1 \cdot 2^{-19} + 0 \cdot 2^{-20} + 0 \cdot 2^{-21} + 0 \cdot 2^{-22} + 1 \cdot 2^{-23} + 1 \cdot 2^{-24} + 1 \cdot 2^{-25} + 1 \cdot 2^{-26} + 1 \cdot 2^{-27}$.

Wenn Ihnen eine Näherungslösung für 386,24 im Sinne von 386,24023438 genügt, können Sie sich auch mit einer Binärzahl mit neun Nachkommastellen begnügen: 110.000.010,001.111.011.

Bei der Umwandlung einer Dezimal- in eine Binärzahl suchen Sie also zunächst die Zweierpotenz, die den Wert der Dezimalzahl gerade nicht übersteigt. Im obigen Beispiel ist dies $2^8 = 256$ ($2^9 = 512$ ist zu groß). Anschließend prüfen Sie schrittweise, ob die jeweils nächstniedrigere Zweierpotenz gerade noch in die Dezimalzahl »hineinpasst«. Ist dies der Fall, multiplizieren Sie auch diese Zweierpotenz mit 1, andernfalls mit 0. Dieses Vorgehen setzen Sie bei einer Dezimalzahl ohne Nachkommastellen bis zur Zweierpotenz 2^0 fort. Bei den Nachkommastellen beginnen Sie eine entsprechende 0-1-Betrachtung bei 2^{-1} und setzen dieses Vorgehen so lange fort, bis sich alle Nachkommastellen der Dezimalzahl ergeben.

Einfacher geht das Ganze, indem Sie die Dezimalzahl durch 2 dividieren und bei einem Rest eine 1 beziehungsweise bei keinem Rest eine 0 festhalten. Das sich jeweils ergebende Dezimalergebnis dividieren Sie dann jeweils wieder durch 2 und schreiben eine 1 (bei einem Rest) beziehungsweise eine 0 (bei keinem Rest) hin. Ganz am Ende lesen Sie die Rest-Spalte von unten nach oben und erhalten so die entsprechende Binärzahl.

Beispiel:

386 : 2 = 193	Rest 0
193 : 2 = 96	Rest 1
96 : 2 = 48	Rest 0
48 : 2 = 24	Rest 0
24 : 2 = 12	Rest 0
12 : 2 = 6	Rest 0
6 : 2 = 3	Rest 0
3 : 2 = 1	Rest 1
1 : 2 = 0	Rest 1

Die Binärzahl lautet also, von unten nach oben gelesen, 110.000.010.

Hexadezimalsystem

Ein weiteres, ebenfalls in der Datenverarbeitung verbreitetes Zahlensystem ist das *Hexadezimalsystem,* das aus 16 Ziffern besteht. Gewöhnlich werden zu seiner Darstellung die zehn Ziffern des Dezimalsystems 0 bis 9 zuzüglich der Buchstaben A bis F verwendet. Die einzelnen Rangstellen einer Hexadezimalzahl werden jeweils mit 16^n multipliziert, wobei ein nichtnegativer Wert von n für Stellen vor dem Komma und ein negativer Wert von n für Stellen nach dem Komma stehen. Die obige Dezimalzahl 386 kann wie folgt in eine Hexadezimalzahl umgewandelt werden:

$$386 = 1 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0.$$

Die entsprechende Hexadezimalzahl lautet also 182.

Alternativ hätten Sie die Dezimalzahl 386 durch Division mit 16 in die Hexadezimalzahl 182 umwandeln können:

$386 : 16 = 24$	Rest 2
$24 : 16 = 1$	Rest 8
$1 : 16 = 0$	Rest 1

Auch hier wird von unten nach oben gelesen, die Hexadezimalzahl lautet also 182.

Ein anderes Beispiel für Umrechnungen zwischen den einzelnen Systemen ist die Binärzahl 1111. Sie entspricht der Dezimalzahl 15 (da $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 15$) und der Hexadezimalzahl F (da $15 \cdot 16^0 = 15$ und die 15 im Hexadezimalsystem durch F symbolisiert wird).

Einfacher geht's bezüglich der Umwandlung einer Binär- in eine Hexadezimalzahl so: Bilden Sie Viererblöcke für die Binärzahl, wobei Sie zur Not die ersten Stellen mit führenden Nullen auffüllen. Gehen Sie beispielsweise von der Binärzahl 110000010 aus. Geblockt (in Viererblöcke) sieht diese Zahl so aus (mit drei führenden Nullen): 0001 1000 0010. In jedem dieser Blöcke multiplizieren Sie jeweils die letzte Ziffer mit 1 ($= 2^0$), die vorletzte mit 2 ($= 2^1$), die zweite mit 4 ($= 2^2$) und die erste mit 8 ($= 2^3$). Im vorliegenden Beispiel gilt demnach für den ersten Block: $0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1$, für den zweiten Block: $1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 8$ und für den dritten Block: $0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$. Die zugehörige Hexadezimalzahl lautet also 182.

Wir dürfen Sie an dieser Stelle wieder mal beruhigen: Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich durchgängig auf das Ihnen vertraute Dezimalsystem und dessen Rechenregeln, weil dieses System unserem Alltagshandeln zugrunde liegt und daher auch wirtschaftsbezogene Anwendungen typischerweise daran gekoppelt sind.

Grundlegende Rechenoperationen und -regeln

Die Elemente eines Zahlenraums können durch die grundlegenden Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens miteinander verbunden werden. Dabei sind das Subtrahieren und das Dividieren im Grunde genommen Unterformen des Addierens beziehungsweise des Multiplizierens.

Beim Subtrahieren addieren Sie nämlich zu der Zahl, von der etwas abgezogen werden soll (dem *Minuenden*), den Wert, der abgezogen werden soll (den *Subtrahenden*), als negative Zahl. Während das Ergebnis der Addition aus mehreren Zahlen (*Summanden*) als *Summe* bezeichnet wird, heißt das Ergebnis der Subtraktion *Differenz*. Das Dividieren einer Zahl (des *Dividenden*) durch eine andere Zahl (den *Divisor*) können Sie sich auch als *Produkt* aus der Multiplikation zweier *Faktoren* vorstellen, und zwar des Dividenden und des Kehrwerts vom Divisor. Ganz simpel formuliert, erhalten Sie den Kehrwert eines Bruchs durch Vertauschen von Zähler und Nenner des Bruchs. (Weiteres zum Kehrwert folgt weiter hinten in diesem Kapitel.) So ist zum Beispiel der Kehrwert von $\frac{5}{1}$ nichts anderes als $\frac{1}{5}$. Wenn Sie also 10 durch 5 dividieren möchten, können Sie das als $10 : 5 = 2$ oder als $10 \cdot \frac{1}{5} = 2$ darstellen. Das Ergebnis der Division bezeichnet man als *Quotienten* (manchmal bedeutet dieses Wort aber auch den Rechenausdruck beziehungsweise einfach einen Bruch).

Elementare Gesetze

Hinsichtlich der grundlegenden Rechenoperationen gelten für (maximal) vier Zahlen *a, b, c* und *d* die nachfolgenden Gesetze. Sie bilden gewissermaßen die Grundlage aller weiteren Rechenoperationen.

Kommutativgesetz

Das *Kommutativgesetz* gibt an, dass es sowohl bei der elementaren Addition als auch bei der elementaren Multiplikation zweier Zahlen *a* und *b* unerheblich ist, welche der beiden Zahlen bei der Addition beziehungsweise bei der Multiplikation zuerst genannt wird. Es wird daher umgangssprachlich mitunter auch als *Vertauschungsgesetz* bezeichnet:

$a + b = b + a\ b$ beziehungsweise $a \cdot b = b \cdot a$.

Beispielsweise sind die Ergebnisse von $4 + 5$ und von $5 + 4$ (jeweils gleich 9) ebenso identisch wie die Ergebnisse von $4 \cdot 5$ und von $5 \cdot 4$ (jeweils gleich 20).

Assoziativgesetz

Laut dem *Assoziativgesetz* – oder auch *Klammervertauschungsgesetz* – ist die Klammersetzung bei der reinen Addition beziehungsweise bei der reinen Multiplikation dreier Zahlen *a, b* und *c* unerheblich:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ beziehungsweise $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Demnach sind zum Beispiel $(4 + 5) + 6$ und $4 + (5 + 6)$ (jeweils gleich 15) ebenso gleichwertig zueinander wie $(4 \cdot 5) \cdot 6$ und $4 \cdot (5 \cdot 6)$ (jeweils gleich 120).

Distributivgesetz

Verknüpfen Sie Addition und Multiplikation miteinander, gilt zum einen die Regel, dass Punkt- vor Strichrechnung geht. Das bedeutet, dass zuerst die Multiplikation und erst danach die Addition durchzuführen ist. Zum anderen ergibt sich hieraus, dass gemäß dem *Distributivgesetz* – umgangssprachlich: *Ausklammerungsgesetz* – ein additiver Klammerausdruck wie folgt aufgelöst wird:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Beispielsweise ist $4 \cdot (5 + 6) = 4 \cdot 11$ ebenso gleich 44 wie $4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 20 + 24$.

Beachten Sie bitte – hier am Beispiel des Distributivgesetzes beziehungsweise generell für gemischte Additions-/Multiplikationsausdrücke – zwei grundlegende Rechenregeln:

1. **Klammern gehen vor:** Zuerst berechnen Sie eingeklammerte Ausdrücke und danach alles andere.
2. **Punkt vor Strich** (wie schon oben angemerkt): Bei der rechten Seite des Distributivgesetzes werden zuerst die beiden Produkte $a \cdot b$ und $a \cdot c$ berechnet, und erst anschließend werden deren Ergebnisse addiert.

Die Multiplikation auf der linken Seite wird beim Distributivgesetz, wie ersichtlich, in zwei Ausdrücke auf der rechten Seite aufgelöst. Derartige Ausdrücke nennt man in der Mathematik Terme.

Betrachten Sie die Mathematik als eine eigene Sprache, so sind die Zahlen (oder allgemeiner die Elemente einer Menge) die Buchstaben dieser Sprache, und Terme sind in dieser Sicht die Wörter. Die Syntax der »Mathesprache« wird darauf aufbauend durch die Verknüpfungen der Terme – etwa durch Pluszeichen, Malpunkte und Klammern – dargestellt.

Faktorisieren – könnte nützlich sein

Das eben präsentierte Ausklammern wird mit einem Fremdwort *Faktorisieren* genannt. Faktorisieren bedeutet, eine Summe oder eine Differenz durch Ausklammern *gemeinsamer* Faktoren in ein Produkt zu verwandeln. Das heißt: Mathematische Ausdrücke wie etwa $5xy + 10yz$ können Sie zu dem Ergebnis $5y(x + 2z)$ faktorisieren.

Der erste Schritt bei der Faktorisierung eines beliebigen Ausdrucks besteht darin, den *größten gemeinsamen Teiler*, manchmal als ggT abgekürzt, herauszuziehen. Beispielsweise enthält jeder der drei Summanden in dem Term $8x^3y^4 + 12x^2y^5 + 20x^4y^3z$ den Teiler $4x^2y^3$; er kann also wie folgt herausgezogen werden: $4x^2y^3(2xy + 3y^2 + 5x^2z)$. Damit wird aus der ursprünglichen Summe aus drei Termen (deren jeder einzelne ein Produkt war) ein Produkt aus vier Faktoren 4, x^2, y^3 und $(2xy + 3y^2 + 5x^2z)$.

Achten Sie beim Faktorisieren einfach immer darauf, nach einem größten gemeinsamen Teiler zu suchen, der herausgezogen werden kann.

Bruchrechnung: Zahlen brechen

Das Verhältnis aus zwei Zahlen oder Termen stellt – was Sie sicherlich schon wissen (siehe zum Beispiel die obigen Anmerkungen!) – einen *Bruch* dar. Einen Bruch nennt man auch einen *Quotienten*. Der obere Teil des Bruchs heißt *Zähler*, der untere Teil *Nenner*. Ein Bruch mit Zahlen in Zähler und Nenner ist demnach eine rationale Zahl, kann aber auch eine natürliche Zahl repräsentieren, zum Beispiel die Zahl 5 via $\frac{5}{1}$.

Grundwert und Prozentwert

Sie können einen Bruch auch als Prozentangabe schreiben, indem Sie den Wert mit 100 multiplizieren und ein Prozentzeichen anfügen, zum Beispiel $\frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow 75\%$. In diesem Zusammenhang heißen der Nenner auch Grundwert, der Zähler Prozentwert und die Zahl vor dem Prozentzeichen Prozentsatz. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Anteilswerten.

Nie durch null teilen

Die erste Regel für Brüche ist ganz einfach, aber sehr wichtig, weil sie in der Welt der Mathematik immer wieder vorkommt:

Der Nenner eines Bruchs darf *nie* null sein.

$\frac{0}{5}$ ist null, aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert. Sie erkennen sicherlich ganz leicht, warum $\frac{5}{0}$ undefiniert ist, wenn Sie betrachten, wie die Division funktioniert, zum Beispiel

$$\frac{8}{2} = 4.$$

Diese Berechnung besagt natürlich, dass 2 viermal in 8 passt; mit anderen Worten: 2 + 2 + 2 + 2 = 8. Aber wie viele Nullen bräuchten Sie, um 5 zu erhalten? Eine sinnvolle Antwort ist nicht möglich; deshalb können Sie 5 (oder irgendeine andere Zahl) nicht durch null dividieren.

Der Kehrwert: Auf den Kopf gestellt

Der *Kehrwert* einer Zahl (oder eines Ausdrucks) ist ihr multiplikatives *Inverses* – eine komplizierte Art, um einfach zu sagen, dass irgendetwas mit seinem Kehrwert multipliziert gleich 1 ist. Um den Kehrwert eines Bruchs zu erhalten, kehren Sie ihn einfach um. Hätten Sie das gedacht? Na klar, hätten Sie das gedacht! Der Kehrwert von $\frac{3}{4}$ ist also $\frac{4}{3}$, der Kehrwert von 6 (was Sie auch als $\frac{6}{1}$ schreiben können) ist $\frac{1}{6}$, und der Kehrwert von $(x - 2)$ ist $\frac{1}{x-2}$.

Gleichnamige Brüche addieren: Die Bedeutung des kleinsten gemeinsamen Nenners

Addieren können Sie nur Brüche mit gleichem Nenner – man spricht dann von *gleichnamigen Brüchen*. Sind die Brüche nicht gleichnamig, müssen sie erst auf den schon sprichwörtlichen gemeinsamen Nenner gebracht werden, und zwar so:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Sind nämlich die Nenner zweier Brüche voneinander verschieden, so werden die jeweiligen Zählerwerte insofern unzulässig miteinander verglichen, als sie auf unterschiedlichen Bezugsgrößen fußen.

BEISPIEL

Wenn zum Beispiel die Anteilswerte 75 Prozent und 20 Prozent jeweils in Bruchform miteinander addiert werden sollen, bedeutet das die Addition von $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{5}$. Würden Sie einfach $\frac{3+1}{4+5}$ rechnen, ergäbe dies einen Bruch von $\frac{4}{9}$ und damit einen Prozentwert von etwas weniger als der Hälfte. Der korrekte Wert der Anteilswertaddition lautet aber 95 Prozent. Ihn erhalten Sie in Bruchschreibweise, indem Sie den ersten Bruch mit dem Nennerwert des zweiten Bruchs und den zweiten Bruch mit dem Nennerwert des ersten Bruchs multiplizieren:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{15 + 4}{20} = \frac{19}{20}.$$

Dieser Bruch entspricht genau 95 Prozent, was Sie durch Erweiterung des vorstehenden Bruchergebnisses mit dem Faktor 5 (auf 100) erkennen: $\frac{19 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{95}{100}$.

Wie genau addiert man also zwei Brüche mit unterschiedlichen Nennern richtig? Der Trick ist, wie Sie gesehen haben, das Problem »Addition bei verschiedenen Nennern« auf die einfachere Fragestellung »Addition bei gleichen Nennern« zurückzuführen. Dazu verwenden Sie die Multiplikation von Brüchen – genauer gesagt *erweitern* Sie die beiden einzelnen Brüche so, dass die neuen Nenner gleich sind, wie das auch schon am Beispiel eben gezeigt worden ist.

1. **Suchen Sie den *kleinsten gemeinsamen Nenner* oder *Hauptnenner* und wandeln Sie die Brüche entsprechend um.**

   Bei der Additionsaufgabe $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ ist der kleinste gemeinsame Nenner 5 mal 8 gleich 40. Wandeln Sie also die Brüche in Vierzigstel um, indem Sie den ersten Bruch mit $\frac{8}{8}$ und den zweiten mit $\frac{5}{5}$ erweitern:

   $$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{5}.$$

   $8 \cdot 5$ ist dasselbe wie $5 \cdot 8$ (= Kommutativgesetz!), deshalb können Sie die Reihenfolge umkehren. Diese Brüche haben den Nenner 40, aber lassen Sie uns hier die $5 \cdot 8$ in den Nennern vorübergehend beibehalten. Jetzt haben die beiden Brüche den gleichen Nenner, Sie können sie also addieren.

Eigentlich funktioniert bei der Addition von Brüchen jeder gemeinsame Nenner – aber der Hauptnenner führt beim Rechnen zu den überschaubarsten Zahlen.

2. **Addieren Sie die Zähler und behalten Sie den gemeinsamen Nenner unverändert bei:**

   $$= \frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 8}.$$

   Sie sehen, dass dies gleich $\frac{16 + 15}{40}$ oder $\frac{31}{40}$ ist.

Jetzt können Sie wieder die ursprüngliche Aufgabenstellung betrachten, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Hier steht statt der 2 ein a, statt der 5 ein b, statt der 3 ein c und statt der 8 ein d. Jetzt führen Sie genau dieselben Schritte aus wie bei der Addition von $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$. Und hier die fertige Lösung (die wir Ihnen zu Beginn dieses Unterabschnitts ja auch schon hingeschrieben hatten):

$$\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Noch eine Bemerkung zum Hauptnenner: Im Beispiel von eben ist der Hauptnenner 40 einfach das Produkt der einzelnen Nenner 5 und 8. Im folgenden Beispiel können Sie natürlich genauso verfahren:

$$\frac{7}{375} + \frac{11}{225} = \frac{7 \cdot 225}{375 \cdot 225} + \frac{11 \cdot 375}{225 \cdot 375} = \frac{1.575}{84.375} + \frac{4.125}{84.375} = \frac{5.700}{84.375}.$$

Aber dabei erhalten Sie in den Zählern sehr große Zahlen, und das Kürzen gemeinsamer Faktoren aus Zähler und Nenner allein ist schon eine Sisyphusarbeit! Einfacher ist es daher, sich zu überlegen, mit welchen Brüchen Sie *mindestens* erweitern müssen, um zu einem gemeinsamen Nenner zu kommen. Die Idee ist dabei, eine Zahl zu finden, die möglichst klein ist und trotzdem die beiden einzelnen Nenner als Faktoren enthält. Nun sind $375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ und $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Sie zerlegen also die einzelnen Nenner in ihre *Primfaktoren,* das heißt in Produkte aus ausschließlich *Primzahlen*.

Eine *Primzahl* ist eine Zahl, die nur durch sich selbst – und durch 1 – teilbar ist, wie zum Beispiel 2, 3, 5, 7, 11 und so weiter.

Im Beispiel enthält die kleinste Zahl, die sowohl von 375 als auch von 225 geteilt wird, damit zweimal den Faktor 3 und dreimal den Faktor 5; sie lautet also $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1.125$·– das ist der gesuchte Hauptnenner. Dem ersten Nenner fehlt zum Hauptnenner noch der Faktor 3, dem zweiten Nenner der Faktor 5. Damit müssen Sie den ersten Bruch nur mit $\frac{3}{3}$ und den zweiten Bruch nur mit $\frac{5}{5}$ erweitern:

$$\frac{7}{375} + \frac{11}{225} = \frac{7 \cdot 3}{375 \cdot 3} + \frac{11 \cdot 5}{225 \cdot 5} = \frac{21}{1.125} + \frac{55}{1.125} = \frac{76}{1.125}.$$

Das ist doch ganz erheblich einfacher als das Multiplizieren der einzelnen Nenner!

Bei der Subtraktion von Brüchen gehen Sie genau wie bei der Addition vor, außer dass Sie hier subtrahieren statt addieren.

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen: Viel leichter als die Addition!

Das Addieren ist üblicherweise einfacher als das Multiplizieren, aber bei Brüchen gilt das Gegenteil. Die *Multiplikation von Brüchen* ist nämlich ein Kinderspiel – Sie multiplizieren einfach alle Zähler miteinander und ebenso alle Nenner miteinander:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Multiplizieren Sie etwa $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{4}$ miteinander, so können Sie dies so verstehen, dass Sie aus einer Gesamtmenge an Elementen zunächst ein Fünftel davon und dann noch einmal drei Viertel dieses Fünftels berücksichtigen. Befinden sich zum Beispiel unter 60 Arbeitnehmern genau zwölf Jugendliche und Sie interessieren sich nur für diese Jugendlichen, haben Sie genau ein Fünftel der 60 Personen berücksichtigt. Nun stellen Sie die zwölf Jugendlichen in drei Viererreihen nebeneinander auf und greifen sich aus jeder Viererreihe drei Jugendliche heraus, sodass Sie insgesamt neun Jugendliche ausgewählt haben. Sie haben damit aus 60 Arbeitnehmern neun Jugendliche ausgewählt. Als Bruch sind dies $\frac{9}{60} = \frac{3}{20}$, was Sie auch durch Multiplikation der Brüche herausbekommen: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$.

Die *Division von Brüchen* umfasst noch einen zusätzlichen Schritt: Sie kehren den zweiten Bruch um und multiplizieren dann wie eben beschrieben – etwa so:

$$\frac{3}{10} : \frac{4}{5} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{40}.$$

Jetzt kürzen Sie Zähler und Nenner mit 5 und erhalten das Ergebnis $\frac{3}{8}$.

Beachten Sie, dass Sie auch vor der Multiplikation hätten kürzen können. Weil 5 einmal in 5 und in 10 zweimal passt, können Sie eine 5 kürzen:

$$\frac{3}{{}_2\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}^1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Das ist geschickt, weil dadurch die Zahlen, die Sie anschließend miteinander multiplizieren müssen, relativ klein sind.

Doppelbrüche: Doppelt hält besser

Die ursprüngliche Aufgabenstellung des Beispiels von eben hätten Sie auch als $\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}}$ darstellen können.

Wenn Sie *Doppelbrüche* in dieser Art schreiben, müssen Sie darauf achten, den Hauptbruchstrich sauber zu kennzeichnen, indem Sie ihn länger machen als die anderen beiden Bruchstriche. Schauen Sie sich folgendes Beispiel an:

$$\frac{\frac{4}{2}}{\frac{9}{3}} = \frac{2}{3}; \quad \frac{4}{\frac{2}{\frac{9}{3}}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Es kommt also darauf an, was Sie zuerst und was Sie danach dividieren. Daher benötigt man eine Vereinbarung, an die Sie sich bitte halten, und die lautet hier: Die Bruchstriche werden der Länge nach abgearbeitet: der (oder die) kürzeste(n) zuerst, der längste zuletzt.

Brüche kürzen

Vorstehend haben Sie bereits gesehen, dass Sie Brüche durch *Kürzen* übersichtlicher darstellen können. Sie sollten also genau wissen, was Kürzen ist und wie es ausgeführt wird.

Im Bruch $\frac{x^5y^2}{x^3z}$ können drei gemeinsame Faktoren x aus dem Zähler und aus dem Nenner gekürzt werden, wodurch sich der vereinfachte Bruch $\frac{x^2y^2}{z}$ ergibt. Wenn Sie die x ausschreiben, ohne Exponenten zu verwenden, sehen Sie deutlicher, wie das Ganze funktioniert:

$$\frac{x^5y^2}{x^3z} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{x \cdot x \cdot x \cdot z}.$$

Jetzt kürzen Sie dreimal den Faktor x aus dem Zähler und aus dem Nenner,

$$\frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot z},$$

und Sie erhalten

$$\frac{x \cdot x \cdot y \cdot y}{z} = \frac{x^2 y^2}{z}.$$

Kürzen eines Bruchs ist also einfach die Umkehrung des Erweiterns, das Sie ja bei der Addition von Brüchen bereits kennengelernt haben.

Natürlich wissen Sie all das bereits – aber Wiederholung schadet ja bekanntlich nie: Kürzen kann man, wenn im Zähler und Nenner eines Bruchs jeweils ein *Produkt* von Zahlen (oder Variablen) steht, nicht aber bei einer *Summe* oder einer *Differenz*! Sehen Sie sich dazu das folgende Beispiel an:

$$\frac{1+2}{1+4} \neq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Das richtige Ergebnis ist $\frac{3}{5} = 0{,}6$ und nicht $\frac{1}{2} = 0{,}5$: Knapp daneben ist leider auch vorbei! Ein einziges Gegenbeispiel genügt aber schon, um eine Rechenregel (hier das Kürzen aus Summen) zu disqualifizieren! Merken Sie sich also:

»Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!«

Ausdruck versus Gleichung

Um es noch einmal zu sagen: Ein *algebraischer Ausdruck* oder einfach ein Ausdruck oder ein *Term* ist so etwas wie $x \cdot y \cdot z$ oder $a^2 \cdot p^3 \cdot \sqrt{q} - 6$, also grundsätzlich alles ohne ein Gleichheitszeichen. Wenn ein Gleichheitszeichen enthalten ist, handelt es sich um eine *Gleichung*. Das Kürzen funktioniert bei Termen genau wie bei einzelnen Variablen.

Ausdrücke (Terme) verhalten sich immer genau wie Variablen.

Wenn also jedes x in der obigen Aufgabenstellung durch $(xyz - q)$ ersetzt wird, erhalten Sie

$$\frac{(xyz-q)^5 y^2}{(xyz-q)^3 z}.$$

Und jetzt können drei der Terme $(xyz - q)$ aus dem Zähler und dem Nenner gekürzt werden, so wie Sie oben die drei x gekürzt haben. Das vereinfachte Ergebnis lautet:

$$\frac{(xyz-q)^2 y^2}{z}.$$

Sind Sie jetzt verwirrt? Im Zähler und Nenner tritt doch ein Minuszeichen auf – sind das also nicht Differenzen? (»Aus Differenzen und Summen …«) Nein! Denn es kommt auf die *letzte* Rechenoperation an, die Sie bei einer Berechnung ausführen würden! Stellen Sie sich vor, Sie wollten den Zähler für, sagen wir, $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$ und $q = 4$ ausrechnen. Sie würden dann die Klammer als Erstes berechnen (Ergebnis: 2), dann quadrieren ($2^2 = 4$ und $3^2 = 9$) und *zuletzt* die beiden Faktoren 4 und 9 multiplizieren. Weil Sie also *zuletzt* multipliziert haben, stellt der Ausdruck ein Produkt – und keine Differenz – dar. Das können Sie auch als Regel aufschreiben. Und genau das tun wir jetzt gleich!

Die Multiplikationsregel

Jetzt wissen Sie, *wie* man kürzt. Ebenso wichtig ist zu wissen, *wann* man kürzt.

Sie dürfen in einem Bruch nur dann kürzen, wenn Zähler und Nenner jeweils *Produkte* sind.

Das Kürzen ist also erlaubt in Brüchen wie dem folgenden:

$$\frac{a^2b^3(xy-pq)^4(c+d)}{ab^4z(xy-pq)^3}.$$

Zähler und Nenner sind jeweils Produkte mehrerer Faktoren, und damit können Sie kürzen: ein a, drei b und dreimal den Ausdruck $(xy - pq)$. Und hier ist das Ergebnis:

$$\frac{a(xy-pq)(c+d)}{bz}.$$

Im folgenden Beispiel steht hingegen im Zähler – wegen der harmlos aussehenden 1 – eine Summe:

$$\frac{a^2b^3(xy-pq)^4(c+d)+1}{ab^4z(xy-pq)^3}.$$

Deswegen kann dieser Bruch *nicht* gekürzt werden.

Manchmal können Sie die Summen (oder Differenzen) in Zähler und Nenner aber in Produkte umformen (Sie *faktorisieren* Zähler und Nenner), und danach können Sie kürzen. Betrachten Sie dazu das folgende Beispiel:

$$\frac{x^2y^3+xy^2z}{x^3y^2z-x^2y^2z^3}=\frac{x\cdot y^2\cdot(xy+z)}{x^2\cdot y^2\cdot z\cdot(x-z^2)}=\frac{xy+z}{x\cdot z\cdot(x-z^2)}.$$

Das ist doch viel übersichtlicher als der Ausgangsausdruck, nicht wahr?

Der Betrag: Absolut einfach

Lassen Sie uns nun zu einer weiteren wichtigen Operation für Zahlen beziehungsweise Terme kommen: Der *Absolutwert* oder *Betrag* macht eine negative Zahl zu einer positiven Zahl und bewirkt nichts für eine positive Zahl oder für null. Ein paar Beispiele sind:

$|-6| = 6$, $|3| = 3$ und $|0| = 0$.

Etwas komplizierter ist das Ganze mit Variablen. Wenn x gleich null oder positiv ist, bewirken die Striche für den Betrag nichts, und damit ist

$$|x| = x.$$

Ist x dagegen negativ, ist der Betrag von x positiv, und es ist

$$|x| = -x \text{ beziehungsweise } |-x| = x.$$

Ist beispielsweise $x = -5$, dann gilt $|-5| = -(-5) = 5$.

Wenn Sie in einer Formel die Betragsstriche auflösen möchten und nicht wissen, welchen Wert die Variable (oder der Term) in den Betragsstrichen hat, müssen Sie eine *Fallunterscheidung* durchführen, zum Beispiel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \text{ ist,} \\ -x, & \text{falls } x < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{falls } x-3 \geq 0, \text{ also } x \geq 3 \text{ ist,} \\ -(x-3), & \text{falls } x-3 < 0, \text{ also } x < 3 \text{ ist.} \end{cases}$$

Der Betrag einer Zahl ist geometrisch ihr *Abstand* vom Ursprung auf der Zahlengeraden: Die Zahlen 4 und -4 haben beide den Betrag 4 – das ist gerade ihr Abstand vom Ursprung auf der Zahlengeraden. Genauso ist $|a-b|$ der Abstand der Zahlen a und b auf dem Zahlenstrahl. Beträge finden Sie in der Ökonomie beispielsweise bei der Berechnung sogenannter (Eigen-)Preiselastizitäten der Güternachfrage. Typischerweise ergibt sich hier ein negativer Wert – in dem Sinne, dass eine Preis*erhöhung* eine *Reduzierung* der nachgefragten Gütermenge nach sich zieht. Ökonomen denken aber gerne positiv, und so verwandeln sie das resultierende Minuszeichen bei der Elastizität mittels eines Betragsstrichs in eine positive Zahl!

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Wir haben in diesem Kapitel bereits von dem Begriff der Potenzen Gebrauch gemacht, ohne ihn aber näher erläutert zu haben. Dies sei hiermit nachgeholt: Grundsätzlich – und wie aus der Schulmathematik bekannt – ist eine *Potenz* schlicht und ergreifend dadurch gekennzeichnet, dass Sie eine bestimmte Zahl mehrmals mit sich selbst multiplizieren. Die betreffende Zahl nennt man die *Basis*, und die Anzahl der Multiplikationen »mit sich selbst« bildet den *Exponenten* der Potenz. Für n Multiplikationen einer Zahl a mit sich selbst erhalten Sie demnach die Potenz a^n. Bei einer negativen Basis (also bei $-a$) gilt: Ist n gerade, ergibt sich als Ergebnis ein positiver Wert (weil »minus mal minus gleich plus« gilt). Ist n hingegen ungerade, ist das Ergebnis negativ.

Dazu geben wir Ihnen die folgenden einfachen Beispiele:

$$-3^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot 9 = 81;$$

$$-3^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27.$$

Möchten Sie für einen vorgegebenen Potenzausdruck – bei gleichfalls gegebenem Exponenten – die Basis ermitteln, so ziehen Sie die *Wurzel* aus diesem Ausdruck (mit einem Fachbegriff spricht man auch vom *Radizieren*), zum Beispiel $\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{3^2} = 3$ (man könnte eigentlich auch genauso gut sagen: $\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{(-3)^2} = -3$, doch das sehen viele Gelehrte etwas anders – mehr dazu später!). Demgegenüber müssen Sie den *Logarithmus* bilden, wenn Sie bei gegebener Basis und gegebenem Gesamtwert der Potenz den Exponenten einer Potenz ausrechnen möchten. Für $a^n = c$ erhalten Sie als »logarithmierten« Ausdruck: $\log_a(c) = n$ (gesprochen: der Logarithmus von c zur Basis a ist gleich n). Mit der Basis 10 und dem Exponenten 2 erhalten Sie beispielsweise: $\log_{10}(c) = 2$. Da 10^2 gleich 100 ist, entspricht c in diesem Beispiel also 100.

In Tabelle 1.1 sind die Unterschiede zwischen Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren (= Wurzelziehen) zusammengestellt.

Basis a	**Exponent n**	**Ergebnis a^n**	**Verfahren**
gegeben	gegeben	zu ermitteln	Potenzieren
gegeben	zu ermitteln	gegeben	Logarithmieren
zu ermitteln	gegeben	gegeben	Radizieren

Tabelle 1.1: Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren

Potenzen machen stark

Fangen wir mit Potenzen an! Sie sind nämlich in der Mathematik völlig hilflos, wenn Sie die Potenzregeln nicht kennen:

✔ $a^0 = 1$

Diese Regel gilt immer, egal um welches a es sich handelt (einen Bruch, eine negative Zahl und dergleichen) – *außer* für null (dieser Fall ist nicht eindeutig definiert, in der Praxis wird jedoch häufig $0^0 = 1$ gesetzt).

✔ $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ beziehungsweise allgemein : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beispielsweise ist $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$. Klasse! Vergessen Sie das nicht!

Beachten Sie, dass die Lösung $\frac{1}{16}$ *nicht* negativ ist.

✔ $a^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2}$ beziehungsweise allgemein: $a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

Diese praktische Regel können Sie rückwärts anwenden, um eine Aufgabenstellung mit Wurzel in eine Form mit einer Potenz umzuwandeln. Darauf kommen wir unten bei den Wurzelrechenregeln zurück.

Eine Potenz kann ihrerseits potenziert werden. Dazu müssen Sie nur die jeweiligen Exponenten miteinander multiplizieren:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n.$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen des Kommutativgesetzes, das wir auf den Exponenten im mittleren Ausdruck anwenden.

Beispielsweise ist der Ausdruck $(a^2)^3$ gleichbedeutend damit, dass $(a \cdot a)$ dreimal mit sich selbst multipliziert wird, also: $(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a)$. Sie erkennen, dass dieses Produkt in der Tat der sechsfachen Multiplikation von a mit sich selbst, das heißt a^6, entspricht.

Passen Sie bitte auf: Wenn im Exponenten selbst eine Potenz steht, müssen Sie unbedingt die Klammern beachten, im Allgemeinen ist

$$a^{(n^m)} \neq (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Das sehen Sie an einem einfachen Zahlenbeispiel:

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64; \qquad 2^{(3^2)} = 2^9 = 512.$$

Offensichtlich sind die Ergebnisse verschieden! In vielen Büchern wird übrigens auf die Klammersetzung verzichtet; für solche klammerfaulen Autoren bedeutet dann $a^{m^n} = a^{(m^n)}$.

Ferner können Sie nur Vielfache von Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten addieren beziehungsweise ausklammern, also:

$$\alpha \cdot a^n + \beta \cdot a^n = (\alpha + \beta) \cdot a^n.$$

Ein häufiger Fehler besteht darin, einzelne Potenzen aus Summen zu bilden, zum Beispiel aus $(4-2)^2$ fälschlicherweise $4^2 - 2^2$ zu machen. Der letztgenannte Ausdruck ist aber gleich $16 - 4 = 12$, während der erste Ausdruck $2^2 = 4$ lautet.

Im Allgemeinen ist immer $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$. Sie müssen also immer auf die übliche Weise ausmultiplizieren:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Schauen Sie sich dazu wieder ein Zahlenbeispiel an: $(3+5)^2 = 8^2 = 64$, aber $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis können Sie die Exponenten einfach addieren, und zwar so:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

In diesem Sinne ergibt sich für die Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Auch die beiden vorstehenden Regeln können Sie sich leicht anhand von Beispielen klarmachen. So gelten: $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5$ und $\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^1 = a$.

Des Weiteren können Potenzen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten folgendermaßen multipliziert beziehungsweise dividiert werden:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \text{ beziehungsweise } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Beispielsweise erhalten Sie: $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2$ und $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Derartige Regeln vereinfachen die Berechnungen insofern, als nicht zweimal, sondern nur noch einmal potenziert werden muss.

Die soeben vorgestellten Rechenregeln für Potenzen sehen Sie hier für $a = 5$, $b = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $n = 2$ und $m = 3$ »bei der Arbeit«:

$$(5^2)^3 = 25^3 = 15.625 \text{ beziehungsweise } (5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = 15.625;$$

$$2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 = 50 + 75 = 125 \text{ beziehungsweise } 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 = (2+3) \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 125;$$

$$5^2 \cdot 5^3 = 25 \cdot 125 = 3.125 \text{ beziehungsweise } 5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3.125;$$

$$\frac{5^2}{5^3} = \frac{25}{125} = 0,20 \text{ beziehungsweise } \frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,20;$$

$$5^2 \cdot 4^2 = 25 \cdot 16 = 400 \text{ beziehungsweise } 5^2 \cdot 4^2 = (5 \cdot 4)^2 = 20^2 = 400;$$

$$\frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1,5625 \text{ beziehungsweise } \frac{5^2}{4^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1,25^2 = 1,5625.$$

Bisher hatten die Terme entweder die gleiche Basis oder den gleichen Exponenten. Was machen Sie mit einem Ausdruck der Form $a^m \cdot b^n$, wenn $a \neq b$ und $m \neq n$ ist? Die Antwort ist wirklich ganz einfach: Gar nichts!

Schmerzfreie Wurzelbehandlung

Wurzeln, insbesondere Quadratwurzeln, begegnen Ihnen ständig in der Mathematik. Es ist also unabdingbar, dass Sie wissen, was Sie mit ihnen anstellen können, und dass Sie die grundlegende Beziehung zwischen Wurzeln und Potenzen verstehen. Und genau das werden wir Ihnen jetzt beibringen (oder in Erinnerung rufen …).

Ziehen Sie aus einer Potenz a^n die m-te Wurzel – man spricht (bekanntlich) auch vom Radizieren –, bedeutet das, dass Sie zur Basis a den Exponenten $\frac{n}{m}$ bilden:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Jede Wurzel kann also in eine Potenz umgewandelt werden, zum Beispiel $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$. Offen gesprochen, brauchen Sie eigentlich die folgenden Wurzelregeln gar nicht unbedingt auswendig zu lernen – Sie wandeln einfach jede Wurzel in eine Potenz um und wenden dann die Potenzregeln an, um das Problem zu lösen (das ist im Übrigen eine sehr sinnvolle Vorgehensweise).

Vielleicht haben Sie eben bei der Quadratwurzel von a – also bei $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ – die »2« oberhalb der Wurzel vermisst. Dies war aber kein Versehen, sondern ist eine sehr häufige Schreibweise für die Quadratwurzel. Sie können also entweder $\sqrt[2]{a}$ oder einfach $\sqrt{a}$ schreiben.

Aufbauend auf den vorstehenden Angaben, gibt es ein paar besondere Feinheiten beim Wurzelrechnen. Lassen Sie uns mit zwei ganz einfachen Definitionen anfangen:

$$\sqrt{0} = 0 \text{ und } \sqrt{1} = 1.$$

Aber das wussten Sie sicher schon!

Sie können keine negative Zahl unter einer Quadratwurzel oder einer anderen geradzahligen (also vierten, sechsten …) Wurzel berechnen – zumindest nicht, solange Sie nur mit reellen Zahlen arbeiten. (Ja! Es gibt noch andere Zahlen – aber das ist eine andere Geschichte …)

Weitere wichtige Eigenschaften einer Wurzel sind:

- ✔ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ und $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- ✔ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ und $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- ✔ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ und $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ (Sie *multiplizieren* die Wurzelexponenten!)
- ✔ $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $\sqrt[6]{a^6} = |a|$ und so weiter

Wenn Sie eine *geradzahlige* Wurzel haben, brauchen Sie die Betragsstriche für die Lösung, denn die Antwort ist immer positiv, egal ob a positiv oder negativ ist. Das ist zumindest die »herrschende Meinung« in der Mathematik, der wir uns hier einfach mal anschließen. Handelt es sich um eine *ungeradzahlige* Wurzel, brauchen Sie die Betragsstriche hingegen nicht. Somit gilt

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \sqrt[5]{a^5} = a \text{ und so weiter.}$$

Beispiele: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$

Und gleich noch eine weitere dicke Warnung: Es gilt *nicht* $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. Wenn Sie diesen Fehler machen, werden Sie sofort in den Kerker geworfen! Versuchen Sie es nämlich einmal mit Zahlen: $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, was sicher *nicht* gleich $2 + 3$, das heißt 5, ist.

Wurzeln vereinfachen

Und hier noch zwei letzte Anmerkungen zu den Wurzeln. Sie sollten die folgenden beiden Methoden für das *Vereinfachen von Wurzeln* kennen, wie etwa für $\sqrt{300}$ oder $\sqrt{504}$.

Die *schnelle Methode* funktioniert für $\sqrt{300}$. Weil 300 gleich 100 mal 3 ist, kann aus 100 unmittelbar und leicht die Quadratwurzel gezogen werden, nämlich 10, sodass 3 innerhalb der Quadratwurzel verbleibt. Die Lösung lautet also $10\sqrt{3}$.

Für $\sqrt{504}$ ist es nicht ganz so einfach, ein großes perfektes Quadrat zu finden – wie eben 10^2; deshalb wenden Sie bitte folgende *längere Methode* an:

1. **Zerlegen Sie 504 in ein Produkt aus allen seinen Primfaktoren.**

   $$\sqrt{504} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}.$$

2. **Umkreisen Sie jedes Zahlenpaar, das aus zwei gleichen Faktoren besteht.**

   $$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}.$$

3. **Ziehen Sie für jedes umkreiste Zahlenpaar eine Zahl vor die Wurzel.**

   $$2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 7}.$$

4. **Vereinfachen Sie.**

   $$6 \cdot \sqrt{14}.$$

Konventionsgemäß lässt man keine Wurzel im Nenner eines Bruchs. Das ist zwar nicht verboten, aber unschön – vor allem, wenn Sie mit dem Ausdruck noch weiterrechnen müssen.

Wenn Ihre Lösung beispielsweise $\frac{2}{\sqrt{3}}$ lautet, erweitern Sie bitte den Bruch mit $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Potenzen als Wurzeln von Wurzeln

Wegen des engen Zusammenhangs zwischen Potenzen und Wurzeln basieren die Rechenregeln für Wurzeln auf den oben für Potenzen dargelegten. So gilt für das Produkt beziehungsweise für die Division von Wurzeln (wobei im Übrigen der Doppelpfeil »$\Longleftrightarrow$« dafür steht, dass die beiden Gleichungen gleichwertig – oder mit einem Fremdwort: *äquivalent* – zueinander sind):

$$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{(a \cdot b)^n} \Longleftrightarrow a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}} = (a \cdot b)^{\frac{n}{m}}$$

beziehungsweise

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \Longleftrightarrow \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Zudem ergibt sich für verschachtelte Wurzelausdrücke

$$\begin{aligned} & \sqrt[l]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[l \cdot m]{a^n} \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{l}} = a^{\frac{n}{m \cdot l}}. \end{aligned}$$

Analog zu den Vereinfachungsregeln für Potenzen müssen Sie auch bei diesen Wurzelrechenregeln nicht mehr zweimal, sondern nur noch einmal radizieren (= die Wurzel ziehen).

Und hier noch ein paar Beispiele für die Wurzelrechenregeln mit $a = 5$, $b = 4$, $m = 2$, $n = 3$ und $l = 4$ dargelegt (das Zeichen »$\approx$« bedeutet »ungefähr gleich«):

$$\sqrt[2]{5^3} \cdot \sqrt[2]{4^3} \approx 11,1803 \cdot 8 \approx 89,4427$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\sqrt[2]{5^3} \cdot \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{(5 \cdot 4)^3} = \sqrt[2]{20^3} = \sqrt[2]{8.000} \approx 89,4427;$$

$$\frac{\sqrt[2]{5^3}}{\sqrt[2]{4^3}} \approx \frac{11,1803}{8} \approx 1,3975$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\frac{\sqrt[2]{5^3}}{\sqrt[2]{4^3}} = \sqrt[2]{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \sqrt[2]{1,25^3} \approx 1,3975;$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[2]{5^3}} \approx \sqrt[4]{11,1803} \approx 1,8286$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\sqrt[4]{\sqrt[2]{5^3}} = \sqrt[4 \cdot 2]{5^3} = \sqrt[8]{125} \approx 1,8286.$$

Logarithmen … wirklich keine Hexerei

Ein Logarithmus ist einfach nur eine andere Möglichkeit, eine exponentielle Beziehung zwischen Zahlen auszudrücken, zum Beispiel $2^3 = 8$. Dann gilt, wie oben schon angedeutet,

$$\log_2(8) = 3$$

(sprich: »Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3.«). Diese beiden Gleichungen drücken genau dasselbe aus. Sie können sich die eine davon sozusagen als die »griechische« Methode vorstellen, diese mathematische Beziehung zu beschreiben, während die andere sozusagen die »lateinische« Methode ist, dasselbe zu sagen. Die Basis eines Logarithmus kann eine beliebige positive Zahl außer 1 sein; für die Basis 1 ist der Logarithmus nicht definiert. Wenn die Basis gleich 10 ist, geben Sie die Basis beim Logarithmus konventionsgemäß nicht an. Der Ausdruck $\log(1.000) = 3$ beispielsweise bedeutet $\log_{10}(1.000) = 3$. In vielen Mathebüchern finden Sie auch das Symbol lg für den Zehnerlogarithmus, also $\log_{10}(1.000) = \lg(1.000) = 3$. Das ist der *dekadische Logarithmus*.

Auch der Logarithmus zur Basis e ($e \approx 2{,}71828$), der sogenannte *natürliche Logarithmus*, erhält eine Kurzschreibweise: ln statt log. Mathematiker verwenden ihn so oft, dass sie vermutlich deswegen eine spezielle Abkürzung dafür eingeführt haben.

Da a^0 bekanntlich als 1 definiert ist, ist der Logarithmus $\log_a(1)$ stets – das heißt unabhängig von der Basis – gleich 0. Außerdem ist wegen $a^1 = a$ der Logarithmenausdruck $\log_a(a)$ immer gleich 1. Ferner ist zu beachten, dass der Logarithmus von 0, das heißt $\log_a(0)$, ebenso wenig definiert ist wie der Logarithmus aus einer negativen Zahl (oder – wie bereits erwähnt – der Logarithmus zur Basis 1).

Den Logarithmus können Sie also nur auf positive Zahlen anwenden! Zum Beispiel würde die Gleichung $c = \log(-5)$ umgeformt $10^c = -5$ bedeuten, und diese Gleichung ist natürlich unlösbar! (Wenn Sie 10 mit *irgendetwas* potenzieren, kommt *immer* etwas Positives heraus – auch wenn der Exponent negativ ist: Zum Beispiel ist $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000.001$.)

Aus der Definition des Logarithmus folgt unmittelbar, dass er als Exponent zur betreffenden Basis genau die zugrunde liegende Potenz angibt:

$$a^{\log_a(c)} = c.$$

Beispielsweise erhalten Sie für $10^{\log_{10}(100)}$ als Ergebnis 100. Dies ist plausibel, weil $\log_{10}(100)$ wegen $10^2 = 100$ gleich 2 ist und sich daher für $10^{\log_{10}(100)}$ als Ausdruck $10^2 = 100$ ergibt. Analog gilt zum Beispiel $e^{\ln(100)} = 100$.

Eine gleichwertige Schreibweise für Letzteres ist im Übrigen $\exp(\ln(100)) = 100$.

Das Ganze gilt auch umgekehrt, das heißt $\ln(\exp(100)) = 100$ beziehungsweise $\log(10^{100}) = 100$. Sie können in Ihren Taschenrechner ja mal $\log(10^{100})$ eintippen. Viele Taschenrechner machen da schlapp, weil sie 10^{100} nicht verarbeiten können. In diesem Fall ist also die eben genannte Regel sehr nützlich!

Folgende weitere *Logarithmenregeln* sind für Ihr Studium – oder pathetischer ausgedrückt für Ihr Leben – von Bedeutung:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

beziehungsweise

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

und

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$

beziehungsweise speziell

$$\log_a(a^c) = c \cdot \log_a(a) = c.$$

Schließlich gilt auch noch die allgemeine Beziehung

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}.$$

Bekanntlich ist $\log_{10}(10)$ wegen $10^1 = 10$ gleich 1; dies wird auch nach Einsetzen in die vorherige Formel (mit der willkürlichen Basis 2 im Zähler und Nenner des Bruchs) deutlich: $\log_{10}(10) = \frac{\log_2(10)}{\log_2(10)} = 1$. Ein anderes Beispiel ist die indirekte Berechnung von $\ln(5)$, was ungefähr gleich 1,6094 ist. Den letztgenannten Wert erhalten Sie auch, wenn Sie – unter willkürlicher Wahl der Basis 10 für den Bruch auf der rechten Seite in der Gleichung – die relevanten Werte in die betreffende Formel einsetzen:

$$\ln(5) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(\mathrm{e})} \approx \frac{0,69897}{0,43429} \approx 1,6094.$$

Mit dieser Eigenschaft können Sie Dinge wie etwa $\log_3(20)$ auf Ihrem Taschenrechner berechnen, indem Sie $\frac{\log(20)}{\log(3)}$ – unter Verwendung der Basis 10 – eingeben. (Die meisten Taschenrechner haben eine Taste für den Zehnerlogarithmus und den natürlichen Logarithmus – aber nicht unbedingt eine Taste für den Logarithmus zur Basis 3 oder 17 oder 23 oder 895.935.)

BEISPIEL

Mit $b = 2$ und $c = 3$ erhalten Sie speziell für den dekadischen Logarithmus und für die angeführten Logarithmusrechenregeln:

$$10^{(\log(2))} = 10^{0,301.03} = 2$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln) unmittelbar

$$10^{(\log(2))} = 2;$$

$$\log(2 \cdot 3) = \log(6) \approx 0,7782$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\log(2 \cdot 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0,30103 + 0,47712 = 0,7782;$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(1,5) \approx 0,1761$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(3) - \log(2) \approx 0,4771 - 0,3010 = 0,1761;$$

$$\log(3^2) = \log(9) \approx 0,9542$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\log(3^2) = 2 \cdot \log(3) \approx 2 \cdot 0,4771 = 0,9542.$$

Binomische Formeln

Für das Quadrat der Summe beziehungsweise Differenz zweier Zahlen sowie das Produkt aus ihrer Summe und ihrer Differenz existieren drei überaus wichtige Formeln, die sogenannten *binomischen Formeln*. Sie basieren allesamt auf der Ausklammerungsvorschrift gemäß dem oben bereits genannten Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Erste binomische Formel: Die Plus-Formel

Für zwei Zahlen a und b können Sie in der obigen Form des Distributivgesetzes sowohl die Zahl a als auch den Ausdruck $(b + c)$ durch $(a + b)$ ersetzen und erhalten nach Umformungen die *erste binomische Formel*:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zweite binomische Formel: Die Minus-Formel

Ersetzen Sie das Plus- durch ein Minuszeichen, haben Sie die *zweite binomische Formel*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Dritte binomische Formel: Die Plus-Minus-Formel

Die *dritte binomische Formel* schließlich ergibt sich für das Produkt aus $(a + b)$ und $(a - b)$:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

BEISPIEL

Folgende Beispiele erläutern die drei grundlegenden binomischen Formeln, wenn $a = 3$ und $b = 2$ sind:

- ✔ $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$

  beziehungsweise nach der ersten binomischen Formel

  $(3 + 2)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25;$

- ✔ $(3 - 2)^2 = 1^2 = 1$

  beziehungsweise nach der zweiten binomischen Formel

  $(3 - 2)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 = 9–12 + 4 = 1;$

- ✔ $(3 + 2) \cdot (3 - 2) = 5 \cdot 1 = 5$

  beziehungsweise nach der dritten binomischen Formel

  $(3 + 2) \cdot (3–2) = 3^2–2^2 = 9–4 = 5.$

Herleitung

Wie Sie die drei grundlegenden binomischen Formeln durch Ausklammern auf der Grundlage des Distributivgesetzes herleiten können, erfahren Sie jetzt.

- ✔ Herleitung der ersten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b)\\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b\\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2;\end{aligned}$$

- ✔ Herleitung der zweiten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b)\\ &= a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a - (-)b \cdot b\\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2;\end{aligned}$$

- ✔ Herleitung der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}&(a + b) \cdot (a - b)\\ &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Allgemeine binomische Formel

Die erste und die zweite binomische Formel sind Spezialfälle einer allgemeineren Formel. Hierzu setzen Sie einfach anstelle des Quadrats als Exponent den Wert n, also: $(a+b)^n$: Der Ausdruck $(a+b)$ wird n-mal mit sich selbst multipliziert. Für die zweite binomische Formel müssen Sie anstelle von $+b$ einfach $-b$ schreiben. Sind Sie etwa am Ausdruck $(a+b)^3$ interessiert, müssen Sie in der gleich folgenden allgemeinen Formel überall dort, wo ein n steht, eine 3 einsetzen.

Die allgemeinen Formulierungen für die erste und zweite binomische Formel lauten

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}(a-b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot (-b)^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot (-b)^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot (-b)^2 \\ + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot (-b)^n.\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*. Er ist definiert als

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}.\end{aligned}$$

Keine Panik: Gleich folgt ein Zahlenbeispiel.

Zunächst: Das Zeichen »!« nennt man *Fakultät*; eine solche stellt, wie zu erkennen ist, das Produkt der absteigend angeordneten positiven natürlichen Zahlen von der Zahl vor dem Fakultätszeichen bis hin zur 1 dar. 3! beispielsweise ist gleich $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, und 10! zum Beispiel gleicht $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$.

Wie leicht nachzuvollziehen ist, gilt $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, und damit ist $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = n+1$. Der Ausdruck 0! ist ebenso wie 1! als 1 definiert.

Bitte beachten Sie, dass grundsätzlich $(a \cdot n)! \neq a! \cdot n!$ ist. Für $a = 2$ und $n = 3$ beispielsweise lautet dieser Klammerausdruck $2 \cdot 3 = 6$, was zu 6! und damit zum Ergebnis von $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ führt. Demgegenüber ist das Produkt aus 2! und 3! gerade einmal $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Der *Binomialkoeffizient* gibt grundsätzlich die Anzahl der *Kombinationen* aus k Elementen in einer Menge von insgesamt n Elementen an, und zwar unabhängig von der Anordnung der k Elemente und ohne die Elemente bei der Kombination mehrfach zu berücksichtigen. Ein bekanntes Anwendungsbeispiel für den Binomialkoeffizienten ist die Anzahl der Möglichkeiten für sechs Richtige im Lotto »6 aus 49«. Die Ziehungsreihenfolge spielt keine Rolle, und jede der 49 Zahlen kommt bei der Ziehung nur einmal vor. Die Anzahl der Ziehungsmöglichkeiten lässt sich als Binomialkoeffizient $\binom{49}{6}$ darstellen. Entsprechend ergeben sich für diesen Fall insgesamt $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$ Möglichkeiten. Näheres zu Kombinationen folgt in Kapitel 16.

Eine Hilfe zur Ermittlung der Werte für die Binomialkoeffizienten in der allgemeinen binomischen Formel stellt das *Pascal'sche Dreieck* dar. Es gibt von oben nach unten für $(a + b)^n$ und $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ die betreffenden Koeffizientenwerte (in der ersten binomischen Formel) an. Die Werte der Koeffizienten in einer bestimmten Zeile resultieren – mit Ausnahme der beiden Randwerte, die in allen Zeilen jeweils gleich 1 sind – aus der paarweisen Addition der Koeffizientenwerte in der unmittelbar darüberliegenden Zeile. Zum Beispiel erhalten Sie für $n = 2$ – das heißt in der dritten Zeile des Pascal'schen Dreiecks – die Koeffizienten 1, 2 (= 1 + 1) und 1, wie Sie bereits wissen. Von $n = 0$ bis $n = 5$ sind in Abbildung 1.2 die entsprechenden Binomialkoeffizienten angegeben, zum Beispiel in der fünften Zeile als 1, 4, 6, 4 und 1. Da in der fünften Zeile des Pascal'schen Dreiecks die Werte für die Berechnung von $(a + b)^4$ stehen, bedeutet dieser Ausdruck Folgendes: $1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Abbildung 1.2: Pascal'sches Dreieck

Ist $n = 2$, so resultiert die obige grundlegende erste beziehungsweise zweite binomische Formel aus der allgemeinen Formel (unter Beachtung, dass 0! als 1 definiert ist):

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^{2-1} \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^{2-2} \cdot b^2 \\
&= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} a^2 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} \cdot a \cdot b + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot b^2 \\
&= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= \binom{2}{0}\cdot a^2\cdot(-b)^0+\binom{2}{1}\cdot a^{2-1}\cdot(-b)^1+\binom{2}{2}\cdot a^{2-2}\cdot(-b)^2\\ &= \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1}\cdot a^2\cdot 1+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1}\cdot a\cdot(-b)+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot 1\cdot b^2\\ &= a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.\end{aligned}$$

Anhand des Pascal'schen Dreiecks können Sie diesen Zusammenhang – wie bereits erwähnt – aus der dritten Zeile ablesen:

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2+2\cdot a\cdot b+1\cdot b^2$$

beziehungsweise

$$(a-b)^2 = 1\cdot a^2-2\cdot a\cdot b+1\cdot b^2.$$

Für $(a+b)^3$ und $(a-b)^3$ können Sie entsprechend aus der vierten Zeile des Pascal'schen Dreiecks folgenden binomischen Ausdruck ablesen:

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+1\cdot b^3$$

beziehungsweise

$$(a-b)^3 = 1\cdot a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-1\cdot b^3.$$

Die Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel ist etwas schwieriger als jene der ersten und der zweiten binomischen Formel. Es gilt (sozusagen umgekehrt formuliert, das heißt von der rechten Seite der Gleichung her gedacht)

$$a^n-b^n = (a-b)\cdot a^{n-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Dabei ist $\sum$ das Summenzeichen (siehe Kapitel 3).Mit dieser allgemeinen Formel erhalten Sie für $n=2$ den Ausdruck

$$a^2-b^2 = (a-b)\cdot a\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right) = (a-b)\cdot(a+b)$$

und für $n=3$

$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot a^2\cdot\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right) = (a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2).$$

Mengenverknüpfungen

Ausführungen zu Zahlenmengen und Zahlenräumen wie den vorstehenden lassen sich grafisch mithilfe der *Mengenlehre* verdeutlichen. Hierzu schreiben Sie die Menge verschiedener Elemente (zum Beispiel verschiedener Zahlen) in geschweiften Klammern. Setzt sich zum Beispiel die Menge A aus den Elementen a, b, c und d zusammen, so schreiben Sie: $A = \{a; b; c; d\}$. Enthält eine Menge A keine Elemente, also: $A = \{\}$, handelt es sich um die sogenannte *leere Menge*.

Grafisch lassen sich mengenbezogene Zusammenhänge mittels *Venn-Diagrammen* veranschaulichen (die im Übrigen in Kapitel 16 noch einmal ausführlich behandelt werden). Ein Venn-Diagramm stellt Mengen überwiegend in Form von Kreisen dar. Die Gesamtmenge an möglichen Elementen, auch Grundmenge genannt, wird durch ein übergreifendes Rechteck abgebildet, man schreibt dafür meist das Symbol Ω. Es kann sich bei Ω etwa um die Menge der natürlichen oder der reellen Zahlen handeln oder um Teile davon.

Die *Vereinigungsmenge* zwischen zwei Mengen A und B enthält sämtliche Elemente der beiden Mengen. Wenn A aus den natürlichen Zahlen $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ und B aus $\{2; 4; 6\}$ besteht, dann umfasst die Vereinigungsmenge aus A und B alle diese Zahlen, ist also die Menge $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Man schreibt: »A vereinigt mit B«, oder formal: $A \cup B$ (siehe Abbildung 1.3).

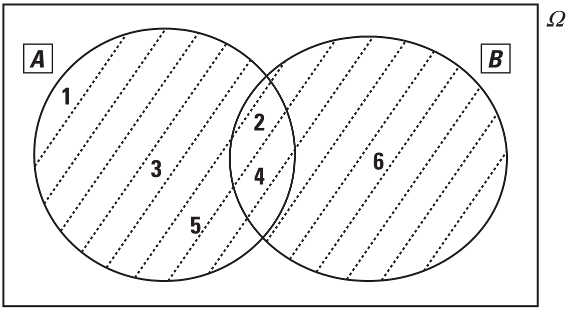

Abbildung 1.3: Vereinigung zweier Mengen *A* und *B*

Im Unterschied zur Vereinigungsmenge enthält die *Schnittmenge* nur Elemente, die in allen Mengen vorkommen. Man schreibt: »A geschnitten mit B«, oder formal: $A \cap B$. Die Schnittmenge von A und B ist in unserem Beispiel die Menge $\{2; 4\}$ (siehe Abbildung 1.4).

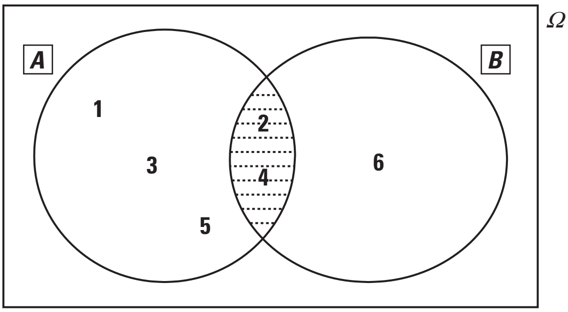

Abbildung 1.4: Schnittmenge zweier Mengen *A* und *B*

Ist die Schnittmenge aus zwei Mengen leer, also gleich der leeren Menge $\{\}$, so nennt man diese Mengen *disjunkt* zueinander. Beispielsweise haben die Mengen $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ und $B = \{11; 12; 13; 14; 15\}$ kein gemeinsames Element, wie Abbildung 1.5 zeigt, und ihre Schnittmenge ist leer: $A \cap B = \{\,\}$.

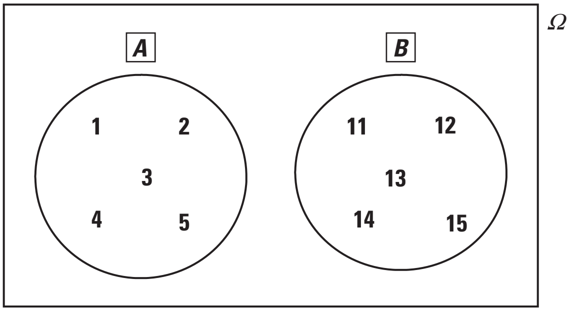

Abbildung 1.5: Zwei disjunkte Mengen *A* und *B*

Bilden Sie zu einer bestimmten Menge A aus allen anderen Elementen der Grundmenge eine neue Menge $\overline{A}$, so ist dieses die *Komplementärmenge* zu A. Ist Ω als Gesamtmenge etwa die Menge der positiven natürlichen Zahlen bis einschließlich 12 und besteht A wieder aus $\{1; 2; 3; 4; 5\}$; dann ist $\overline{A}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 6 bis 12 (siehe Abbildung 1.6).

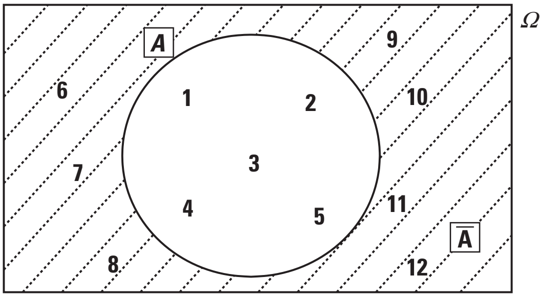

Abbildung 1.6: Komplementäre Mengen *A* und $\overline{A}$

Zum Schluss zeigen wir Ihnen noch, was man unter der *Differenzmenge* $A \setminus B$ versteht. Gehen Sie zum Beispiel von den beiden Mengen $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ und $B = \{2; 4; 6\}$ aus, dann bezeichnet die Differenzmenge $A \setminus B$ alle Elemente aus A, die sich nur in A, nicht aber in B befinden, hier wäre also $A \setminus B = \{1; 3; 5\}$. Dieser Fall ist in Abbildung 1.7 dargestellt.

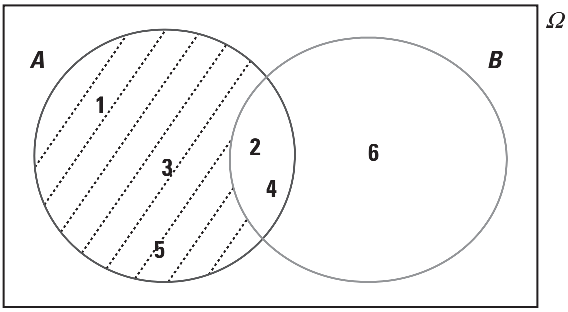

Abbildung 1.7: Differenzmenge zwischen *A* und *B*

Grundbegriffe der Logik: Ist doch logisch!

(Zahlen-)Mengen lassen sich auf der Basis bestimmter Rechenvorschriften miteinander verknüpfen – so wie Sie gerade Vereinigungs- und Schnittmengen gebildet haben. Die elementaren Rechenvorschriften zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren verknüpfen Zahlen. Solche Zusammenhänge fußen in der durch Definitionen geprägten Mathematik auf den Gesetzmäßigkeiten der *Logik*. Konkret geht es darum, dass die getroffenen Aussagen in sich stimmig sind. Man sagt auch, dass sie *widerspruchsfrei* zueinander sind.

Insoweit sind die Mathematiker die Vulkanier unter den Wissenschaftlern. Die Star-Trek-Fans unter Ihnen wissen, was hiermit gemeint ist. Leser, die keinen Bezug zu Star Trek haben, können diesen Einschub einfach ignorieren …

Für die mit dem Rüstzeug der Mathematik getroffenen *Aussagen* kann man immer angeben, ob sie wahr oder falsch sind. So ist etwa die Aussage, dass 8 eine Primzahl ist, offenkundig falsch, während die Aussage, dass 7 eine Primzahl ist, wahr ist (weil die 7 im Zahlenraum der positiven natürlichen Zahlen außer durch 1 nur noch durch sich selbst teilbar ist). Treffen Sie die genau gegenteiligen Aussagen, dass 8 *keine* Primzahl ist (was wahr ist) und dass 7 *keine* Primzahl ist (was falsch ist), spricht man von der logischen *Negation einer Aussage* (»Negation« heißt »Verneinung«) und verwendet dafür das Zeichen »¬«.

Alle mathematischen Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Wirklich alle? Nein, es gibt einige unbeugsame und ziemlich exotische Aussagen, deren Wahrheitsgehalt man nicht überprüfen kann. Dies spielt für die Volks- und Betriebswirtschaftslehre keine Rolle, aber wenn es Sie interessiert: Suchen Sie einmal im Internet nach dem »Gödel’schen Satz«!

Verknüpfen Sie Aussagen durch das »logische Und« – symbolisiert durch »∧« – miteinander, handelt es sich um eine *Konjunktion*. Sie gibt an, dass die Gesamtaussage nur dann wahr ist, wenn sowohl die eine als auch die andere Aussage wahr ist. Demgegenüber liegt bei Verknüpfung durch das »logische Oder« – symbolisiert durch »∨« – eine *Disjunktion* vor. In diesem Fall ist die Gesamtaussage wahr, falls entweder die eine oder die andere Aussage wahr ist.

BEISPIEL

Die Gesamtaussage »$55 > 52 \wedge 12 < 10$« – in Worten: »55 ist größer als 52, und 12 ist kleiner als 10« – ist eine falsche Aussage, da zwar die erste Teilaussage »$55 > 52$« wahr, aber die zweite Aussage »$12 < 10$« falsch ist. Ein zweites Beispiel zeigt Ihnen eine Disjunktion: Die Gesamtaussage »$55 > 52 \vee 12 < 10$« – in Worten: »55 ist größer als 52, oder 12 ist kleiner als 10« – ist wahr, weil für den Wahrheitsgehalt einer Disjunktion nur eine der beiden Aussagen wahr sein muss (und dies trifft bekanntlich auf die erstgenannte Teilaussage zu).

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(\neg A) \wedge B$	$A \wedge (\neg B)$	$(\neg A) \vee B$	$A \vee (\neg B)$
wahr	wahr	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr	wahr

Tabelle 1.2: Die Regeln der Logik

Tabelle 1.2 illustriert die Logikregeln der Mathematik für zwei allgemeine Aussagen A und B.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Multiplizieren Sie die natürliche Zahl 5 mit der komplexen Zahl $4 + 3\mathrm{i}$.

Aufgabe 2

Rechnen Sie die Hexadezimalzahl FA.ADC in eine Binärzahl um.

Aufgabe 3

Rechnen Sie die Binärzahl 1.100.110.101.111 in eine Hexadezimalzahl um.

Aufgabe 4

Was ergeben die Ausdrücke **a.** $\frac{\frac{b^2}{a \cdot b}}{\frac{a}{b}}$ und **b.** $\frac{b^2}{\frac{a \cdot b}{\frac{a}{b}}}$ mit $a = 2$ und $b = 3$?

Aufgabe 5

Kürzen Sie den Bruch $\frac{a^3 \cdot b^4 + a^2 \cdot b^3 \cdot c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c}$.

Aufgabe 6

Vereinfachen Sie den Term $\mathrm{e}^{\ln(a)} \cdot (a^3)^4 \cdot a^{-1} \cdot a^{0,5}$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie $|7 \cdot \ln(5) - \log(500) \cdot 20|$.

Aufgabe 8

Welcher Wert von a macht aus $5^{3 \cdot a+2} = 390.625$ eine wahre Aussage?

Aufgabe 9

Vereinfachen Sie den Term $\frac{4 \cdot a^2 + 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2}{4 \cdot a^2 - 9 \cdot b^2}$.

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Produkt aus $3a - 2$ und $5 - 4b$.

Aufgabe 11

Bilden Sie für die Mengen $A = \{2; 4; 7\}$, $B = \{4; 7; 9\}$ und $C = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$ die nachfolgenden Operationen, wobei $\Omega = A \cup B \cup C$ ist:

a. $A \cup B$; **b.** $A \cap B \cap C$; **c.** $\overline{A}$; **d.** $B \setminus A$.

Aufgabe 12

Die Aussage A lautet: »$10 > 2 \cdot 4$«; die Aussage B lautet: »$5 < 2 \cdot 2$«. Geben Sie für die nachfolgenden Verknüpfungen an, ob sie wahr oder falsch sind:

a. $A \vee B$; **b.** $\neg A \vee A$; **c.** $A \vee \neg B$; **d.** $A \wedge B$; **e.** $B \wedge \neg B$; **f.** $\neg A \wedge B$.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

$$5 \cdot (4 + 3 \cdot i) = 20 + 15 \cdot i$$

Lösung zu Aufgabe 2

$$\text{FA.ADC}_{16} = 15 \cdot 16^4 + 10 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 1.026.780_{10}$$

1.026.780 : 2 = 513.390	Rest 0
513.390 : 2 = 256.695	Rest 0
256.695 : 2 = 128.347	Rest 1
128.347 : 2 = 64.173	Rest 1
64.173 : 2 = 32.086	Rest 1
32.086 : 2 = 16.043	Rest 0
16.043 : 2 = 8.021	Rest 1
8.021 : 2 = 4.010	Rest 1
4.010 : 2 = 2.005	Rest 0
2.005 : 2 = 1.002	Rest 1
1.002 : 2 = 501	Rest 0
501 : 2 = 250	Rest 1
125 : 2 = 62	Rest 1
62 : 2 = 31	Rest 0
31 : 2 = 15	Rest 1
15 : 2 = 7	Rest 1
7 : 2 = 3	Rest 1
3 : 2 = 1	Rest 1
1 : 2 = 0	Rest 1

Die Binärzahl lautet also, von unten nach oben gelesen, 11.111.010.101.011.011.100.

Lösung zu Aufgabe 3

1	1001	1010	1111
1	9	A	F

Die Hexadezimalzahl lautet also 19AF.

Lösung zu Aufgabe 4

a. $\dfrac{\frac{3^2}{2\cdot 3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4}$

b. $\dfrac{\frac{3^2}{\frac{2\cdot 3}{2}}}{3} = \dfrac{9}{6\cdot\frac{3}{2}} = 1$

Lösung zu Aufgabe 5

$$\frac{a^3 \cdot b^4 + a^2 \cdot b^3 \cdot c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (a \cdot b^2 + 1 \cdot b \cdot c)}{a^2 \cdot b^2 \cdot c} = \frac{a \cdot b^2}{c} + b = b \cdot \left(\frac{a \cdot b}{c} + 1\right)$$

(Das Ausklammern im letzten Schritt war nicht in der Aufgabe verlangt, sieht aber besser aus.)

Lösung zu Aufgabe 6

$$e^{\ln(a)} \cdot (a^3)^4 \cdot a^{-1} \cdot a^{0,5} = a \cdot a^{12} \cdot a^{-1} \cdot a^{0,5} = a^{12,5} = a^{\frac{25}{2}} = \sqrt[2]{a^{25}}$$

Lösung zu Aufgabe 7

$$|7 \cdot \ln(5) - \log(500) \cdot 20| \approx |-42,7133| = 42,7133$$

Lösung zu Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
& & 5^{3\cdot a+2} &= 390.625 \\
&\Longleftrightarrow & \ln(5^{3\cdot a+2}) &= \ln(390.625) \\
&\Longleftrightarrow & (3 \cdot a + 2) \cdot \ln(5) &= \ln(390.625) \\
&\Longleftrightarrow & 3 \cdot a + 2 &= \frac{\ln(390.625)}{\ln(5)} \\
&\Longleftrightarrow & a &= \frac{\ln(390.625)}{\ln(5) \cdot 3} - \frac{2}{3} \\
&\Longleftrightarrow & a &= 2
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9

$$\frac{4 \cdot a^2 + 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2}{4 \cdot a^2 - 9 \cdot b^2} = \frac{(2 \cdot a + 3 \cdot b)^2}{(2 \cdot a + 3 \cdot b) \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot b)} = \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{2 \cdot a - 3 \cdot b}$$

Lösung zu Aufgabe 10

$$(3 \cdot a - 2) \cdot (5 - 4 \cdot b) = 15 \cdot a - 12 \cdot a \cdot b - 10 + 8 \cdot b$$

Lösung zu Aufgabe 11

a. $\{2; 4; 7; 9\}$

b. $\{7\}$

c. $\{1; 3; 5; 6; 8; 9\}$

d. $\{9\}$

$A = \{2; 4; 7\}$, $B = \{4; 7; 9\}$ und $C = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$

Lösung zu Aufgabe 12

Grundsätzlich gilt: A: wahr und B: falsch.

Damit erhalten Sie:

a. wahr

b. wahr

c. wahr

d. falsch

e. falsch

f. falsch