

Zeichen bei Zahlen entschlüsseln

In diesem Kapitel ...

- ▶ Verwendung des Zahlenstrahls
- ▶ Absolut richtige Bestimmung von absoluten Werten
- ▶ Operationen bei Zahlen mit Vorzeichen: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren

In diesem Kapitel üben Sie die Anwendung von Zahlen mit Vorzeichen und finden heraus, wie Sie sie dazu überreden können, sich Ihren Wünschen zu fügen. Hierzu wenden Sie einige wohl etablierte Regeln an, die *gut für Sie* sind. Kommt Ihnen das bekannt vor? Aber aufgrund dieser Regeln (oder *Eigenschaften*, wie sie in Mathe-Sprech genannt werden) lassen sich mathematische Ausdrücke leichter lesen und Sie können leichter mit ihnen umgehen, wenn Sie Gleichungen lösen.

Zahlen ihren Platz zuweisen

Sie glauben vielleicht, es ist leicht zu erkennen, dass 16 größer als 10 ist. Was ist jedoch mit $-1,6$ und $-1,04$? Welche dieser beiden Zahlen ist größer?



Die einfachste Weise, Zahlen miteinander zu vergleichen und zu sagen, welche größer ist oder einen höheren Wert besitzt, besteht darin, die Position der Zahl auf dem Zahlenstrahl zu ermitteln. Der Zahlenstrahl geht von den negativen Zahlen links zu den positiven rechts (siehe Abbildung 1.1). Jede Zahl, die weiter rechts steht, hat einen höheren Wert, soll heißen, sie ist größer.

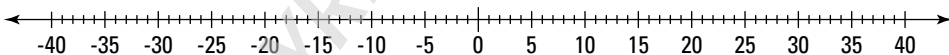


Abbildung 1.1: Zahlenstrahl



Frage

Entscheiden Sie anhand des Zahlenstrahls von Abb. 1.1, welche Zahl größer ist: -16 oder -10 !

Antwort

-10 . Die Zahl -10 steht rechts von -16 , also ist sie die größere der beiden. Sie schreiben dies so: $-10 > -16$ (zu lesen als: »minus 10 ist größer als minus 16«). Oder so: $-16 < -10$ (»minus 16 ist kleiner als minus 10«).

Frage

Was ist größer: $-1,6$ oder $-1,04$?

Antwort

$-1,04$. Die Zahl $-1,04$ steht rechts von $-1,6$, also ist sie größer.

Aufgabe 1

Was ist größer: -2 oder -8 ?

Lösung

Aufgabe 2

Was hat den größeren Wert: -13 oder 27 ?

Lösung

Aufgabe 3

Was ist größer: $-0,003$ oder $-0,03$?

Lösung

Aufgabe 4

Was ist größer: $-\frac{1}{6}$ oder $-\frac{2}{3}$?

Lösung

Absolutwerte lesen und schreiben

Der *Absolutwert* einer Zahl, der so geschrieben wird: $|a|$, ist eine Operation, die bewertet, was zwischen den senkrechten Linien steht, und dann eine positive Zahl auswirft. Die Operation lässt sich auch wie folgt betrachten: Sie kann Ihnen sagen, wie weit eine Zahl auf dem Zahlenstrahl von 0 entfernt ist – ungeachtet dessen, auf welcher Seite.



Der Absolutwert von a :

$|a| = a$, wenn a eine positive Zahl ist ($a > 0$) oder wenn $a = 0$ ist.

$|a| = -a$, wenn a eine negative Zahl ist ($a < 0$). Lesen Sie dies als: »Der Absolutwert von a ist gleich der *Gegenzahl* von a .«



Frage

$|4| =$

Frage

$|-3| =$

Antwort

4

Antwort

3

Aufgabe 5

$|8| =$

Lösung

Aufgabe 6

$|-6| =$

Lösung

Aufgabe 7

$-|-6| =$

Lösung

Aufgabe 8

$-|8| =$

Lösung

Zahlen mit Vorzeichen addieren

Zum Addieren von Zahlen mit Vorzeichen benötigt man zwei verschiedene Regeln, die beide davon abhängig sind, ob die beiden Zahlen, die addiert werden sollen, dieselben oder verschiedene Vorzeichen haben. Nachdem Sie bestimmt haben, ob die Vorzeichen dieselben oder verschieden sind, verwenden Sie zur Berechnung die Absolutwerte der Zahlen.



Beim Addieren von Zahlen mit Vorzeichen gilt (angenommen, a und b sind positive Zahlen):

- ✓ **Wenn die Vorzeichen dieselben sind:** Addieren Sie die absoluten Werte der beiden Zahlen. Ihr gemeinsames Vorzeichen ist das Vorzeichen der Lösung.
 $(+a) + (+b) = +(a + b)$ und $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- ✓ **Wenn die Vorzeichen verschieden sind:** Berechnen Sie den Unterschied zwischen den Absolutwerten der beiden Zahlen (subtrahieren Sie den kleineren Absolutwert vom größeren). Die Lösung hat das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Absolutwert. Angenommen, $|a| > |b|$:
 $(+a) + (-b) = +(a - b)$ und $(-a) + (+b) = -(a - b)$

**Frage**

$(-6) + (-4) = -(6 + 4) =$

Die Vorzeichen sind dieselben, also berechnen Sie die Summe und verwenden das gemeinsame Vorzeichen.

Antwort

-10

Frage

$(+8) + (-15) = -(15 - 8)$

Die Vorzeichen sind verschieden, also berechnen Sie die Differenz und verwenden das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Absolutwert.

Antwort

-7

Aufgabe 9

$$4 + (-3) =$$

Lösung

Aufgabe 11

$$(-18) + (-5) =$$

Lösung

Aufgabe 13

$$(-3) + 5 + (-2) =$$

Lösung

Aufgabe 15

$$5 + (-18) + (10) =$$

Lösung

Aufgabe 10

$$5 + (-11) =$$

Lösung

Aufgabe 12

$$47 + (-33) =$$

Lösung

Aufgabe 14

$$(-4) + (-6) + (-10) =$$

Lösung

Aufgabe 16

$$(-4) + 4 + (-5) + 5 + (-6) =$$

Lösung

Eine Differenz bilden von Zahlen mit Vorzeichen

Sie brauchen wirklich keine neuen Regeln, wenn Sie Zahlen mit Vorzeichen subtrahieren. Sie machen einfach aus der Subtraktionsaufgabe eine Additionsaufgabe und wenden Regeln für die Addition von Zahlen mit Vorzeichen an. Damit die Lösung dieser neuen Additionsaufgabe auch wirklich die Lösung der ursprünglichen Subtraktionsaufgabe ist, formen Sie die Operation von der Subtraktion zur Addition um und verändern das Vorzeichen der zweiten Zahl – derjenigen, die subtrahiert werden soll.



Um zwei Zahlen zu subtrahieren:

$$a - (+b) = a + (-b) \text{ und } a - (-b) = a + (+b)$$



Frage

$$(-8) - (-5) =$$

Formen Sie die Aufgabe um
zu $(-8) + (+5) =$

Antwort

-3

Frage

$$6 - (+11) =$$

Formen Sie die Aufgabe um zu $6 + (-11) =$

Antwort

-5

Aufgabe 17

$$5 - (-2) =$$

Lösung

Aufgabe 19

$$4 - 87 =$$

Lösung

Aufgabe 18

$$-6 - (-8) =$$

Lösung

Aufgabe 20

$$0 - (-15) =$$

Lösung

Aufgabe 21

$$2,4 - (-6,8) =$$

Lösung

Aufgabe 22

$$-15 - (-11) =$$

Lösung

Multiplizieren von Zahlen mit Vorzeichen

Wenn Sie zwei oder mehr Zahlen multiplizieren, multiplizieren Sie sie einfach, ohne sich zunächst um die Vorzeichen der Lösung zu kümmern. Das kommt erst ganz am Schluss. Damit Sie dann das Vorzeichen zuweisen können, zählen Sie einfach die Anzahl der negativen Vorzeichen in der Aufgabe. Bei gerader Anzahl ist das Ergebnis positiv. Andernfalls negativ.



Das Produkt zweier Zahlen mit Vorzeichen:

$$(+)(+) = + \text{ und } (-)(-) = (+)$$

$$(+)(-) = - \text{ und } (-)(+) = -$$

Das Produkt von mehr als zwei Zahlen mit Vorzeichen:

$(+)(+)(+)(-)(-)(-)(-)$ hat eine *positive* Lösung wegen der geraden Anzahl negativer Faktoren.

$(+)(+)(+)(-)(-)(-)$ hat eine *negative* Lösung wegen der *ungeraden* Anzahl negativer Faktoren.



Frage

$$(-2)(-3) =$$

Die Aufgabe hat zwei negative Vorzeichen.

Antwort

+6

Frage

$$(-2)(+3)(-1)(-4) =$$

Die Aufgabe hat drei negative Vorzeichen.

Antwort

-24

Aufgabe 23

$$(-6)(3) =$$

Lösung

Aufgabe 24

$$(14)(-1) =$$

Lösung

Aufgabe 25

$$(-6)(-3) =$$

Lösung

Aufgabe 26

$$(6)(-3)(4)(-2) =$$

Lösung

Aufgabe 27

$$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(2) =$$

Lösung

Aufgabe 28

$$(-10)(2)(3)(1)(-1) =$$

Lösung

Zahlen mit Vorzeichen dividieren

Die Regeln zum Dividieren der Zahlen mit Vorzeichen sind exakt dieselben wie diejenigen zum Multiplizieren – insofern es die Vorzeichen betrifft. (Siehe »Multiplizieren von Zahlen mit Vorzeichen« weiter oben in diesem Kapitel). Die Regeln unterscheiden sich jedoch natürlich, weil Sie dividieren müssen.



Wenn Sie Zahlen mit Vorzeichen dividieren, zählen Sie einfach die negativen Vorzeichen in der Aufgabe – im Zähler, im Nenner und vielleicht vor dem Ausdruck. Wenn Sie eine gerade Anzahl negativer Vorzeichen haben, ist die Lösung positiv. Im umgekehrten Fall negativ.



Frage

$$\frac{-36}{-9} =$$

Antwort

+4. Es sind zwei negative Vorzeichen in der Aufgabe, also eine gerade Anzahl, daher ist die Lösung positiv.

Frage

$$\frac{-(-3)(-12)}{4} =$$

Antwort

–9. Es sind drei negative Vorzeichen in der Aufgabe, also eine ungerade Anzahl, daher ist die Lösung negativ.

Aufgabe 29

$$\frac{-22}{-11} =$$

Lösung

Aufgabe 30

$$\frac{24}{-3} =$$

Lösung

Aufgabe 31

$$\frac{-3(-4)}{-2} =$$

Lösung

Aufgabe 32

$$\frac{(-5)(2)(3)}{-1} =$$

Lösung

Aufgabe 33

$$\frac{(-2)(-3)(-4)}{(-1)(-6)} =$$

Lösung

Aufgabe 34

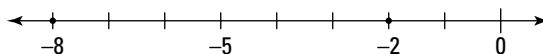
$$\frac{-1.000,000}{1.000,000} =$$

Lösung

Lösungen der Aufgaben zu Zahlen mit Vorzeichen

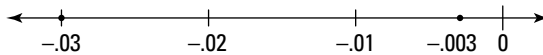
In diesem Abschnitt finden Sie die Lösungen (in Fettdruck) zu den Übungsaufgaben dieses Kapitels.

1. Was ist größer: -2 oder -8 ? Lösung: **-2** . Der folgende Zahlenstrahl zeigt, dass die Zahl -2 rechts von -8 steht. Daher ist -2 größer als -8 (oder $-2 > -8$).

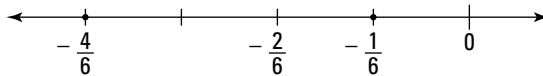


2. Was hat den höheren Wert, -13 oder 2 ? Lösung: **2** . Die Zahl 2 steht rechts von -13 . Daher hat 2 einen höheren Wert als -13 (oder $2 > -13$).

3. Was ist größer, $-0,003$ oder $-0,03$? Lösung: **$-0,003$** . Der folgende Zahlenstrahl zeigt, dass die Zahl $-0,003$ rechts von $-0,03$ steht, was bedeutet, dass $-0,003$ größer als $-0,03$ ist (oder $-0,003 > -0,03$).



4. Was ist größer, $-\frac{1}{6}$ oder $-\frac{2}{3}$? Lösung **$-\frac{1}{6}$** . Die Zahl $-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$, und $-\frac{4}{6}$ steht links von $-\frac{1}{6}$ auf dem Zahlenstrahl unten. Daher ist $-\frac{1}{6}$ größer als $-\frac{2}{3}$ (oder $-\frac{1}{6} > -\frac{2}{3}$).



5. $|8| = 8$, weil $8 > 0$ ist.
6. $|-6| = 6$, weil $-6 < 0$ ist und 6 die Gegenzahl von -6 .
7. $-|-6| = -6$, weil für $|-6| = 6$ gilt, wie in der vorherigen Aufgabe.
8. $-|8| = -8$, weil $|8| = 8$ ist.
9. $4 + (-3) = 1$, weil 4 den größeren Absolutwert besitzt.
 $4 + (-3) = +(4 - 3) = 1$
10. $5 + (-11) = -6$, weil -11 den größeren Absolutwert besitzt.
 $5 + (-11) = -(11 - 5) = -6$
11. $(-18) + (-5) = -23$, weil beide Zahlen negative Vorzeichen haben, und wenn die Vorzeichen dieselben sind, berechnen Sie die Summe ihrer Absolutwerte.
 $(-18) + (-5) = -(18 + 5) = -23$
12. $47 + (-33) = 14$, weil 47 den größeren Absolutwert besitzt.
 $47 + (-33) = +(47 - 33) = 14$
13. $(-3) + 5 + (-2) = 0$
 $(-3) + 5 + (-2) = [(-3) + 5] + (-2) = (2) + (-2) = 0$
14. $(-4) + (-6) + (-10) = -20$
 $(-4) + (-6) + (-10) = -(4 + 6) + (-10) = (-10) + (-10) = -(10 + 10) = -20$
15. $5 + (-18) + (10) = -3$

$$5 + (-18) + (10) = -(18 - 5) + 10 = -(13) + 10 = -(13 - 10) = -3$$

Oder Sie addieren vielleicht lieber zuerst die beiden Zahlen mit demselben Vorzeichen, wie folgt:

$$5 + (-18) + (10) = (5 + 10) + (-18) = 15 + (-18) = -(18 - 15) = -3$$

Das können Sie, weil bei der Addition Reihenfolge und Gruppierung keine Rolle spielen.

16. $(-4) + 4 + (-5) + 5 + (-6) = -6$
 $(-4) + 4 + (-5) + 5 + (-6) = [(-4) + 4] + [(-5) + 5] + (-6) = 0 + 0 + (-6) = -6$
17. $5 - (-2) = 7$
 $5 - (-2) = 5 + (+2) = 7$
18. $-6 - (-8) = 2$
 $-6 - (-8) = -6 + (+8) = 8 - 6 = 2$
19. $4 - 87 = -83$
 $4 - 87 = 4 + (-87) = -(87 - 4) = -83$
20. $0 - (-15) = 15$
 $0 - (-15) = 0 + 15 = 15$
21. $2.4 - (-6.8) = 9.2$
 $2.4 - (-6.8) = 2.4 + 6.8 = 9.2$
22. $-15 - (-11) = -4$
 $-15 - (-11) = -15 + 11 = -(15 - 11) = -4$
23. $(-6)(3) = -18$, weil die Multiplikationsaufgabe ein negatives Vorzeichen hat und 1 eine ungerade Zahl ist.
24. $(14)(-1) = -14$, weil die Multiplikationsaufgabe ein negatives Vorzeichen hat und 1 eine ungerade Zahl ist.
25. $(-6)(-3) = 18$, weil die Multiplikationsaufgabe zwei negative Vorzeichen hat und 2 eine gerade Zahl ist.
26. $(6)(-3)(4)(-2) = 144$, weil die Multiplikationsaufgabe zwei negative Vorzeichen hat.
27. $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(2) = -2$, weil die Multiplikationsaufgabe fünf negative Vorzeichen hat.
28. $(-10)(2)(3)(1)(-1) = 60$, weil die Multiplikationsaufgabe zwei negative Vorzeichen hat.
29. $-22 / -11 = 2$, weil die Divisionsaufgabe zwei negative Vorzeichen hat.
30. $24 / -3 = -8$, weil die Divisionsaufgabe ein negatives Vorzeichen hat.
31. $\frac{-3(-4)}{-2} = -6$, weil drei negative Vorzeichen zu einem negativen Ergebnis führen.
32. $\frac{(-5)(2)(3)}{-1} = 30$, weil die Divisionsaufgabe zwei negative Vorzeichen hat.
33. $\frac{(-2)(-3)(-4)}{(-1)(-6)} = -4$, weil die Divisionsaufgabe fünf negative Vorzeichen hat.
34. $\frac{-1.000.000}{1.000.000} = -1$, weil die Divisionsaufgabe ein negatives Vorzeichen aufweist.

