Teil I: Analysis

In Teil I werden zunächst aus dem Themengebiet der Analysis die aus der Schule sicherlich gut bekannten Grundlagen bezüglich Zahlenmengen und -systemen, Rechenregeln und dergleichen angesprochen. Es folgt die Beschäftigung mit Funktionen. Breiten Raum nimmt die Differentialrechnung ein. Die Integralrechnung schließt Teil I ab.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel…

- … werden Zahlenmengen und Zahlensysteme thematisiert,
- … wird auf Rechenregeln eingegangen,
- … werden Ihnen Gleichungen vorgestellt,
- … gehe ich ausführlich auf Folgen und Reihen ein.

Das erste Kapitel wiederholt vorrangig aus der Schulmathematik (der Mittel- beziehungsweise Oberstufe) bekannte Rechenvorschriften wie die Logarithmenregeln oder die binomischen Formeln. Es werden zudem Verfahren zur Lösung von (Un-)Gleichungen diskutiert, etwa die aus der Schule bekannte PQ-Formel zum Lösen einer quadratischen Gleichung oder die Regula Falsi, die zum Beispiel zur Lösung einer kubischen Gleichung herangezogen wird.

Zahlenmengen und Zahlensysteme

Eine **Zahlenmenge** besteht – wie der Name sagt – aus verschiedenen Elementen, die durch Verknüpfung untereinander, das heißt mittels Rechenregeln, den **Zahlenraum** bestimmen.

Zahlensysteme

Je nach konkreter Zugrundelegung der maßgeblichen Elemente (Ziffern beziehungsweise Zahlen) einer Zahlenmenge kann man verschiedene **Zahlen-**

systeme voneinander unterscheiden. Alle Zahlensysteme können unendlich viele Zahlen darstellen.

Dezimalsystem

Das verbreitetste Zahlensystem ist das **Dezimalsystem** (Zehnersystem), das auf den zehn *Ziffern* 0 bis 9 basiert. Seine Elemente sind – wie die eines jeden Zahlensystems – hierarchisch einander untergeordnet: Das Element 8 zum Beispiel ist höherwertig im Vergleich zum Element 4. Aus den zehn Ziffern werden dabei Zahlen nach der *Rechenvorschrift* gebildet, dass die Ziffer an der niedrigsten Stelle einer Zahl mit 10^0 (also mit 1; Einerstelle), die Ziffer an der zweitniedrigsten Stelle mit 10^1 (also mit 10; Zehnerstelle), die Ziffer an der drittniedrigsten Stelle mit 10^2 (also mit 100; Hunderterstelle) multipliziert wird und so weiter. Die Zahl 386 kann demnach auch dargestellt werden als $3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$, da $3 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ genau 386 ergibt. Nachkommastellen werden durch Multiplikation der ersten Nachkommastelle mit 10^{-1}, der zweiten Nachkommastelle mit 10^{-2} und so weiter erzeugt. Die Zahl 386,25 zum Beispiel ergibt sich als $3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$.

Binärsystem

Ein anderes Zahlensystem ist das **Binärsystem** (auch *Dualsystem* genannt). Es ist Ihnen aus der Computer-Datenverarbeitung (beziehungsweise eventuell aus der Wirtschaftsinformatik) bekannt und besteht lediglich aus den beiden Ziffern 0 und 1. Eine Zahl des Binärsystems kann in eine Dezimalzahl überführt werden, indem die Binärziffer an der niedrigsten Rangstelle mit 2^0, an der zweitniedrigsten Rangstelle mit 2^1, an der drittniedrigsten Rangstelle mit 2^2 multipliziert wird und so weiter. Die obige Dezimalzahl 386 lässt sich folglich binär wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}386 = {} & 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 \\ & + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \,.\end{aligned}$$

Die entsprechende Binärzahl lautet also 110000010. Auch im Binärsystem lassen sich Nachkommastellen darstellen, und zwar durch Multiplikation der ersten Nachkommastelle mit 2^{-1}, der zweiten Nachkommastelle mit 2^{-2} und so weiter. Die Zahl 386,25 wäre demnach gleich $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$; die Binärzahl lautet in diesem Fall folglich 110000010,01. Allerdings kann die Ermittlung von Nachkommastellen im Binärsystem ein langwieriger Prozess sein. Beispielsweise ergibt die Dezimalzahl 386,24 in binärer Schreibweise 110000010,001111010111000010100011111; es ist dies eine Binärzahl mit sage und schreibe 27 Nachkommastellen. Für den betreffenden Nachkommabereich erhalten Sie in diesem Beispielsfall nämlich für den Dezimalausdruck 0,24: $0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 1 \cdot 2^{-8} + 0 \cdot 2^{-9} + 1 \cdot 2^{-10} + 1 \cdot 2^{-11} + 1 \cdot 2^{-12} + 0 \cdot 2^{-13} + 0 \cdot 2^{-14} + 0 \cdot 2^{-15} + 0 \cdot 2^{-16} + 1 \cdot 2^{-17} + 0 \cdot 2^{-18} + 1 \cdot 2^{-19} + 0 \cdot 2^{-20} + 0 \cdot 2^{-21} + 0 \cdot 2^{-22} + 1\ 2^{-23} + 1 \cdot 2^{-24} + 1 \cdot 2^{-25} + 1 \cdot 2^{-26} + 1 \cdot 2^{-27}$. Wenn Ihnen eine Näherungslösung für 386,24 im Sinne von 386,24023438 genügt, können Sie sich auch mit einer Binärzahl mit neun Nachkommastellen begnügen: 110000010,001111011.

Tipp

Bei der Umwandlung einer Dezimal- in eine Binärzahl sucht man zunächst die Zweierpotenz, die den Wert der Dezimalzahl gerade nicht übersteigt. Im obigen Beispiel ist dies $2^8 = 256$ ($2^9 = 512$ ist zu groß). Anschließend prüft man schrittweise, ob die jeweils nächstniedrigere Zweierpotenz gerade noch in die Dezimalzahl „hineinpasst". Ist dieses der Fall, wird auch diese Zweierpotenz mit 1 multipliziert, andernfalls mit 0. Dieses Vorgehen setzt man bei einer Dezimalzahl ohne Nachkommastellen bis zur Zweierpotenz 2^0 fort. Bei den Nachkommastellen beginnt man eine entsprechende 0/1-Betrachtung bei 2^{-1} und setzt dieses Vorgehen solange fort, bis sich alle Nachkommastellen der Dezimalzahl ergeben.

Hexadezimalsystem

Ein weiteres, ebenfalls in der Datenverarbeitung verbreitetes Zahlensystem ist das **Hexadezimalsystem**, das aus 16 Ziffern besteht**.** Gewöhnlich werden zu seiner Darstellung die zehn Ziffern des Dezimalsystems 0 bis 9 zuzüglich der Buchstaben A bis F verwendet. Die einzelnen Rangstellen einer Hexadezimalzahl werden jeweils mit 16^n multipliziert, wobei ein nichtnegativer Wert von n für Stellen vor dem Komma und ein negativer Wert von n für Stellen nach dem Komma stehen. Die obige Dezimalzahl 386 kann wie folgt in eine Hexadezimalzahl umgewandelt werden:

$$386 = 1 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0.$$

Die entsprechende Hexadezimalzahl lautet also 182.

BEISPIEL

Ein anderes Beispiel für Umrechnungen zwischen den einzelnen Systemen ist die Binärzahl 1111. Sie entspricht der Dezimalzahl 15 (da

$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 15$) beziehungsweise der Hexadezimalzahl F (da $15 \cdot 16^0 = 15$ und die 15 im Hexadezimalsystem durch F symbolisiert wird).

Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich durchgängig auf das Ihnen vertraute Dezimalsystem und dessen Rechenregeln, weil es unserem Alltagshandeln zugrunde liegt und daher auch wirtschaftsbezogene Anwendungen typischerweise an dieses System gekoppelt sind.

Zahlenbereiche

Hat man es ausschließlich mit positiven ganzen Zahlen zu tun, handelt es sich um die Menge der natürlichen Zahlen. Man schreibt dann für eine beliebige Zahl a: $a \in \mathbb{N}_+$; das heißt in Worten: die Zahl a ist Element des Zahlenbereichs der positiven **natürlichen Zahlen**. Bezieht man auch noch die 0 in die Zahlenmenge ein, so handelt es sich um die natürlichen Zahlen insgesamt: $a \in \mathbb{N}$. Bei bestimmten Häufigkeitszählungen – etwa von Personen oder Maschinen als Produktionsfaktoren – hat man es vielfach auch in der Ökonomie mit der Menge der natürlichen Zahlen zu tun. Werden zusätzlich die negativen ganzen Zahlen berücksichtigt, erhält man den Zahlenbereich der **ganzen Zahlen**: $a \in \mathbb{Z}$.

Kleine Geschichte

In älteren Zahlensystemen – wie etwa dem Zahlensystem des Römischen Reiches – fehlte die Ziffer 0. Damit waren bestimmte Rechenoperationen nicht möglich, wie etwa die mathematische Darstellung der Differenz aus gleichen Werten. Man kann also sagen, dass die Verwendung der Ziffer 0 den Fortschritt der Mathematik beförderte. Manchmal sind Nullen also doch zu etwas gut…;-)

Das Verhältnis aus zwei ganzen Zahlen kennzeichnet den Zahlenbereich der **rationalen Zahlen**: $a \in \mathbb{Q}$. Bildet man hingegen ein Verhältnis, welches nicht aus zwei ganzen Zahlen besteht, liegt der Zahlenraum der **irrationalen Zahlen** vor. Beispiele für eine irrationale Zahl sind die *Euler'sche Zahl* $e = 2{,}71828...$ oder die *Kreiszahl* $\pi = 3{,}14159...$

Die Gesamtmenge aus ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen schließlich stellt den Zahlenraum der **reellen Zahlen** dar: $a \in \mathbb{R}$. Eine Erweiterung

über den Zahlenraum der reellen Zahlen hinaus bildet der Zahlenbereich der **komplexen Zahlen**: $a \in \mathbb{C}$. Mit einer reellen Zahl ist die spezielle Bedingung $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar. Erst durch die Einführung der sogenannten *imaginären Zahl* i mit der Eigenschaft $i^2 = (-1)$ ist diese Bedingung lösbar. Grundsätzlich können komplexe Zahlen als $\alpha + \beta \cdot i$ dargestellt werden (mit α und ß als beliebigen Zahlen).
Abbildung 1.1 stellt die verschiedenen Zahlenräume dar.

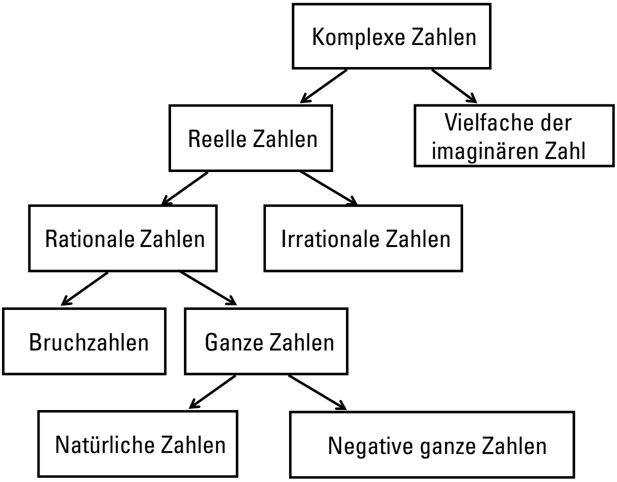

Abbildung 1.1 Die verschiedenen Zahlenräume

Grundlegende Rechenoperationen/-regeln

Die Elemente eines Zahlenraums können durch die **grundlegenden Rechenoperationen** des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens miteinander verbunden werden. Dabei sind das Subtrahieren und das Dividieren im Grunde genommen Unterformen des Addierens beziehungsweise des Multiplizierens.
Beim Subtrahieren addiert man nämlich zu der Zahl, von der etwas abgezogen werden soll (*Minuend*), den Wert, der abgezogen werden soll (*Subtrahend*), als negative Zahl. Während das Ergebnis der Addition aus mehreren Zahlen (*Summanden*) als *Summe* bezeichnet wird, heißt das Ergebnis der

Subtraktion *Differenz*. Das Dividieren einer Zahl (*Dividend*) durch eine andere Zahl (durch den *Divisor*) kann man sich auch als *Produkt* aus der Multiplikation zweier *Faktoren* vorstellen, und zwar zwischen dem Dividenden und dem Kehrwert des Divisors. Das Ergebnis der Division bezeichnet man als *Quotienten*.

Elementare Gesetze

Hinsichtlich der grundlegenden Rechenoperationen gelten für drei Zahlen a, b und c die nachfolgenden Gesetze. Ohne Verlust der Allgemeingültigkeit – ausschließlich aus Gründen der Übersichtlichkeit – wird im Folgenden auf lediglich zwei beziehungsweise drei Zahlen abgestellt. Die dargelegten Zusammenhänge können aber auf die Fälle mit noch mehr Zahlen erweitert werden.
Das **Kommutativgesetz** gibt an, dass es sowohl bei der elementaren Addition als auch bei der elementaren Multiplikation zweier Zahlen a und b unerheblich ist, welche der beiden Zahlen bei der Addition beziehungsweise bei der Multiplikation zuerst genannt wird. Es wird daher umgangssprachlich mitunter auch als „Faktorvertauschungsgesetz“ bezeichnet:

$$a + b = b + a \quad \text{beziehungsweise} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Beispielsweise sind die Ergebnisse von 4 + 5 und von 5 + 4 (jeweils gleich 9) ebenso gleichwertig zueinander wie die Ergebnisse von 4 · 5 und von 5 · 4 (jeweils gleich 20).
Laut **Assoziativgesetz** – umgangssprachlich: „Klammervertauschungsgesetz“ – ist die Klammersetzung bei der reinen Addition beziehungsweise bei der reinen Multiplikation dreier Zahlen a, b und c unerheblich:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{beziehungsweise} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Demnach sind zum Beispiel (4 + 5) + 6 und 4 + (5 + 6) (jeweils gleich 15) ebenso gleichwertig zueinander wie (4 · 5) · 6 und 4 · (5 · 6) (jeweils gleich 120).
Verknüpft man Addition und Multiplikation miteinander, gilt zum einen die Regel, dass Punkt- vor Strichrechnung geht. Das bedeutet, dass zuerst die Multiplikation und erst danach die Addition durchzuführen ist. Zum anderen ergibt sich hieraus, dass gemäß **Distributivgesetz** – umgangssprachlich: „Ausklammerungsgesetz“ – ein additiver Klammerausdruck wie folgt aufgelöst wird:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Beispielsweise ist $4 \cdot (5 + 6) = 4 \cdot 11$ ebenso gleich 44 wie $4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 20 + 24$.
Die Multiplikation auf der linken Seite wird beim Distributivgesetz, wie ersichtlich, in zwei Ausdrücke aufgelöst. Derartige Ausdrücke nennt man in der Mathematik **Terme**.

Tipp

Betrachtet man die Mathematik als eine eigene Sprache, so sind die Zahlen (oder allgemeiner: die Elemente einer Menge) die Buchstaben dieser Sprache, und Terme sind in dieser Sicht die Wörter. Die Syntax der „Mathe-Sprache" wird darauf aufbauend durch die Verknüpfungen der Terme – bei dem obigen Distributivgesetz durch das Pluszeichen – dargestellt.

Mengenverknüpfungen

Die vorstehenden Ausführungen zu Zahlenmengen und Zahlenräumen lassen sich insbesondere grafisch auch mit Hilfe der **Mengenlehre** verdeutlichen. Hierzu schreibt man die Menge verschiedener Elemente (zum Beispiel verschiedener Zahlen) in geschweiften Klammern; setzt sich zum Beispiel die Menge A aus den Elementen a, b, c und d zusammen, wird geschrieben: $A = \{a, b, c, d\}$. Enthält eine Menge A keine Elemente, also: $A = \{\}$, handelt es sich um die sogenannte **leere Menge**.
Grafisch lassen sich mengenbezogene Zusammenhänge mittels **Venn-Diagrammen** veranschaulichen. Ein Venn-Diagramm stellt Mengen üblicherweise in Form von Kreisen dar. Die Gesamtmenge an möglichen Elementen wird durch ein übergreifendes Rechteck abgebildet, das im Folgenden mit Ω symbolisiert ist. Es kann sich bei Ω etwa um die Menge der natürlichen oder der reellen Zahlen handeln.
Die **Vereinigungsmenge** zwischen zwei Mengen A und B enthält sämtliche Elemente der beiden Mengen. Wenn A aus den natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und B aus $\{2, 4, 6\}$ besteht, dann umfasst die Vereinigungsmenge aus A und B alle diese Zahlen, also $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Man schreibt: „A vereinigt mit B" oder formal: $A \cup B$.

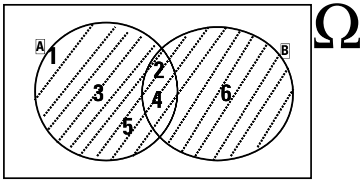

Abbildung 1.2 Vereinigung zweier Mengen A und B

Im Unterschied zur Vereinigungs- enthält die **Schnittmenge** nur Elemente, welche in allen Mengen vorkommen. Man schreibt: „A geschnitten mit B" oder formal: $A \cap B$. In unserem Beispielsfall besteht die Schnittmenge von A und B aus {2, 4}.

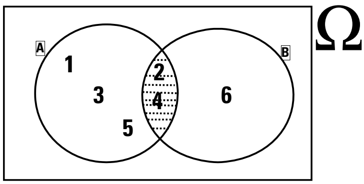

Abbildung 1.3 Schnittmenge zweier Mengen A und B

Ist die Schnittmenge aus zwei Mengen leer, also gleich der leeren Menge { }, nennt man diese Mengen **disjunkt** zueinander. Beispielsweise haben die Mengen A = {1, 2, 3, 4, 5} und B = {11, 12, 13, 14, 15} kein gemeinsames Element.

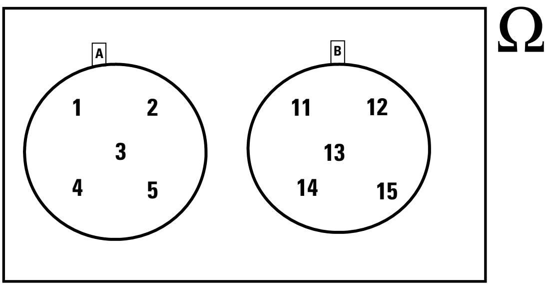

Abbildung 1.4 Zwei disjunkte Mengen A und B

Bildet man zu einer bestimmten Menge A aus allen anderen verbleibenden Elementen, die disjunkt zu A sind, eine neue Menge $\bar{A}$, ist dieses die **Komplementärmenge** zu A. Ist Ω als Gesamtmenge etwa die Menge der positiven natürlichen Zahlen bis einschließlich 12 und besteht A wieder aus {1, 2, 3, 4, 5}, dann ist $\bar{A}$ die Menge der natürlichen Zahlen von 6 bis 12.

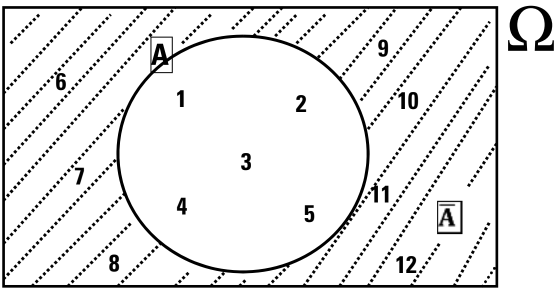

Abbildung 1.5 Komplementäre Mengen A und $\bar{A}$

Grundbegriffe der Logik

Die vorgenannten (Zahlen-)Mengen lassen sich – wie erwähnt – auf der Basis bestimmter Rechenvorschriften – man spricht auch von *Definitionen* – miteinander verknüpfen. Dies wurde im vorstehenden Abschnitt etwa mit den Zeichen für die Vereinigungs- und die Schnittmenge durchgeführt. Weitere Verknüpfungen sind die eingangs erwähnten elementaren Rechenvorschriften hinsichtlich des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens von Zahlen. Derartige Zusammenhänge fußen in der durch Definitionen geprägten Mathematik auf den Gesetzmäßigkeiten der **Logik**. Konkret geht es darum, dass die getroffenen Aussagen in sich stimmig sind. Man sagt auch, dass sie *widerspruchsfrei* zueinander sind.
Für die mit dem Rüstzeug der Mathematik getroffenen **Aussagen** wird demgemäß angegeben, ob sie wahr oder falsch sind. So ist etwa die Aussage, dass 8 eine Primzahl ist, offenkundig falsch, während die Aussage, dass 7 eine Primzahl ist, wahr ist (weil die 7 im Zahlenraum der positiven natürlichen Zahlen außer durch 1 nur noch durch sich selbst teilbar ist). Trifft man die genau gegenteiligen Aussagen, dass 8 *keine* Primzahl ist (was wahr ist) und dass 7 *keine* Primzahl ist (was falsch ist), spricht man von der logischen **Ne-**

gation einer Aussage („Negation“ heißt „Verneinung“). Man verwendet für die Negation einer Aussage das Zeichen „¬“.
Verknüpft man Aussagen durch das „logische Und“ – symbolisiert durch „∧“ – miteinander, handelt es sich um eine **Konjunktion**. Sie gibt an, dass die Gesamtaussage nur dann wahr ist, wenn sowohl die eine als auch die andere Aussage wahr ist. Demgegenüber liegt bei Verknüpfung durch das „logische Oder“ – symbolisiert durch „∨“ – eine **Disjunktion** vor. In diesem Fall ist die Gesamtaussage wahr, falls entweder die eine oder die andere Aussage wahr ist.

BEISPIEL

Die Gesamtaussage „$55 > 52 \wedge 12 < 10$“ ist eine falsche Aussage, da zwar die erste Teilaussage „$55 > 52$“ wahr, aber die zweite Aussage „$12 < 10$“ falsch ist. Ein zweites Beispiel dient der Veranschaulichung der Disjunktion: Die Gesamtaussage „$55 > 52 \vee 12 < 10$“ ist wahr, weil für den Wahrheitsgehalt einer Disjunktion nur eine der beiden Aussagen wahr sein muss (und dies trifft hier bekanntlich auf die erstgenannte Teilaussage zu).

Bruchrechnung

Das Verhältnis aus zwei Zahlen stellt einen **Bruch** dar. Einen Bruch nennt man auch einen **Quotienten.** Der obere Teil des Bruchs heißt **Zähler**, der untere Teil **Nenner**. Ein Bruch ist demnach im Zahlenraum der reellen Zahlen stets eine rationale oder eine irrationale Zahl.

Anteilswert

Zugleich stellt ein Bruch eine **Relation** zwischen Zähler- und Nennerwert dar – in dem Sinne, dass verglichen wird, ob der Zähler- oder der Nennerwert größer ist oder ob beide gleich groß sind. Ist der Zähler eine Teilmenge des Nenners, handelt es sich um einen **Anteilswert**, das heißt um eine Relation kleiner (gleich) 1. Multipliziert man den Wert eines solchen Bruchs mit 100, erhält man den **Prozentwert** des Anteilswerts.

Bruchberechnungsregeln

Man kann nur Brüche mit gleichem Nenner – man spricht dann von *gleichnamigen Brüchen* – addieren:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\ .$$

Sind nämlich die Nenner zweier Brüche voneinander verschieden, so werden die jeweiligen Zählerwerte insofern unzulässig miteinander verglichen, als sie auf unterschiedlichen Bezugsgrößen fußen.

BEISPIEL

Wenn zum Beispiel die Anteilswerte 75 % und 20 % jeweils in Bruchform miteinander addiert werden sollen, bedeutet das die Addition von $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{5}$. Würde man einfach $\frac{3+1}{4+5}$ rechnen, ergäbe dies einen Bruch von $\frac{4}{9}$ und damit einen Prozentwert von etwas weniger als der Hälfte. Der korrekte Wert der Anteilswertaddition lautet aber 95 %. Ihn erhält man in Bruchschreibweise, wenn man den ersten Bruch mit dem Nennerwert des zweiten Bruchs und den zweiten Bruch mit dem Nennerwert des ersten Bruchs multipliziert:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}=\frac{15+4}{20}=\frac{19}{20}\ .$$

Dieser Bruch entspricht genau 95 %, was durch Erweiterung des vorstehenden Bruchergebnisses mit dem Faktor 5 (auf 100) deutlich wird: $\frac{19\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{95}{100}$.

Bezüglich der Multiplikation von Brüchen gilt (was bereits aus der im eben diskutierten Beispiel betrachteten Brucherweiterung mit dem Faktor 5 hervorging):

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\ .$$

Multiplizieren Sie etwa $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{5}$ miteinander, so können Sie dies so verstehen, dass Sie aus einer Gesamtmenge an Elementen zunächst ein Fünftel davon und dann noch einmal drei Viertel dieses Fünftels berücksichtigen. Befinden sich zum Beispiel unter 60 Personen genau 12 Jugendliche und Sie interessieren sich nur für diese Jugendlichen, haben Sie genau ein Fünftel der 60 Personen berücksichtigt. Nun stellen Sie die 12 Jugendlichen in 3 Viererreihen nebeneinander auf und greifen sich aus jeder Viererreihe 3 Jugendliche heraus, sodass Sie insgesamt 9 Jugendliche ausgewählt haben. Sie haben damit aus 60 Personen 9 Jugendliche ausgewählt. Als Bruch sind dies $\frac{9}{60} = \frac{3}{20}$, wie Sie auch durch entsprechende Multiplikation als Ergebnis erhalten: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Bei der anfänglichen Erörterung von Zahlensystemen in diesem Kapitel haben Sie bereits von dem Begriff der Potenzen Gebrauch gemacht, ohne ihn aber näher erläutert zu haben. Dies wird hier nachgeholt: Grundsätzlich – und wie aus der Schulmathematik bekannt – ist eine **Potenz** dadurch gekennzeichnet, dass man eine bestimmte Zahl mehrmals mit sich selbst multipliziert. Die betreffende Zahl nennt man die **Basis**, und die Anzahl der Multiplikationen „mit sich selbst" bildet den **Exponenten** der Potenz. Für n Multiplikationen einer Zahl a mit sich selbst erhalten Sie demnach a^n als Potenz. Bei einer negativen Basis (also bei –a) gilt: Ist n gerade, ergibt sich als Ergebnis ein positiver Wert (weil zum Beispiel „minus mal minus gleich plus" ist). Ist n hingegen ungerade, ist das Ergebnis negativ (weil zum Beispiel „minus mal minus mal minus gleich minus" ist). Für einen Exponenten in Höhe von 0 lautet das Ergebnis – unabhängig von dem Wert der Basis – stets 1. Schließlich ist noch $\frac{1}{a^n}$ in lediglich anderer Schreibweise gleich a^{-n}.

Zu dem Vorstehenden gebe ich Ihnen folgende einfache Beispiele:

1. $-3^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot 9 = 81;$
2. $-3^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27;$
3. $-3^0 = 1$ beziehungsweise $3^0 = 1;$
4. $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ beziehungsweise $3^{-4} = \frac{1}{81}.$

Ermittelt man für einen vorgegebenen Potenzausdruck – bei gleichfalls gegebenem Exponenten – die Basis, zieht man die **Wurzel** aus diesem Ausdruck,

zum Beispiel: $\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{3^2} = 3$ (aber auch: $\sqrt[2]{9} = \sqrt[2]{(-3)^2} = -3$). Demgegenüber muss man den **Logarithmus** bilden, wenn man bei gegebener Basis – und gegebenem Gesamtwert der Potenz – den Exponenten einer Potenz ausrechnen möchte. Für $a^n = c$ erhält man als logarithmischen Ausdruck: $\log_a(c) = n$ (gesprochen: der Logarithmus von c zur Basis a ist gleich dem Exponenten n). Mit der Basis 10 und dem Exponenten 2 erhält man beispielsweise: $\log_{10}(c) = 2$. Da 10^2 gleich 100 ist, entspricht c in diesem Beispiel also 100.
In der nachstehenden Tabelle sind die Unterschiede zwischen Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren (= Wurzelziehen) zusammengestellt.

Basis (a)	**Exponent (n)**	**Ergebnis (a^n)**	**Verfahren**
Gegeben	Gegeben	Zu ermitteln	Potenzieren
Gegeben	Zu ermitteln	Gegeben	Logarithmieren
Zu ermitteln	Gegeben	Gegeben	Radizieren

Tabelle 1.1 Potenzieren, Logarithmieren und Radizieren

Potenzrechenregeln

Eine Potenz kann ihrerseits potenziert werden. Dazu müssen nur die jeweiligen Exponenten miteinander multipliziert werden:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} .$$

Beispielsweise ist der Ausdruck $(a^2)^3$ gleichbedeutend damit, dass $(a \cdot a)$ dreimal mit sich selbst multipliziert wird, also: $(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a)$. Sie erkennen, dass dieses Produkt in der Tat der 6-fachen Multiplikation von a mit sich selbst, das heißt a^6, entspricht.
Außerdem kann man nur Vielfache von Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten addieren, also:

$$\alpha \cdot a^n + \beta \cdot a^n = (\alpha + \beta) \cdot a^n .$$

Den vorstehenden Ausdruck erhält man durch einfaches Ausklammern von a^n auf der Grundlage des Distributivgesetzes.

Achtung

Ein häufiger Fehler ist es, Potenzen aus Summen einzeln zu bilden, zum Beispiel aus $(4-2)^2$ fälschlicherweise $4^2 - 2^2$ zu machen. Der letztgenannte Ausdruck ist aber gleich $16 - 4 = 12$, während der eigentliche Ausdruck $2^2 = 4$ lautet.

Die Multiplikation von Potenzen ist bei unterschiedlichen Exponenten nur für solche mit gleicher Basis möglich; es gilt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} .$$

Analog ergibt sich für die Division von Potenzen mit gleicher Basis:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} .$$

Auch die beiden vorstehenden Regeln kann man sich sehr leicht anhand von Beispielen klar machen. So gelten: $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5$ und $\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^1 = a$.

Des Weiteren können Potenzen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten folgendermaßen multipliziert beziehungsweise dividiert werden:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n .$$

Beispielsweise erhalten Sie: $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2$ und $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Derartige Regeln vereinfachen die Berechnungen insofern, als nicht zweimal, sondern nur noch einmal potenziert werden muss.

BEISPIEL

Die vorstehenden Rechenregeln für Potenzen sollen beispielhaft für $a = 5$, $b = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $n = 2$ und $m = 3$ nochmals übersichtlich präsentiert werden:

$$(5^2)^3 = 25^3 = 15.625 \quad \text{beziehungsweise} \quad (5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 = 15.625;$$

$$2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 = 50 + 75 = 125 \quad \text{beziehungsweise}$$
$$2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 = (2+3) \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 125;$$

$$5^2 \cdot 5^3 = 25 \cdot 125 = 3.125 \quad \text{beziehungsweise}$$
$$5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3.125;$$

$$\frac{5^2}{5^3} = \frac{25}{125} = 0,20 \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,20;$$

$$5^2 \cdot 4^2 = 25 \cdot 16 = 400 \quad \text{beziehungsweise}$$
$$5^2 \cdot 4^2 = (5 \cdot 4)^2 = 20^2 = 400;$$

$$\frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1,5625 \quad \text{beziehungsweise}$$
$$\frac{5^2}{4^2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1,25^2 = 1,5625.$$

Wurzelrechenregeln

Zieht man aus einer Potenz a^n die m-te Wurzel – man spricht bekanntlich auch vom **Radizieren** –, bedeutet das, dass man zur Basis a den Exponenten $\frac{n}{m}$ bildet:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Achtung

Eine geradzahlige Wurzel kann nicht für einen negativen Ausdruck a^n berechnet werden. Beispielsweise bedeutet ein Exponent von 2, dass die zugehörige Potenz nie negativ ist, weil eine beliebige Zahl mit sich selbst multipliziert stets eine nichtnegative Zahl ergibt: $\sqrt[2]{-4}$ ist zum Beispiel nicht definiert, $\sqrt[2]{4}$ mit den beiden Lösungen -2 und +2 hingegen schon. In dem skizzierten Problemfall $\sqrt[2]{-4}$ muss auf die komplexen Zahlen ausgewichen werden. Entsprechende Lösungen müssen indes einem weiterführenden Mathematikbuch vorbehalten bleiben. Demgegenüber sind ungerade Wurzeln aus negativen Zahlen möglich, zum Beispiel: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Wegen des engen Zusammenhangs zwischen Potenzen und Wurzeln basieren die Rechenregeln für Wurzeln auf den oben für Potenzen dargelegten. So gilt für das Produkt beziehungsweise für die Division von Wurzeln:

$$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{(a \cdot b)^n} \Leftrightarrow a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}} = (a \cdot b)^{\frac{n}{m}}$$

beziehungsweise

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \Leftrightarrow \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}$$

Zudem resultiert für „verschachtelte“ Wurzelausdrücke:

$$\sqrt[j]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[j \cdot m]{a^n} \Leftrightarrow \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{j}} = a^{\frac{n}{m \cdot j}}$$

Analog zu den Vereinfachungsregeln für Potenzen muss auch bei diesen Wurzelrechenregeln nicht mehr zweimal, sondern nur einmal radiziert werden.

BEISPIEL

Die vorstehenden Rechenregeln für Wurzeln werden nachfolgend beispielhaft für a = 5, b = 4, m = 2, n = 3 und j = 4 dargelegt (das Zeichen „≈“ bedeutet „ungefähr gleich“):

$$\sqrt[2]{5^3} \cdot \sqrt[2]{4^3} \approx 11{,}1803 \cdot 8 \approx 89{,}4427$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\sqrt[2]{5^3} \cdot \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{(5 \cdot 4)^3} = \sqrt[2]{20^3} = \sqrt[2]{8.000} \approx 89{,}4427\,;$$

$$\frac{\sqrt[2]{5^3}}{\sqrt[2]{4^3}} \approx \frac{11{,}1803}{8} \approx 1{,}3975$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\frac{\sqrt[2]{5^3}}{\sqrt[2]{4^3}} = \sqrt[2]{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \sqrt[2]{1{,}25^3} \approx 1{,}3975\,;$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[2]{5^3}} \approx \sqrt[4]{11{,}1803} \approx 1{,}8286$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\sqrt[4]{\sqrt[2]{5^3}} = \sqrt[4\cdot 2]{5^3} = \sqrt[8]{125} \approx 1{,}8286\,.$$

Logarithmenregeln

Der **Logarithmus** gibt – wie oben bereits erwähnt – bei gegebenen Werten für die Potenz (c) und auch für die Basis der Potenz (a) den Wert des Exponenten (n) an. Das heißt: Bei Zugrundelegung von $a^n = c$ berechnet man $\log_a(c) = n$. Je nach Wert der Basis unterscheidet man verschiedene Logarithmenarten. Am verbreitetsten sind der *dekadische Logarithmus* mit der Basis 10 und der *natürliche Logarithmus*, der die Euler'sche Zahl e zur Basis hat (e = 2,71828...).
Aus der allgemeinen Schreibweise für einen Logarithmus $\log_a(c)$ wird speziell für den dekadischen Logarithmus $\log_{10}(c)$ beziehungsweise einfach nur $\log(c)$. Für den natürlichen Logarithmus schreibt man $\log_e(c)$ beziehungsweise einfach $\ln(c)$.

Achtung

Da a^0 bekanntlich als 1 definiert ist, ist der Logarithmus $\log_a(1)$ stets – das heißt unabhängig von der Basis – gleich 0. Außerdem ist wegen $a^1 = a$ der Logarithmenausdruck $\log_a(a)$ immer gleich 1. Ferner ist zu beachten, dass der Logarithmus von 0 [$\log_a(0)$] ebenso wenig definiert ist wie der Logarithmus aus einer negativen Zahl.

Aus der Definition des Logarithmus folgt unmittelbar, dass er als Exponent zur betreffenden Basis genau die zugrunde liegende Potenz angibt:

$$a^{(\log_a(c))} = c\,.$$

Beispielsweise erhalten Sie für $10^{(\log_{10}(100))}$ als Ergebnis 100. Dies ist plausibel, weil $\log_{10}(100)$ wegen $10^2 = 100$ gleich 2 ist und sich daher für $10^{(\log_{10}(100))}$ als Ausdruck $10^2 = 100$ ergibt.
Folgende weitere **Logarithmenregeln** sind für Ihr Studium von Bedeutung:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

beziehungsweise

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

und

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$

beziehungsweise speziell:

$$\log_a(a^c) = c \cdot \log_a(a) = c\,.$$

Schließlich gilt auch noch die allgemeine Beziehung

$$\log_a(b) = \frac{\log_\alpha(b)}{\log_\alpha(a)}\,.$$

Bekanntlich ist $\log_{10}(10)$ wegen $10^1 = 10$ gleich 1; dies wird auch nach Einsetzen in die vorherige Formel (mit der willkürlichen Basis 2 im Zähler und Nenner des Bruchs) deutlich: $\log_{10}(10) = \frac{\log_2(10)}{\log_2(10)} = 1$. Ein anderes Beispiel ist die indirekte Berechnung von ln (5), was ungefähr gleich 1,6094 ist. Den letztgenannten Wert erhält man auch, wenn man – unter willkürlicher Wahl der Basis 10 für den Bruch auf der rechten Seite – in die betreffende Formel die relevanten Werte einsetzt: $\ln(5) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(e)} \approx \frac{0,69897}{0,43429} \approx 1,6094$.

BEISPIEL

Mit b = 2 und c = 3 erhält man speziell für den dekadischen Logarithmus und für die angeführten anderen Rechenregeln:

$$10^{(\log(2))} = 10^{0,30103} = 2$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$10^{(\log(2))} = 2\,;$$

$$\log(2 \cdot 3) = \log(6) \approx 0,7782$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\log(2 \cdot 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0,30103 + 0,47712 = 0,7782\,;$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(1,5) \approx 0,1761$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(3) - \log(2) \approx 0{,}4771 - 0{,}3010 \approx 0{,}1761\,;$$

$$\log(3^2) = \log(9) \approx 0{,}9542$$

beziehungsweise (auf Basis der obigen Regeln)

$$\log(3^2) = 2 \cdot \log(3) \approx 2 \cdot 0{,}4771 \approx 0{,}9542\,.$$

Binomische Formeln

Für die multiplikative Verknüpfung von zwei Zahlen in quadratischer Weise existieren drei grundlegende **binomische Formeln**. Sie basieren allesamt auf der Ausklammerungsvorschrift gemäß dem oben bereits genannten *Distributivgesetz*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

Drei grundlegende binomische Formeln

Für zwei Zahlen a und b kann man in der obigen Formel des Distributivgesetzes sowohl die Zahl a als auch den Ausdruck (b + c) durch (a + b) ersetzen und erhält nach Umformungen die **erste binomische Formel**. Ersetzt man den Operator Plus durch das Minuszeichen, kann die **zweite binomische Formel** hergeleitet werden. Die **dritte binomische Formel** schließlich ergibt sich für das Produkt aus (a + b) und (a – b).
Konkret resultieren folgende drei grundlegende binomische Formeln:
erste binomische Formel („Plus-Formel"):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\;;$$

zweite binomische Formel („Minus-Formel"):

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2;$$

dritte binomische Formel („Plus-Minus-Formel"):

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

BEISPIEL

Folgende Beispiele dienen der Erläuterung der drei binomischen Formeln, wobei a = 3 und b = 2 sind:

1. $(3+2)^2 = 5^2 = 25$

   beziehungsweise nach der ersten binomischen Formel:

   $(3+2)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25\,;$

2. $(3-2)^2 = 1^2 = 1$

   beziehungsweise nach der zweiten binomischen Formel:

   $(3-2)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 2 + 2^2 = 9 - 12 + 4 = 1\,;$

3. $(3+2)\cdot(3-2) = 5\cdot 1 = 5$

   beziehungsweise nach der dritten binomischen Formel:

   $(3+2)\cdot(3-2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5\,.$

Herleitung

Wie die drei grundlegenden binomischen Formeln durch Ausklammern auf der Grundlage des Distributivgesetzes hergeleitet werden können, wird nachfolgend gezeigt.
Herleitung der **ersten binomischen Formel**:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2\,;\end{aligned}$$

Herleitung der **zweiten binomischen Formel**:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a - (-)b\cdot b\\ &= a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2\,;\end{aligned}$$

Herleitung der **dritten binomischen Formel**:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2.$$

Allgemeine binomische Formel

Die obige grundlegende erste und zweite binomische Formel können aus einer allgemeinen Formel abgeleitet werden. Hierzu wird im Folgenden der

Exponent verallgemeinert; das heißt, dass anstelle des Quadrats der Wert n als Exponent Verwendung findet. Es geht demnach um die Berechnung des Ausdrucks $(a+b)^n$: Der Ausdruck (a + b) wird n-mal mit sich selbst multipliziert. Bezüglich der zweiten binomischen Formel müssen Sie anstelle von +b einfach –b schreiben.

Die **allgemeinen Formulierungen für die erste und zweite binomische Formel** lauten dann:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

beziehungsweise

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot (-b)^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot (-b)^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot (-b)^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot (-b)^n .$$

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**.

Er ist definiert als:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} .$$

Das Zeichen „!“ nennt man **Fakultät**; eine solche stellt, wie zu erkennen ist, das Produkt der absteigend angeordneten positiven natürlichen Zahlen von der Zahl vor dem Fakultätszeichen bis hin zur 1 dar. 3! beispielsweise ist gleich $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, und 10! zum Beispiel gleicht $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$.

Wie leicht nachzuvollziehen ist, gilt: $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, und damit ist: $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = n+1$. 0! ist ebenso wie 1! als 1 definiert. Bitte beachten Sie, dass grundsätzlich $(a \cdot n)! \neq a! \cdot n!$ ist. Für a = 2 und n = 3 beispielsweise lautet dieser Klammerausdruck $2 \cdot 3 = 6$, was zu 6! und damit zum Ergebnis von $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ führt. Demgegenüber ist das Produkt aus 2! und 3! gleich $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Achtung

Der Binomialkoeffizient spiegelt grundsätzlich die Anzahl der **Kombinationen** zwischen k Elementen aus einer Menge von insgesamt n Elementen wider, und zwar unabhängig von der Anordnung der k Elemente und ohne die Elemente bei der Kombination mehrfach zu berücksichtigen. Ein bekanntes Anwendungsbeispiel für den Binomialkoeffizienten ist die Anzahl der Möglichkeiten für sechs „Richtige" im Lotto „6 aus 49", die sich als Binomialkoeffizient $\binom{49}{6}$ darstellen lässt. Entsprechend ergeben sich für diesen Fall insgesamt $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$ Möglichkeiten.

Eine Hilfe zur Ermittlung der Werte für die Binomialkoeffizienten in der allgemeinen binomischen Formel stellt das **Pascal'sche Dreieck** dar. Es gibt von oben nach unten für $(a + b)^n$ und $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ die betreffenden Werte an. Diese Werte der Koeffizienten in einer bestimmten Zeile resultieren – mit Ausnahme der beiden Randwerte, die in allen Zeilen jeweils gleich 1 sind – aus der paarweisen Addition der Koeffizientenwerte in der unmittelbar darüber liegenden Zeile. Zum Beispiel erhalten Sie für n = 2 – das heißt in der dritten Zeile des Pascal'schen Dreiecks – die Koeffizienten 1, 2 (= 1 + 1) und 1, wie Sie bereits wissen. Von n = 0 bis n = 5 sind in der folgenden Darstellung die entsprechenden Binomialkoeffizienten angegeben.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Abbildung 1.6 Pascal'sches Dreieck

Ist n = 2, resultiert die obige *grundlegende erste beziehungsweise zweite binomische Formel* ebenfalls aus der allgemeinen Formel (unter Beachtung, dass 0! als 1 definiert ist):

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^{2-1} \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^{2-2} \cdot b^2 \\ &= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} a^2 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} \cdot a \cdot b + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot (-b)^0 + \binom{2}{1} \cdot a^{2-1} \cdot (-b)^1 + \binom{2}{2} \cdot a^{2-2} \cdot (-b)^2 \\ &= \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} a^2 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} \cdot a \cdot (-b) + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 \cdot b^2 \\ &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 .\end{aligned}$$

Anhand des Pascal'schen Dreiecks hätten Sie im Übrigen – wie bereits geschrieben – aus der dritten Zeile gleich ablesen können:

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

beziehungsweise

$$(a-b)^2 = 1 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2.$$

Für $(a + b)^3$ und $(a - b)^3$ können Sie entsprechend aus der vierten Zeile des Pascal'schen Dreiecks als binomischen Ausdruck ablesen:

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^2$$

beziehungsweise

$$(a-b)^3 = 1 \cdot a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^2.$$

Die **Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel** ist etwas schwieriger als jene der ersten und der zweiten binomischen Formel. Es gilt (sozusagen umgekehrt formuliert), wobei ∑ das Summenzeichen ist:

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot a^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k .$$

Mit dieser allgemeinen Formel erhalten Sie für n = 2 den Ausdruck:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot a \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) = (a - b) \cdot (a + b)$$

und für n = 3:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot a^2 \cdot \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \ .$$

Gleichungen

Etwa in der Mikroökonomie spielen Gleichungen eine große Rolle, dort speziell bei der Ermittlung der Marktpreise und –mengen. Dazu setzt man dort die Angebots- und die Nachfragefunktion miteinander gleich. Um entsprechende Grundzusammenhänge zu erörtern, beschränkt sich dieser Abschnitt auf Zusammenhänge für lediglich zwei Gleichungen und zwei Variablen x und y. Streng genommen handelt es sich im Folgenden bereits um die Erörterung nicht nur einzelner Gleichungen, sondern um die eines aus zwei Gleichungen bestehenden Gleichungssystems. Weitere Ausführungen zu Gleichungssystemen folgen später in Kapitel 5.
Grundsätzlich lässt sich eine Gleichung als **Polynom** n-ten Grades darstellen. Hierzu werden die x-Werte mit aufsteigenden Exponenten 0, 1, 2, ..., n versehen:

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n \ .$$

Ersetzt man das Gleichheitszeichen durch ein Kleiner-gleich- oder ein Größer-gleich-Zeichen, wird aus der jeweiligen Gleichung eine Ungleichung:

$$y \geq a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n$$

beziehungsweise

$$y \leq a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n \ .$$

Multipliziert man eine Größer-gleich-Beziehung auf beiden Seiten mit (-1), kehrt sie sich in eine Kleiner-gleich-Beziehung um (und umgekehrt). Etwas schwieriger verhält es sich, wenn man beide Seiten mit einem Ausdruck mit

der Variablen x multipliziert. Dann muss man bezüglich der Ungleichheitsbeziehung typischerweise eine **Fallunterscheidung** durchführen.
Betrachten Sie hierzu das Beispiel

$$\frac{3}{x+2} < 3 \,.$$

Sie multiplizieren nunmehr beide Seiten mit (x + 2), so dass auf der linken Seite +3 stehen bleibt und auf der rechten Seite nunmehr der Ausdruck 3 · (x + 2) vorzufinden ist. Ist nun (x + 2) > 0, bleibt die Kleiner-Beziehung bestehen: Bei zum Beispiel x = 1 erhalten Sie auf der rechten Seite den Wert +9, der größer als +3 auf der linken Seite ist. Demgegenüber kehrt sich die Kleiner-Beziehung im Fall von (x + 2) < 0 in eine Größer-Beziehung um. Ist x beispielsweise gleich –3, lautet der Wert auf der rechten Seite -3, der kleiner als der Wert +3 auf der linken Seite ist.
Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich ausschließlich auf die Gleichheitsbeziehung. Sie werden für Polynome n-ten Grades dargelegt. Hierbei ist ein Polynom ersten Grades eine lineare Gleichung, ein Polynom zweiten Grades eine quadratische Gleichung und ein solches dritten Grades eine kubische Gleichung. Auf diese drei Polynomarten und deren Lösung für x-y-Zusammenhänge bei zwei Gleichungen beschränken sich die folgenden Ausführungen in diesem Abschnitt, wobei deren Erörterung – aus didaktischen Gründen – noch der einfache Dreisatz vorangestellt ist.

Homogene und inhomogene Gleichungen

Dabei gilt eine Gleichung als **homogen**, wenn die Vervielfachung der x-Größe ebenfalls zu einer Vervielfachung des y-Wertes führt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gleichung für y keine Konstante ungleich 0 enthält. Das heißt in der obigen allgemeinen Polynomangabe, dass $a_0 = 0$ ist.
Dabei spricht man von einer **linear-homogenen** Gleichung, wenn der y-Wert sich in genau dem gleichen Maße multiplikativ verändert wie der x-Wert. Das heißt: Verändert man den x-Wert um λ und verändert sich y ebenfalls genau um λ, ist die Gleichung linear-homogen. Verdoppelt man beispielsweise in der Gleichung y = 2 · x den Input im Rahmen eines Produktionsprozesses (das heißt x) und verdoppelt sich der Output (hier also y) ebenfalls, ist λ gleich 2, und der betreffende Produktionszusammenhang ist linear-homogen. In unserem Beispiel gilt nach der Verdoppelung von x:

$2 \cdot y = 2 \cdot (2 \cdot x)$. Erhöht man etwa den Input von 10 auf 20 Mengeneinheiten, verändert sich im Beispiel der Output von 20 auf 40 Mengeneinheiten.
Im Fall einer überproportionalen Veränderung des y-Wertes bei einer multiplikativen Veränderung von x liegt eine **überlinear-homogene** Gleichung vor. Liegt etwa der Produktionszusammenhang $y = 0{,}5 \cdot x^2$ vor, führt in diesem Beispiel eine Verdoppelung des Inputs zu einer Vervierfachung des Outputs (das Zeichen „⇔" zeigt an, dass die jeweiligen Gleichungsausdrücke gleichwertig zueinander sind): $y_{neu} = 0{,}5 \cdot (2 \cdot x)^2 \Leftrightarrow y_{neu} = 2^2 \cdot (0{,}5 \cdot x^2) \Leftrightarrow y_{neu} = 4 \cdot y$. Eine Inputerhöhung von 10 auf 20 Mengeneinheiten bewirkt in diesem Beispiel entsprechend eine Outputerhöhung von 50 auf 200 Mengeneinheiten. Der Veränderungsfaktor λ beträgt demnach 4 beziehungsweise 2^2. Allgemein können Sie formulieren: Wenn der Exponent von λ^s größer 1 ist (wie in unserem Beispiel, in dem er 2 entspricht), liegt eine überlinear-homogene Gleichung vor.
Bei einer unterproportionalen y-Veränderung in Bezug auf eine multiplikative x-Veränderung haben Sie es mit einer **unterlinear-homogenen** Gleichung zu tun. Für den Produktionszusammenhang $y = 2 \cdot \sqrt[2]{x}$ beispielsweise folgt aus einer Verdoppelung von x, etwa von 9 auf 18 Mengeneinheiten, eine Erhöhung von y nur von 6 auf zirka 8,49 Mengeneinheiten. Diese schwache Outputveränderung entspricht einer relativen Erhöhung um $\sqrt[2]{2} = 2^{0,5}$ (zirka 8,49 dividiert durch 6 ist etwa 1,41, also gleich der Quadratwurzel aus 2). Mit anderen Worten: In diesem Beispiel gilt $\lambda^{0,5}$. Der Exponent des Veränderungsfaktors λ ist kleiner 1, was die betreffende Gleichung als unterlinear-homogene Gleichung ausweist. Bei einer Verdoppelung gilt in diesem Beispiel formal:

$$y_{neu}=2 \cdot \sqrt[2]{2 \cdot x} \Leftrightarrow y_{neu}=\sqrt[2]{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[2]{x} \Leftrightarrow y_{neu}=\sqrt[2]{2} \cdot y\ .$$

Sollte keiner dieser genannten Fälle zutreffend sein, handelt es sich um eine **inhomogene** Gleichung. Eine solche ist immer dann gegeben, wenn eine Gleichung eine Konstante enthält.

Der einfache Dreisatz

Das einfachste Polynom ist ein solches, in dem y einem konstanten Wert gleicht, x somit ausschließlich mit dem Exponenten 0 versehen ist: $y = a \cdot x^0 = a$. Diese Beziehung kann mit dem **einfachen Dreisatz** in Verbindung gebracht werden. Der Dreisatz beschreibt – wie Ihnen sicherlich noch aus der schulischen Mittelstufe bekannt ist – die Beziehung zweier Verhältnisse $\frac{y}{\theta}$ und $\frac{\beta}{\mu}$, wobei bis auf y alle anderen Größen bekannt sind:

$$\frac{y}{\theta} = \frac{\beta}{\mu} \Leftrightarrow y = a \quad \text{mit} \quad a = \frac{\beta}{\mu} \cdot \theta.$$

Es könnte zum Beispiel bei gegebenen Werten für θ = 100 Arbeitskräfte, ß = 2.000 Quietscheentchen und μ = 200 Arbeitskräften gefragt werden, wie viele Teddybären (y) produziert werden müssten, damit (im Sinne der Produktivitäten) das Verhältnis aus produzierten Gütern (Teddybären beziehungsweise Quietscheentchen) und Arbeitskräften auf beiden Seiten der Gleichung gleich hoch ist. Dazu muss man beide Seiten von $\frac{y}{100} = \frac{2.000}{200}$ mit θ = 100 multiplizieren und erhält:

$$y = \frac{2.000}{200} \cdot 100 = 1.000\ .$$

Es müssten also y = 1.000 Teddybären produziert werden. In unserem Beispiel gilt wegen $\frac{\beta}{\mu} \cdot \theta = a$ für y nämlich: y = a = 1.000.

Lineare Gleichungen

Von einer **linearen Gleichung** – einer *Geraden* – spricht man im Fall von $y = a + b \cdot x$. Sie werden sich im Folgenden die Lösung eines kleinen linearen Gleichungssystems anhand eines ökonomischen Angebot-Nachfrage-Beispiels vor Augen führen. Die eben genannte Gleichung $y = a + b \cdot x$ soll die Angebotsfunktion widerspiegeln (mit y als angebotener Menge, x als Güterpreis, a als *Konstante* und b als weiterer *Parameter*). Die Nachfragefunktion soll durch eine weitere Gerade $y = c - d \cdot x$ gegeben sein (mit y als nachgefragter Menge, x wieder als Güterpreis, c als Konstante und d als weiterer Parameter). Im Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragegerade bestimmen sich auf einem Markt der Marktpreis x und die gehandelte Menge y.
Durch folgerichtiges Gleichsetzen beider Gleichungen erhält man für x:

$$a + b \cdot x = c - d \cdot x \Leftrightarrow (b + d) \cdot x = c - a \Leftrightarrow x = \frac{c - a}{b + d}\ .$$

Setzen Sie diesen Wert in eine der beiden Gleichungen für y ein, gewinnen Sie den Wert für y, also:

$$y = a + b \cdot \frac{c - a}{b + d} \quad \text{oder} \quad y = c - d \cdot \frac{c - a}{b + d}.$$

Gelten beispielsweise $y = 4 + 6 \cdot x$ und $y = 20 - 2 \cdot x$, so ist x gleich 2 $\left(= \frac{20 - 4}{6 + 2} \right)$, und für y resultiert ein Wert von 16 ($y = 4 + 6 \cdot 2$ beziehungsweise $y = 20 - 2 \cdot 2$). In unserem Beispielszusammenhang liegt demnach der Marktpreis bei 2 Geldeinheiten, und es werden auf dem betreffenden Markt 16 Mengeneinheiten gehandelt.

Achtung

Dieses kleine System linearer Gleichungen ist lösbar, weil zu zwei Variablen exakt zwei Gleichungen gehören, die nicht voneinander abhängen. Wären hingegen für drei Variablen nur zwei Gleichungen gegeben gewesen, dann hätte man für eine Variable einen (beliebigen) Wert vorgeben müssen, um Lösungen für die beiden anderen Variablen zu erhalten. Dieser Grundzusammenhang zwischen Variablen- und Gleichungsanzahl gilt auch für höherwertige Polynome (also zum Beispiel auch für die später in diesem Abschnitt zu besprechenden quadratischen und kubischen Gleichungen). Er wird in Kapitel 5 noch genauer erörtert.

Man kann ein lineares Gleichungssystem wie das vorstehende im Übrigen auch dadurch lösen, dass man von der einen Gleichung die andere subtrahiert:

$$\begin{array}{l} \quad y = a + b \cdot x \\ - \, y = c - d \cdot x \\ \hline = 0 = a - c + (b + d) \cdot x\,; \end{array}$$

auch aus dieser gleich 0 gesetzten Gleichung folgt für x durch Umformung:

$$x = \frac{c - a}{b + d}.$$

Quadratische Gleichungen

Eine **quadratische Gleichung** hat die Form:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2\,.$$

PQ-Formel

Zur Lösung eines solchen Gleichungssystems für zwei quadratische Gleichungen dient unter anderem die **PQ-Formel**. Hierzu wird auch eine quadratische Gleichung in die *Normalform* gebracht, indem sie gleich 0 gesetzt wird:

$$0 = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \,.$$

Anschließend werden beide Seiten durch c dividiert und der neue Koeffizient $\frac{b}{c}$ wird durch p und das neue *konstante Glied* $\frac{a}{c}$ durch q dargestellt. Man erhält folgende neue Gleichung:

$$x^2 + p \cdot x = -q.$$

In einem nächsten Schritt werden beide Seiten mit dem quadratischen Ausdruck $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ – mit der sogenannten **quadratischen Ergänzung** – erweitert:

$$x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\,.$$

Offenkundig kann man die linke Seite anhand der *ersten binomischen Formel* durch $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ darstellen, so dass Sie durch Wurzelziehen erhalten:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt[2]{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,;$$

wichtig an der vorstehenden Gleichung sind die Betragsstriche auf der linken Seite, da eine Quadratwurzel im Zahlenraum der reellen Zahlen nur für einen positiven Wert gezogen werden darf. Für x ergeben sich als Lösung zwei Werte:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt[2]{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,;$$

dies ist die PQ-Formel.

BEISPIEL

Mittels der PQ-Formel sollen für die (gleich 0 gesetzte) quadratische Gleichung $2 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 22 = 0$, die zum Beispiel auch aus einer Gleichsetzung von Güterangebots- und Güternachfragefunktion hervorgegangen ist, die möglichen x-Werte ermittelt werden. Nach Division beider Seiten durch 2 und mit Hilfe der quadratischen Ergänzung von $\left(\frac{\frac{20}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2$ werden letztlich die beiden x-Werte bestimmt (p ist – wie ersichtlich – gleich 10 und q gleich –11):

$$x_1 = -\frac{10}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 11} = -5 + \sqrt[2]{36} = 1$$

und

$$x_2 = -\frac{10}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 11} = -5 - \sqrt[2]{36} = -11\,.$$

Bei ökonomischen Problemen sind oft nur die nichtnegativen x-Ergebnisse der PQ-Formel von Interesse. Dies liegt darin begründet, dass zum Beispiel Preise und Mengen – als zentrale ökonomische Größen – nichtnegativ sind.

ABC-Formel

Eine quadratische Gleichung in der Form $0 = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ kann auch gelöst werden, ohne – wie bei der PQ-Formel notwendig – durch c zu dividieren. Dann kann man sozusagen direkt die **ABC-Formel** nutzen:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2 \cdot c} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2}{4 \cdot\ c^2} - \frac{a}{c}}.$$

Im Beispiel von eben, das heißt: $2 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 22 = 0$, erhalten Sie:

$$x_{1,2} = -\frac{20}{2 \cdot 2} \pm \sqrt[2]{\frac{20^2}{4 \cdot 2^2} + \frac{22}{2}}$$

und damit:

$$x_1 = -5 + \sqrt[2]{\frac{400}{16} + 11} = -5 + \sqrt[2]{36} = 1$$

beziehungsweise:

$$x_2 = -5 - \sqrt[2]{\frac{400}{16} + 11} = -5 - \sqrt[2]{36} = -11\,.$$

Satz von Viëta

Eine weitere Lösungsalternative für eine quadratische Gleichung ist der **Satz von Viëta**. Der Grundgedanke hierbei ist, eine quadratische Gleichung, die bereits in der Form der PQ-Formel ist: $x^2 + p \cdot x + q = 0$, auf den Ausdruck $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ zu bringen. Damit gilt:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2$$
$$\Leftrightarrow (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

Wie man sieht, ist jetzt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$. In unserem Beispiel $2 \cdot x^2 + 20\,x - 22 = 0$ sind, wie oben hergeleitet, $p = 10$ und $q = -11$, sodass Sie folgende konkreten Zusammenhänge erhalten: $x_1 + x_2 = -10$ und $x_1 \cdot x_2 = -11$. Bei ganzzahligen Lösungswerten ist leicht ersichtlich, dass die zweite Gleichung bei $x_1 = +1$ und $x_2 = -11$ beziehungsweise bei $x_1 = -1$ und $x_2 = +11$ lösbar ist. Bei $x_1 = -1$ würde die Ausgangsgleichung indes zu $(-1)^2 + 10 \cdot (-1) - 11 = -20 \neq 0$. Dies kann also keine Lösung sein. Somit erhält man, ohne sich eine Formel wie die PQ- oder die ABC-Formel merken zu müssen, als Lösungen: $x_1 = +1$ und $x_2 = -11$. In beiden Fällen ist die Ausgangsgleichung gleich 0, das heißt gelöst.

Achtung

Wie an dem Beispiel von eben deutlich wird, baut der Satz von Viëta zwar im Grunde genommen allein auf dem gesunden Menschenverstand auf. Seine praktische Anwendbarkeit beschränkt sich allerdings im Wesentlichen auf den Fall ganzzahliger Lösungen.

Sonderfall

Fehlt bei einer quadratischen Gleichung der mittlere Term $b \cdot x$, so ist die resultierende Gleichung $y = a + c \cdot x^2$ durch Radizieren relativ leicht zu lösen. Beispielsweise erhalten Sie für die Gleichung $-9 + x^2$ über die zugehörige Formulierung $0 = -9 + x^2 \Leftrightarrow 9 = x^2$ durch Wurzelziehen unmittelbar als Lösungen +3 und –3.

Kubische Gleichungen

Eine **kubische Gleichung** hat die Form:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 \,.$$

Zu ihrer Lösung beziehungsweise zur Lösung eines aus zwei kubischen Gleichungen bestehenden Gleichungssystems ist auch eine kubische Gleichung gleich 0 zu setzen:

$$0 = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 \,.$$

Um auf dieser Basis die x-Lösung herzuleiten, findet in der Praxis vielfach das Verfahren der **Regula Falsi** Anwendung. Es ist allerdings – wie im Folgenden auch gezeigt wird – ein recht unvollkommener Lösungsansatz. Alternativ könnte man auf das *Newton-Verfahren* an dieser Stelle Bezug nehmen. Da dieser letztgenannte, auch als Tangentennäherungsverfahren bezeichnete Ansatz ein Verständnis von Funktionen beziehungsweise von der Differentialrechnung voraussetzt und diese beiden mathematischen Bereiche Ihnen erst später (in den Kapiteln 2 und 3) präsentiert werden, wird das Newton-Verfahren erst später in Kapitel 3 (kurz) besprochen.
Nachdem eine kubische Gleichung in die Form mit y = 0 gebracht worden ist, wird im Rahmen der Regula Falsi anschließend für x versuchsweise ein Wert vorgegeben, und es wird geprüft, ob dieser ein y-Gesamtergebnis nahe 0 hervorbringt. Ist dieses nicht der Fall, wird durch darauffolgende Veränderung von x solange nach einer x-Lösung gesucht, bis die betreffende Gleichung sich dem Wert 0 annähert. Ist der Unterschied zu 0 sehr klein, wird der betreffende Wert für x ausgewählt.
Der Wert für y ergibt sich dann durch Einsetzen des Wertes für x in die betreffende kubische Gleichung. Sinnvollerweise wählt man bei diesem schrittweisen – mit einem Fachbegriff: **iterativen** – Vorgehen nacheinander möglichst solche x-Werte aus, von denen der eine ein positives und der andere ein negatives y-Gesamtergebnis erzielt. Der einfache Grund dafür ist, dass der Zielwert 0 natürlich zwischen positiven und negativen Werten liegt. Man verringert schrittweise den Wert zwischen diesen x-Werten, bis man einen solchen Wert erhält, der ein Gesamtergebnis von nahe 0 erbringt.

BEISPIEL

Die Regula Falsi wird beispielhaft anhand folgender kubischer Normalform illustriert:

$$0 = -206,25 + 40 \cdot x + 20 \cdot x^2 + 30 \cdot x^3 \,.$$

Setzt man zunächst willkürlich den Wert 2 in die Normalform ein, ergibt sich für die Summe der rechten Seite als Ergebnis 193,75. Folglich ist der gesuchte x-Wert zu groß. Setzen Sie daher als nächsten x-Wert 1 ein, erhalten Sie -116,25 als Ergebnis. Dieses ist negativ, sodass der gesuchte x-Wert zwischen 1 und 2 liegen muss. Probieren Sie es daher einfach mit dem x-Wert in der Mitte zwischen 1 und 2, also mit 1,5, haben Sie Erfolg: Dies ist der gesuchte x-Lösungswert; er erfüllt die obige durch die Normalform aufgestellte Bedingung eines Gesamtergebnisses von 0, wie durch Einsetzen von x = 1,5 in die obige Gleichung deutlich wird:

$$\begin{aligned}
y = &- 206,25 + 40 \cdot 1,5 + 20 \cdot 1,5^2 + 30 \cdot 1,5^3 \\
&\Leftrightarrow y = -206,25 + 60 + 45 + 101,25 \\
&\Leftrightarrow y = -206,25 + 206,25 \\
&\Leftrightarrow y = 0.
\end{aligned}$$

Achtung

Zu betonen ist, dass es in diesem Beispiel sehr schnell ging, die Lösung für x zu finden. In der Praxis kann dies sehr viel länger dauern, zumindest dann, wenn die x-Lösung aus sehr vielen Nachkommastellen besteht und man eine hinreichende Ergebnisgenauigkeit haben möchte. Außerdem kann ein Polynom n-ten Grades bis zu n Nullstellen (für y = 0), eine kubische Gleichung also bis zu drei x-Lösungen haben. Es ist abhängig vom jeweiligen x-Startwert, welche dieser Lösungen zuerst gefunden wird (beziehungsweise im schlimmsten Fall: ob überhaupt eine Lösung gefunden wird). Im vorliegenden Beispiel gab es nur eine Lösung.

Auch im folgenden Beispiel gibt es zwar nur eine Lösung, aber es dauert länger als in dem eben behandelten Beispiel, die Lösung zu finden, da der x-Lösungswert viele Nachkommastellen enthält. Ausgangspunkt ist

$$0 = 10 - 2 \cdot x + 3x^2 + 4 \cdot x^3 \,.$$

Versuchsweise setze ich zunächst für x den Wert 0 und erhalte als y-Wert 10. Da der nächste x-Wert von +1 mit y = 15 ebenfalls ein positives Ergebnis liefert, versuche ich es mit einem negativen x-Wert, und zwar mit einem solchen in Höhe von –1. Dieser führt aber mit y = 11 immer noch zu einem positiven Ergebnis. Lassen Sie es uns also einmal mit dem x-Wert von -2 probieren, und siehe da: Sie erhalten mit y = –6 ein negatives Ergebnis. Der nächste Schritt besteht jetzt darin die Mitte zwischen –1 und –2, also –1,5 als x-Wert auszuwählen. Dies ergibt einen y-Wert von 6,25. Probieren Sie es im Folgenden mit der Mitte zwischen –1,5 und –2, das heißt mit –1,75, so erhalten Sie für y als Wert 1,25. Daher verwenden Sie im nächsten Schritt wieder einen kleineren x-Wert, konkret –1,8, was zu einem y-Wert von nahe 0 führt (-0,008). Die x-Lösung beträgt demnach ungefähr –1,8. Um zu einem genauen Ergebnis zu gelangen, müsste man den genauen Lösungswert zwischen –1,800 und –1,799 ermitteln, was mit einem sehr großen Rechenaufwand verbunden ist.

Noch schwieriger wird es, die Nullstellen eines kubischen Gleichungssystems zu bestimmen, wenn mehr als eine Lösung vorliegt beziehungsweise auch ökonomisch interessant ist. In diesem Fall wird deutlich, dass man zur Lösung eines kubischen Gleichungssystems schon recht genaue Vorstellungen von der Lage der Lösungen haben muss.

Bei zum Beispiel einer kubischen Gleichung $0 = 3 + 0{,}5 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x^3$ gibt es mit –1, 2 und 3 drei x-Lösungen. Sie können sich sicher vorstellen, dass es einen sehr großen Rechenaufwand verursacht, diese drei Lösungen mittels Regula Falsi zu finden. Wenn Sie viel Zeit haben, können Sie dies ja mal versuchen... ;-)

Folgen und Reihen

Unter einer **Folge** versteht man die Anordnung von Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge: a, b, c, d. Dabei kann diese Anordnung einer bestimmten Vorschrift folgen. Hat eine Folge ein Ende – wie bei der vorstehenden Folge mit d –, so handelt es sich um eine *endliche Folge*, andernfalls um eine *unendliche*.

Werden die Werte einer Folge stets größer, ist es eine *streng monoton steigende Folge*, wenn also a < b < c < d ist. Gilt anstelle des Kleiner-Zeichens das Kleiner-gleich-Zeichen, so liegt „lediglich“ eine monoton steigende Folge vor. Wenn a > b > c > d ist, ist die Folge *streng monoton fallend*. Ersetzt man hier das Größer- durch das Größer-gleich-Zeichen, sprechen Sie von einer monoton fallenden Folge.

Arithmetische Folgen und Reihen

Die beispielhafte Folge 2, 4, 6, 8, 10, ... unterliegt der Vorschrift, dass zu dem vorhergehenden **Glied** der Folge jeweils +2 addiert wird. Der Wert des Glieds einer Folge erhöht sich hier additiv gegenüber dem „Vorgänger-Glied" um den Wert 2.

Arithmetische Folge

Man spricht in diesem Fall von einer **arithmetischen Folge**. Bezeichnet man das n-te Glied einer Folge als a_n, so gilt in diesem Beispiel: $a_n = 2 + 2 \cdot (n - 1)$, was – nach Ausklammern – gleichbedeutend mit $a_n = 2 \cdot n$ ist. Für das erste Glied der Folge resultiert also: $2 \cdot 1 = 2$, für das zweite Glied: $2 \cdot 2 = 4$, für das dritte Glied: $2 \cdot 3 = 6$ und so weiter. Allgemein gilt bei einer arithmetischen Folge mit einem beliebigen Wert τ:

$$a_n = a_1 + \tau \cdot (n - 1)\,.$$

Liegt bei einer Folge eine wertebezogene Begrenzung (nach oben beziehungsweise nach unten) vor, so gilt sie als *beschränkt*. In unserem Beispiel ist die Folge nach unten zwar beschränkt (auf den Wert 2), nach oben aber nicht.

Arithmetische Reihe

Summiert man die einzelnen Folgenglieder schrittweise miteinander, erhält man eine **arithmetische Reihe**. Im vorliegenden Beispiel resultiert aus der Folge 2, 4, 6, 8, 10, ... die Reihe 2, 6 (= 2 + 4), 12 (= 6 + 6), 20 (= 12 + 8), 30 (= 20 + 10), ...

Allgemein gilt für die Glieder einer arithmetischen Reihe s_n:

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n).$$

In unserem obigen Beispiel erhalten Sie entsprechend für das zweite Reihenglied:

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 + 4) = 6$$

und für das vierte Reihenglied:

$$s_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (2 + 8) = 20.$$

Gauß'sche Summenformel

Eine bekannte arithmetische Reihe ist die **Gauß'sche Summenformel**. Sie bezieht sich auf die arithmetische Folge der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, also 1, 2, 3, 4, ..., n. Summiert man diese Folgenglieder schrittweise, erhält man als Reihenwerte 1, 3, 6, 10, ... Das **Bildungsgesetz** dieser Reihe wird durch folgende konkrete Formel beschrieben:

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Diese Formel lässt sich dadurch herleiten, dass man zunächst die Zahlenfolge zweimal hinschreibt, einmal aufsteigend (1, 2, ..., n-1, n) und einmal absteigend (n, n-1, ..., 2, 1). Dann addiert man die beiden ersten Werte jeder dieser Folgen, anschließend die beiden jeweiligen zweiten Werte und so weiter. Bei n Zahlen erhält man folglich 1 + n, 2 + (n – 1), 3 + (n – 2), ..., (n – 2) + 3, (n – 1) + 2, n + 1. Anders formuliert: Sie erhalten n-mal das Ergebnis (n + 1). Da Sie sich aber nicht für die Summe der Zahlen beider Folgen, sondern nur für die Summe einer der beiden Zahlenfolgen interessieren, müssen Sie die Fallzahl noch halbieren. Die entsprechende Multiplikation von $\frac{n}{2}$ mit (n + 1) ist dann genau die obige Gauß'sche Summenformel.
Ist beispielsweise n = 5 lautet die Folge: 1, 2, 3, 4, 5, und der Reihenwert an der fünften Stelle beläuft sich gemäß der obigen Formel auf:

$$s_5 = \frac{5^2 + 5}{2} = 15.$$

Dass dies stimmt, können Sie leicht dadurch überprüfen, dass Sie die Folgenglieder 1, 2, 3, 4 und 5 addieren: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Geometrische Folgen und Reihen

Verändert man die Folgenglieder nicht additiv, sondern multiplikativ, spricht man von einer geometrischen Folge. Die Addition der entsprechenden Folgenglieder führt zum Begriff der geometrischen Reihe.

Geometrische Folge

Bei einer **geometrischen Folge** verändert sich – wie bereits angedeutet – ein Glied der Folge im Vergleich zum vorhergehenden Glied um einen bestimmten Faktor. Zum Beispiel beträgt bei der Folge 3, 6, 12, 24, 48, ... der entspre-

chende Faktor +2. Diese Folge ist im Übrigen nach unten auf den Wert 3 beschränkt; nach oben hingegen ist sie nicht beschränkt.
Bei einer geometrischen Folge können die Vorzeichen der Folgenglieder sich verändern; man spricht dann von einer *alternierenden Folge*. Eine solche ergibt sich immer dann, wenn der Faktor, der der Folge zugrunde liegt, negativ ist. Wäre er im vorstehenden Beispiel anstelle von +2 etwa –2 gewesen, hätte die Folge gelautet: 3, –6, 12, –24, 48, ...
Allgemein gilt bei einer geometrischen Folge mit einem beliebigen Wert τ:

$$a_n = a_1 \cdot \tau^{n-1} .$$

Das zweite obige Folgenglied –6 ergibt sich nach dieser Formel (mit $\tau = -2$) als:

$$a_2 = 3 \cdot (-2)^1 = -6 ,$$

und das fünfte obige Folgenglied 48 bestimmt sich so:

$$a_5 = 3 \cdot (-2)^4 = 3 \cdot 16 = 48 .$$

Geometrische Reihe

Auch eine **geometrische Reihe** bildet sich aus der Summe der ersten n Folgenglieder. In unserem Beispiel mit dem Faktor +2 erhält man als geometrische Reihe: 3, 9 (= 3 + 6), 21 (= 9 + 12), 45 (= 21 + 24), 93 (= 45 + 48), ... Bei alternativer Verwendung des Faktors –2 lautet diese geometrische Reihe: 3, –3 [= 3 + (–6)], 9 (= –3 + 12), –15 [= 9 + (–24)], 33 (= –15 + 48), ...
Allgemein kann man schreiben (hier symbolisiert τ – wie schon zuvor – den Faktor der geometrischen Folge):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{\tau^n - 1}{\tau - 1} .$$

Zum Beispiel erhalten Sie im letztgenannten Beispiel den dritten Reihenwert 9 als:

$$s_3 = 3 \cdot \frac{(-2)^3 - 1}{(-2) - 1} = 3 \cdot \frac{-8 - 1}{-3} = 3 \cdot \frac{-9}{-3} = 9$$

und den vierten Reihenwert –15 als:

$$s_4 = 3 \cdot \frac{(-2)^4 - 1}{(-2) - 1} = 3 \cdot \frac{16 - 1}{-3} = 3 \cdot \frac{15}{-3} = -15 .$$

Wir werden in Teil III noch einmal auf das Rechnen mit geometrischen Reihen zurückkommen, wenn wir auf die Zinseszinsrechnung beziehungsweise auf die Berechnung von Renten eingehen.

Summen- und Produktzeichen

Die obigen Reihenwerte können auch durch das **Summenzeichen** $\sum_{i=k}^{n} R_i$ dargestellt werden. Dies bedeutet, dass ein bestimmter mathematischer Ausdruck R_i (n-k)-mal addiert wird. Betrachtet man die gesamte Reihe vom ersten bis zum letzten Reihenglied, so würde man k = 1 setzen, den Ausdruck R_i n-mal addieren und eben mittels Summenzeichen schreiben: $\sum_{i=1}^{n} R_i$.

Die obige Gauß'sche Summenformel kann beispielsweise mit Hilfe des Summenzeichens wie folgt geschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2} \ .$$

Es gelten folgende, leicht nachvollziehbare grundlegende Summenregeln:

$$\sum_{i=1}^{n} a = (n - 1 + 1) \cdot a = n \cdot a \quad \left(\text{speziell}: \quad \sum_{i=1}^{n} 1 = n\right);$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot b_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=m+1}^{n} b_i \ ;$$

$$\sum_{i=k}^{n} b_i = \sum_{i=k+1}^{n+1} b_{i-1} = \sum_{i=k-1}^{n-1} b_{i+1} .$$

Analog zum Summen- kann auch ein **Produktzeichen** $\prod_{i=1}^{n} R_i$ verwendet werden, und zwar wenn Terme multipliziert werden. Hier gelten folgende grundlegenden Regeln:

$$\prod_{i=1}^{n} a = a^{n-1+1} = a^n \quad \left(\text{speziell}: \quad \prod_{i=1}^{n} 1 = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n} 0 = 0\right);$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i ;$$

$$\prod_{i=1}^{n} a \cdot b_i = a^{n-1+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i = a^n \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i .$$

Grenzwerte von Folgen

Manche Folgen nähern sich mit zunehmendem Verlauf einem bestimmten Wert an. Diesen Wert nennt man **Grenzwert** und kürzt ihn durch das Symbol „lim“ ab (vom lateinischen Wort „limes“ für „Grenze“ abgeleitet). Bei den bisher behandelten Folgen wurden die Werte der Folgenglieder – absolut (das heißt: als Beträge betrachtet) – immer größer, sodass sie nicht gegen einen solchen Grenzwert *konvergierten* („konvergieren“ heißt „sich einem Grenzwert anzunähern, ohne diesen zu erreichen“). Die oben stehenden Folgen nennt man entsprechend *divergent.*

Liegt hingegen bei einer Folge beispielsweise die Vorschrift vor, dass sich der Wert eines Folgenglieds einfach als Kehrwert der Folgenziffer ergibt, lauten ausgehend vom Wert 1 die weiteren Folgenglieder $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Wie ersichtlich, werden die Folgenglieder immer kleiner, bleiben aber dennoch positiv. Für das 100.000-te Folgenglied würde gelten: $\frac{1}{100.000} = 0{,}00001$ und für das 1.000.000.000-te Glied: $\frac{1}{1.000.000.000} = 0{,}000000001$. Sie sehen, dass sich diese Folge immer mehr dem Wert 0 annähert (ohne diesen aber exakt zu erreichen). Der Grenzwert der Folge ist demnach 0, und die Folge ist *konvergent.* Da diese Folge unendlich viele Zahlen enthält, interessiert hier der Grenzwert an der Stelle, an der n gegen unendlich strebt, was durch $n \to \infty$ symbolisiert wird:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ein anderes Beispiel für eine konvergente Folge ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, bei der sich als Grenzwert die *Euler'sche Zahl* e ergibt (e = 2,71828...), was hier ohne Beweisführung angegeben wird:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ .$$

Es gibt verschiedene **Grenzwertsätze**, die den elementaren Rechenregeln des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens gleichkommen („≠“ meint im Übrigen „ungleich“):

$$\lim_{n\to\propto}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\propto} a_n + \lim_{n\to\propto} b_n\ ;$$

$$\lim_{n\to\propto}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\propto} a_n - \lim_{n\to\propto} b_n\ ;$$

$$\lim_{n\to\propto}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\propto} a_n \cdot \lim_{n\to\propto} b_n\ ;$$

$$\lim_{n\to\propto}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\propto} a_n}{\lim_{n\to\propto} b_n} \qquad \text{für} \quad b \neq 0.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1

Rechnen Sie die Hexadezimalzahl FEA19B,A in eine Binärzahl um. (Hinweis: Am besten nutzen Sie die zugehörige Dezimalzahl als rechnerischen Zwischenschritt.)

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie für $(a + b)^4$ die binomische Formel.

Aufgabe 1.3

Welche der folgenden Produktionsgleichungen ist in welcher Weise homogen, beziehungsweise welche ist gegebenenfalls inhomogen:

(a) $y = 3 \cdot x^2\ ;$

(b) $y = \dfrac{10 \cdot x^3 \cdot x^2}{3 \cdot x^4}\ ;$

(c) $y = \dfrac{10 \cdot x^3 \cdot x^2}{3 \cdot x^3 + 3 \cdot x}$

[y = Output, x = Input]?

Aufgabe 1.4

Zwei in Akkordarbeit tätige Mitarbeiter A und B eines Produktionsunternehmens erzielen pro Zeiteinheit eine bestimmte Anzahl an betriebsinternen Leistungspunkten y. Der x-Wert gibt entsprechend die jeweilige Zeiteinheit – zum Beispiel die Arbeitsstunden – an.

Für A gilt die Gleichung: $y = -4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 240$

und für B: $y = -6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 248$.

Bei welchen x-Werten stimmen die y-Werte von A und B überein? Lösen Sie mit der PQ-Formel. Welche Lösung ist ökonomisch sinnvoll?

Aufgabe 1.5

a) Bestimmen Sie für die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mit Hilfe der Gauß'schen Summenformel den Reihenwert an der zehnten Stelle.
b) Wie würde die Formel für die Summe aus allen geraden Zahlen der vorstehenden Folge aussehen? Geben Sie auf der Grundlage dieser Formel den Summenwert an.
c) Welche Formel erhalten Sie für die Summe aus allen ungeraden Zahlen der unter 1.5a) angegebenen Folge? Berechnen Sie auf der Basis dieser Formel den betreffenden Summenwert.

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie auf der Grundlage der Summen- beziehungsweise Produktregeln für $\sum_{i=1}^{10} 5 \cdot i + 10$ und für $\prod_{i=1}^{5} 3$ die Summe und das Produkt.

Aufgabe 1.7

Wie lautet der Grenzwert der Folge $2 - \frac{1}{n}$?

AUF EINEN BLICK

- Die Menge einer bestimmten Ziffernanzahl ergibt ein Zahlensystem, zum Beispiel bei zwei Ziffern das Binär-, bei 10 Ziffern das Dezimal- und bei 16 Ziffern das Hexadezimalsystem.
- Die natürlichen Zahlen sind nichtnegative ganze Zahlen. Zusammen mit den negativen Zahlen bilden sie den Zahlenbereich der ganzen Zahlen, die eine Unterform der rationalen Zahlen sind. Nimmt man zu

den rationalen Zahlen noch die irrationalen Zahlen hinzu, erhält man den Zahlenraum der reellen Zahlen. Diese werden von den komplexen Zahlen umfasst.

- Die Potenz einer Zahl – der Basis – gibt die Anzahl der Multiplikationen einer Zahl mit sich selbst an, während die Wurzel die Basis aus einem Potenzausdruck herleitet. Die Wurzelrechenregeln stammen aus den Potenzrechenregeln. Mit dem Logarithmus kann man bei gegebener Basis und bei gegebenem Gesamtwert den Exponenten einer Potenz bestimmen.
- Es gibt drei grundlegende binomische Formeln. Sie können auf allgemeine binomische Formeln zurückgeführt werden.
- Gleichungen können als Polynom n-ten Grades dargestellt werden. Ein Polynom ersten Grades ist eine lineare Gleichung, ein Polynom zweiten Grades eine quadratische und ein Polynom dritten Grades eine kubische Gleichung. Für diese Gleichungsarten existieren nach ihrer Nullsetzung unterschiedliche Lösungsverfahren, für quadratische Gleichungen etwa die PQ-Formel und für kubische Gleichungen die Regula Falsi.
- Eine Folge stellt die Aufeinanderfolge von Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge dar und folgt vielfach einer Rechenvorschrift. Die schrittweise Addition der einzelnen Folgenglieder ergibt eine Reihe. Man unterscheidet eine arithmetische von einer geometrischen Reihe. Mitunter konvergieren Folgen gegen einen Grenzwert.