Kräfte und Drehmomente

1

In diesem Kapitel ...

- Kräfte und Drehmomente
- Kräfte zerlegen und zusammensetzen
- Kräftesysteme
- Körper freimachen

Das zentrale Thema der *Statik* ist die Frage, wie ein Körper oder ein System beschaffen sein muss, damit er/es sich nicht bewegt, auch wenn eine Vielzahl äußerer Kräfte darauf einwirkt. Im Prinzip lässt sich diese Frage relativ einfach beantworten:

- ✔ Damit sich ein Körper nicht verschiebt, muss die Summe aller auf ihn wirkenden *Kräfte* gleich null sein.
- ✔ Damit sich ein Körper nicht dreht, muss die Summe aller auf ihn wirkenden *Drehmomente* gleich null sein.

Das klingt zunächst sehr einfach, wirft aber bei einigem Nachdenken eine Reihe von Fragen auf:

- ✔ Was sind Kräfte und Drehmomente?
- ✔ Wie misst man Kräfte und Drehmomente?
- ✔ Wie rechnet man mit Kräften und Drehmomenten?
- ✔ Wie ermittelt man, welche Kräfte und Drehmomente auf einen Körper wirken?

Genau diese Fragen sind das Thema dieses Kapitels.

Die zentralen Größen der Statik: Kräfte und Drehmomente

Die Statik beschäftigt sich mit den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit sich ein Körper nicht bewegt. Daher stellt sich die Frage: Warum bewegt sich ein Körper?

- ✔ Ein Körper führt eine *Translationsbewegung* aus, wenn eine resultierende Kraft auf ihn wirkt.
- ✔ Ein Körper führt eine *Drehbewegung* aus, wenn ein resultierendes Drehmoment auf ihn wirkt.

Die entscheidenden Größen Kraft und Drehmoment werden in den beiden folgenden Abschnitten genauer vorgestellt.

Definition der Kraft

Eine der wichtigsten Größen der Physik überhaupt, also auch der Technischen Mechanik und der Statik ist die Kraft. Trotz dieser Bedeutung der Kraft ist es allerdings nicht möglich, Kräfte positiv zu definieren, etwa mit einem Satz: »Ein Kraft ist …«. Statt dessen muss man Kräfte über ihre Wirkungen definieren:

- ✔ Um den Bewegungszustand eines Körpers zu verändern, ist eine Kraft erforderlich (Kapitel 6).
- ✔ Um einen Körper zu deformieren, ist eine Kraft erforderlich (Kapitel 11).

Eine Kraft ist also eine Größe, mit der man Körper beschleunigen oder verformen kann. Im Rahmen der Statik, die sich nur mit *starren*, nicht verformbaren Körpern beschäftigt, ist nur der erste Punkt von Bedeutung. Darüber hinaus sind folgende Eigenschaften von Kräften von Bedeutung:

Die Kraft ist ein *Vektor*, also eine gerichtete Größe. Ihre Einheit ist kgm/s^2 oder *Newton* (Kapitel 6).

In der Technischen Mechanik, vor allem in der Statik gibt es zwei Möglichkeiten, eine Kraft darzustellen (das gilt für jeden Vektor):

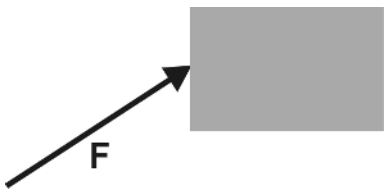

*Abbildung 1.1: Eine Kraft **F** wirkt auf einen Körper*

- ✔ *Zeichnerisch:* Die Kraft **F** wird durch einen Pfeil dargestellt (Abbildung 1.1). Seine Richtung gibt die Richtung der Kraft an, seine Länge symbolisiert die Größe der Kraft.
- ✔ *Rechnerisch:* Die Kraft wird als Vektor durch seine Komponenten dargestellt:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Wenn Sie mehr über die für die Technische Mechanik erforderliche Vektorrechnung erfahren möchten, empfehle ich Ihnen »*Technische Mechanik für Dummies*« (Wiley-VCH Verlag).

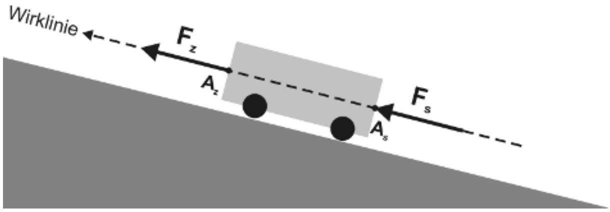

Abbildung 1.2: Kräfte können entlang ihrer Wirklinie verschoben werden

Abbildung 1.2 zeigt einen Wagen, der mit der Kraft F_s eine schiefe Ebene hinaufgeschoben wird, wobei die Kraft auf den Punkt A_s wirkt. Um die gleiche Wirkung zu erzielen, könnte man auch eine gleich große Kraft F_z am Punkt A_z wirken lassen. Das kann man folgendermaßen zusammenfassen:

Der *Längsverschiebungssatz* besagt, dass in einer Skizze oder Zeichnung Kräfte auf ihrer *Wirklinie* beliebig verschoben werden können, ohne dass sich ihre Wirkung auf einen Körper ändert. Man bezeichnet Kräfte auch als *linienflüchtige* Vektoren.

Nicht immer punktförmig: Linien- und Flächenkräfte

Bislang haben Sie Kräfte als Pfeile mit scharfen Spitzen kennengelernt, die genau auf einen Punkt wirken. Das muss nicht immer der Fall sein. Es gibt auch Kräfte, die gleichmäßig auf eine Strecke (Linie) oder sogar auf eine Fläche wirken. Zwei Beispiele aus dem winterlichen Bereich: Wenn Sie auf einem Ski stehen, wirkt Ihre Gewichtskraft gleichmäßig über die Länge des Skis; wenn ein Flachdach im Winter schneebedeckt ist, wirkt die Kraft gleichmäßig über die gesamte Fläche. Infolgedessen kann man Linienkräfte und Flächenkräfte definieren; sie spielen in der Statik eine wichtige Rolle:

✔ Eine *Linienkraft* (*Streckenlast*) ist eine Kraft, die definiert entlang einer Strecke s wirkt. Wenn sie konstant ist, gilt:

  $F_L = F/s$

  Ihre Einheit ist N/m.

✔ Eine *Flächenkraft* ist eine Kraft, die gleichmäßig auf eine Fläche A wirkt. Ihre Einheit ist N/m^2 oder *Pascal*. Flächenkräfte werden auch als *Spannungen* bezeichnet und ausführlich in Kapitel 11 diskutiert.

Es kommt nicht nur auf die Kraft, sondern auch auf den Abstand an: Drehmomente

Körper können sich nicht nur verschieben, sie können sich auch drehen. Mit anderen Worten: Sie können sowohl *Translationsbewegungen* als auch *Rotationsbewegungen* ausführen. Wie oben dargestellt wurde, ist eine Kraft erforderlich, um eine Translationsbewegung zu erzeugen. Eine Kraft allein ist aber nicht ausreichend, um einen Körper zu drehen. Betrachten Sie dazu Abbildung 1.3.

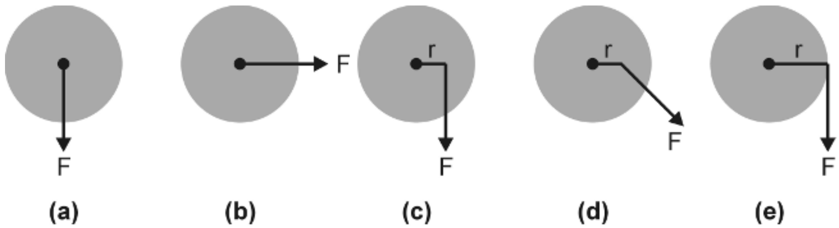

Abbildung 1.3: Zur Definition des Drehmoments

- ✔ In den Fällen (a) und (b) greift die Kraft direkt im Mittelpunkt der Scheibe an. In diesem Fall wird sich die Scheibe nicht drehen. Wenn sie fest aufgehängt ist, wird nichts passieren.
- ✔ In den Fällen (c) bis (e) wird sich die Scheibe drehen.
- ✔ Den größten Effekt erzielt man, wenn die Kraft senkrecht zum Radius so weit außen wie möglich angreift (e).

Daraus ergibt sich direkt die folgende Definition:

Um einen Körper zu drehen, ist ein *Drehmoment* erforderlich. Dieses ist definiert als Kreuzprodukt aus Abstand vom Drehpunkt und Kraft:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Die Einheit des Drehmoments ist dementsprechend Nm. Das Drehmoment ist ein Vektor, der sowohl auf der Kraft als auch auf dem Abstand senkrecht steht.

Eine der bekanntesten Anwendungen der Definition des Drehmoments ist das *Hebelgesetz*:

$$\text{Kraft} \times \text{Kraftarm} = \text{Last} \times \text{Lastarm}$$

Wie auch alle Kräfte, müssen Drehmomente in statischen Skizzen und Zeichnungen eindeutig gekennzeichnet werden.

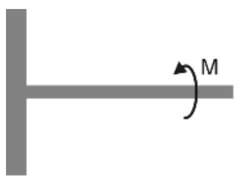

Abbildung 1.4: Die Kennzeichnung eines Drehmoments

Abbildung 1.4 zeigt eine Welle, auf die ein Drehmoment um die x-Achse wirkt. In der Skizze ist der Drehsinn eindeutig gekennzeichnet.

Arbeiten mit Kräften und Drehmomenten

Auf einen Körper kann mehr als eine Kraft wirken. Zur Ermittlung des Gesamteffekts ist es daher erforderlich, diese Kräfte zu einer einzigen Gesamtkraft zusammenzusetzen. Auf der anderen Seite ist es manchmal nützlich, Kräfte in verschiedene Komponenten zu zerlegen, etwa senkrecht und parallel zu einer Oberfläche. In beiden Fällen macht man von der Tatsache Gebrauch, dass es sich bei Kräften um Vektoren handelt.

Gemeinsam wirken: Das Zusammensetzen von Kräften

Natürlich kann auf einen Körper mehr als eine Kraft wirken. Da aber ein Körper nur in eine Richtung beschleunigt werden kann, ist es notwendig, dass man alle auf einen Körper wirkenden Kräfte zu einer einzigen Kraft zusammenfasst, der sogenannten *Resultierenden*.

Kräfte sind *Vektoren*. Daher kann man mehrere Kräfte, die auf einen Körper wirken, *vektoriell* addieren:

$$\mathbf{F}_{res} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Man kann die Addition sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch durchführen (Aufgabe 1.1).

Manchmal kommt es auf die Bestandteile an: Das Zerlegen von Kräften

Manchmal ist es auch sinnvoll, eine gegebene Kraft vektoriell in ihre Bestandteile zu zerlegen. Ein typisches Beispiel sind Gewichtskräfte von Körpern auf schiefen Ebenen. Die Gewichtskraft F_G wirkt immer nach unten. Daher ist hier eine Zerlegung in zwei Kräfte sinnvoll, wie Abbildung 1.5 zeigt. Diese beiden Kräfte sind:

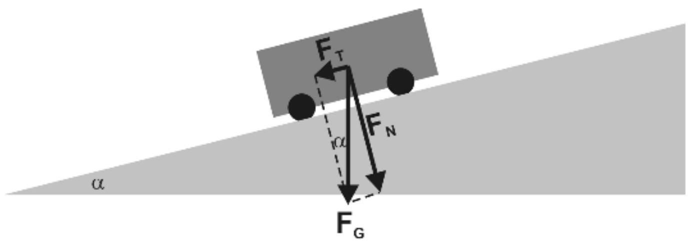

Abbildung 1.5: Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten

- ✔ Die *Normalkraft* F_N. Normalkräfte spielen in der Technischen Mechanik eine äußerst wichtige Rolle. Normalkräfte stehen stets senkrecht auf einer Oberfläche.
- ✔ Die *Tangentialkraft* F_T, die parallel zur Oberfläche verläuft. Sie bedingt in Abbildung 1.5 eine Beschleunigung des Wagens entlang der Oberfläche nach unten.

Für die beiden Kräfte F_N und F_T in Abbildung 1.5 gelten:

$$F_N = F_G \cos\alpha$$
$$F_T = F_G \sin\alpha$$

Die Umkehrung: Der Parallelogrammsatz

Man kann die obigen Überlegungen auch umkehren. Betrachten Sie dazu Abbildung 1.6. Sie zeigt zwei Kräfte F_1 und F_2 (a). Da Kräfte linienflüchtige Vektoren sind, kann man sie so verschieben, dass sie einen gemeinsamen Ausgangspunkt (den sogenannten *Zentralpunkt*) besitzen (b und c). Dabei erhält man ein *Kräfteparallelogramm*, das nicht unbedingt rechtwinklig sein muss (d).

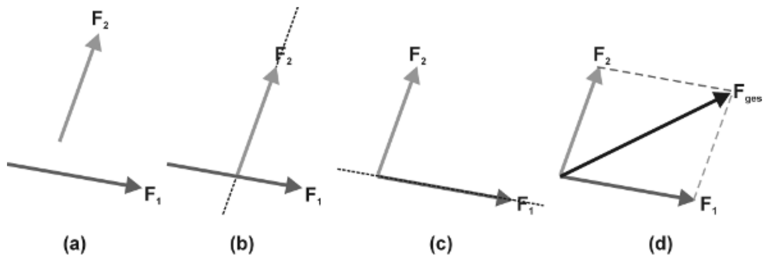

Abbildung 1.6: Zum Parallelogrammsatz

Die Diagonale des so erhaltenen Kräfteparallelogramms ist die Resultierende der beiden Kräfte. Dies wird auch als *Parallelogrammsatz* bezeichnet.

Übungen zu Kräften und Drehmomenten

Aufgabe 1.1

Auf einen Körper wirken die folgenden vier Kräfte: F_1 = (7;3) kN; F_2 = (–2;–4) kN; F_3 = (–1;7) kN; F_4 = (4;–3) kN. Bestimmen Sie die resultierende Kraft zeichnerisch und rechnerisch.

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie die in Abbildung 1.7 auf den Körper wirkende Normalkraft und die entsprechende Tangentialkraft ($\alpha = 20°$, $\beta = 35°$, F = 3 kN).

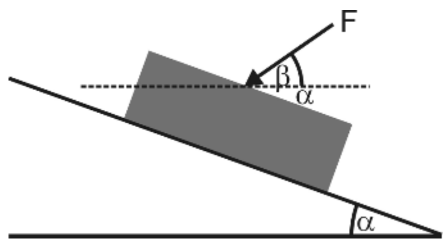

Abbildung 1.7: Körper auf schiefer Ebene

Aufgabe 1.3

Die obere Antriebswelle des in Abbildung 1.8 dargestellten Getriebes erfährt ein Drehmoment M_1 = 8 Nm. Wie groß ist das Drehmoment M_2 der unteren Welle?

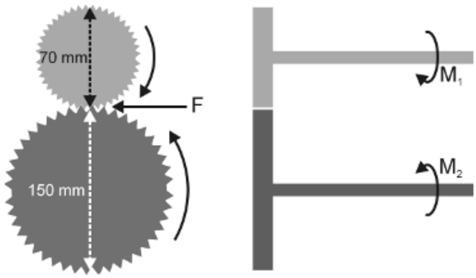

Abbildung 1.8: Getriebe

Aufgabe 1.4

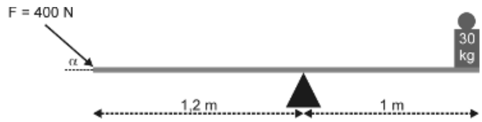

Abbildung 1.9: Wippe

Ein Kind sitzt auf einer Wippe im Abstand von 1 m vom Drehpunkt (Abbildung 1.9). Unter welchem Winkel α müssen Sie eine Kraft von 400 N auf das andere Ende der Wippe ausüben, damit diese im Gleichgewicht ist?

Aufgabe 1.5

Zerlegen Sie die Kraft F_0 = 2,2 kN so in zwei Kräfte F_1 und F_2, dass die Wirklinien von F_0 und F_1 einen Winkel von α = 90° einschließen, die von F_0 und F_2 einen Winkel von β = 60°. Berechnen Sie F_1 und F_2.

Aufgabe 1.6

Abbildung 1.10 zeigt einen Körper, auf den in der Mitte eine Kraft von 2 kN wirkt. Aus naheliegenden Gründen möchte man diese Kraft in zwei zueinander parallele Komponenten zerlegen, die an den Punkten P_1 und P_2 ebenfalls nach unten wirken. Wie groß sind diese Kräfte F_1 und F_2?

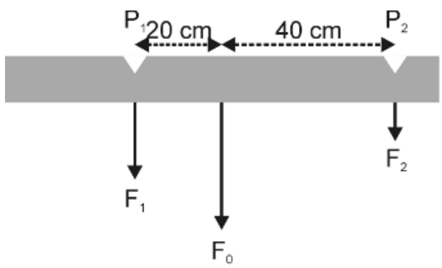

Abbildung 1.10: Lagerung eines Körpers

Eine Kraft kommt selten allein: Kräftesysteme

Wie bereits gesagt, kann auf einen Körper nicht nur eine Kraft, sondern eine Vielzahl von Kräften wirken. In diesem Fall spricht man von Kräftesystemen.

Ein *Kräftesystem* ist die Kombination aller Kräfte, die gleichzeitig an einem Körper angreifen.

Es gibt viele Kräftesysteme: Eine Übersicht

Man kann Kräftesysteme zum einen nach ihrer Dimensionalität einteilen. Es gibt also ebene (zweidimensionale) und räumliche (dreidimensionale) Kräftesysteme. Zusätzlich unterscheidet man zentrale und allgemeine Kräftesysteme. Daraus ergeben sich vier Fälle, die im Folgenden behandelt werden.

Alle auf einen Punkt: Zentrale ebene Kräftesysteme

✔ Man spricht von einem *zentralen Kräftesystem*, wenn sich die Wirklinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden (Abbildung 1.11a).

✔ Die Kräfte können zu diesem Punkt hin verschoben werden, er wird *Zentralpunkt* genannt (Abbildung 1.11b).

✔ Man kann diese Kräfte zu einer Gesamtkraft zusammenfassen:

$$\mathbf{F}_{ges} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

✔ Da diese Gesamtkraft an einem einzigen Punkt angreift, gibt es kein Drehmoment.

✔ Daher kann ein zentrales Kräftesystem einen Körper zwar verschieben, aber nicht drehen.

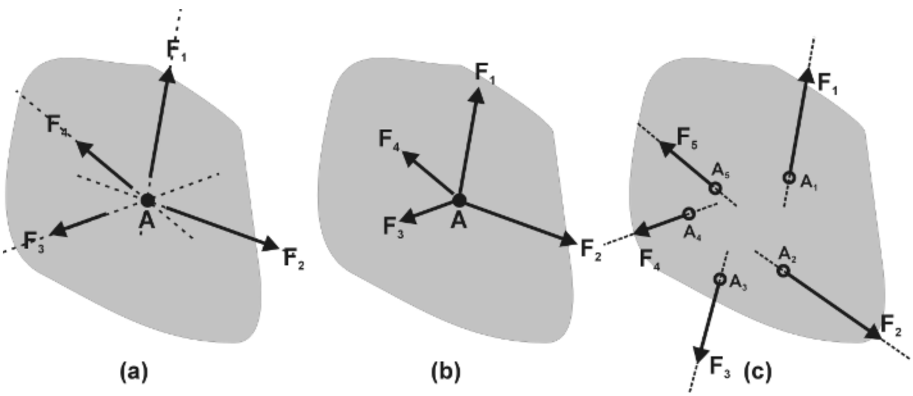

Abbildung 1.11: Ein zentrales (a, b) und ein allgemeines ebenes Kräftesystem (c)

Allgemeine ebene Kräftesysteme

- ✔ Ein *allgemeines Kräftesystem* liegt vor, wenn es keinen Zentralpunkt gibt, also keinen gemeinsamen Angriffspunkt aller Kräfte (Abbildung 1.11c).
- ✔ Infolgedessen treten auch Drehmomente auf.
- ✔ Ein allgemeines Kräftesystem kann einen Körper daher sowohl verschieben als auch drehen.
- ✔ Ein wichtiges Beispiel für ein allgemeines ebenes Kräftesystem ist das Kräftepaar.

Ein starkes Paar: Das Kräftepaar

Ein *Kräftepaar* ist ein System aus zwei parallelen, gleich großen, aber entgegensetzt gerichteten Kräften, die an verschiedenen Punkten des gleichen Körpers angreifen (Abbildung 1.12).

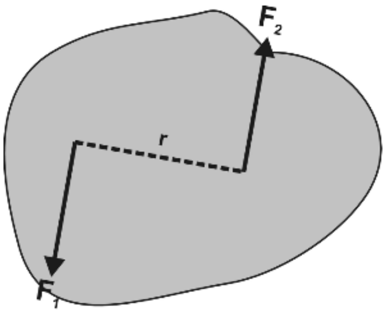

Abbildung 1.12: Ein Kräftepaar

Ein solches Kräftepaar erzeugt ein Drehmoment (mit $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

das den Körper zu drehen versucht. Stehen die Kräfte nicht senkrecht auf der Verbindungslinie, sondern schließen einen Winkel γ mit ihr ein, gilt:

$$M = rF \sin\gamma$$

Da die beiden Kräfte gleich groß und entgegengesetzt sind, kann ein Kräftepaar keine Verschiebung des Körpers verursachen, sondern aufgrund des Drehmoments nur eine Drehung.

Kräftepaare treten sehr häufig in der Technik und auch im Alltagsleben auf. Beispiele sind Wellen, Kurbeln, Handräder, Schraubenzieher und Kreuzschraubenschlüssel.

Es wird dreidimensional: Räumliche Kräftesysteme

Alles, was im vorangegangenen Abschnitt über ebene Kräftesysteme gesagt wurde, gilt auch für den dreidimensionalen Fall, also für räumliche Kräftesysteme. Allerdings können derartige Systeme wesentlich komplizierter sein, da alle drei Raumrichtungen involviert sind:

- ✔ Bei zentralen räumlichen Kräftesystemen schneiden sich alle Wirklinien in einem Punkt.
- ✔ Zentrale räumliche Kräftesysteme können nur Verschiebungen bewirken.
- ✔ Bei allgemeinen räumlichen Kräftesystemen sind die Verhältnisse häufig ziemlich kompliziert. Sie besitzen keinen Zentralpunkt.
- ✔ Allgemeine räumliche Kräftesysteme können sowohl Verschiebungen als auch Drehungen hervorrufen.

Entscheidend: Das Freimachen von Körpern

Am Beginn fast jeder Statikaufgabe steht die Frage: Welche Kräfte und Drehmomente wirken auf den betrachteten Körper oder das betrachtete System? Dabei muss man berücksichtigen, dass Körper in der Realität nicht isoliert sind, sondern mit ihrer Umgebung Kontakt haben. Der Körper übt auf den Kontaktpunkt eine Kraft aus, erfährt aber dem dritten Newton'schen Gesetz zufolge (Kapitel 7) eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft. Die Gegenkräfte (die auch *Stützkräfte* genannt werden) müssen in der Kräftebilanz berücksichtigt werden. Am Beginn einer jeden Statikaufgabe steht also die Frage: Welche Kräfte und welche Drehmomente wirken auf einen Körper? Zur Beantwortung dieser Frage muss man den Körper *freimachen*.

Wie macht man einen Körper frei?

Das Freimachen eines Körpers hat etwas von einem Strip an sich. Man betrachtet den Körper, identifiziert ihn und entfernt dann nach und nach alle Körper, die ihn berühren, wobei man sie durch entsprechende Kräfte ersetzt (beim letzten Punkt hört die Analogie zum Strip auf).

Unter dem *Freimachen eines Körpers* versteht man die Bestimmung aller auf ihn wirkenden Kräfte und Drehmomente durch sukzessive Wegnahme aller angrenzenden Körper und ihre Ersetzung durch die Kräfte, die diese Körper verursachen.

Normalerweise muss man beim Freimachen eines Körpers auch sein Eigengewicht berücksichtigen. Dabei greift die Gewichtskraft F_G stets im Schwerpunkt an. Wenn F_G allerdings klein gegenüber den äußeren Kräften ist, kann man sie vernachlässigen.

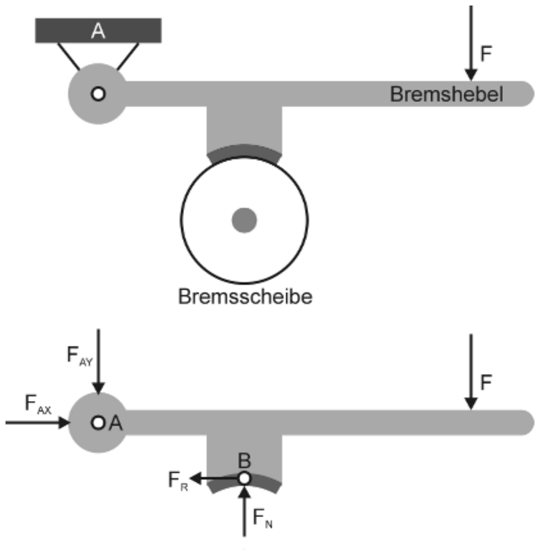

Abbildung 1.13: Der Bremshebel einer Backenbremse (oben) und der freigemachte Hebel

Betrachten Sie als Beispiel den in Abbildung 1.13 dargestellten Bremshebel einer Backenbremse. Am rechten Ende wirkt die Kraft F. Zudem hat dieser Hebel an zwei Stellen Kontakt mit der Umgebung: Im Lager A und natürlich im Punkt B mit der Bremsscheibe. Insgesamt muss man beim Freimachen des Körpers fünf Kräfte berücksichtigen:

- ✔ Die äußere Kraft F am rechten Rand.
- ✔ Das Lager A ist so ausgelegt, dass es Bewegungen sowohl in x- als auch in y-Richtung verhindert (ein *zweiwertiges* Lager, siehe Kapitel 3). Daher treten Stützkräfte F_{Ax} und F_{Ay} in beiden Richtungen auf.
- ✔ Der Bremshebel bewirkt eine Kraft F_B auf die Bremsscheibe, die ihrerseits mit einer Normalkraft F_N antwortet.
- ✔ Wenn die Scheibe belastet ist, auf sie also ein Drehmoment wirkt, tritt zusätzlich am Punkt B noch eine Reibungskraft F_R auf.

Beim Freimachen von Körpern müssen auch mögliche Reibungskräfte (Kapitel 8) berücksichtigt werden.

Fünf wichtige Regeln zum Freimachen von Körpern

Es gibt beim Freimachen von Körpern fünf wichtige Regeln, die im Folgenden aufgelistet sind:

- Seile und andere flexible Elemente können nur Zugkräfte in Seilrichtung aufnehmen oder ausüben.

- Stäbe können sowohl Zug- als auch Druckkräfte aufnehmen bzw. ausüben.
- Wenn sich zwei Körper großflächig berühren, können sowohl Normalkräfte (senkrecht zur Oberfläche) als auch Tangentialkräfte (parallel zur Oberfläche) auftreten.
- Bei Rollkörpern können sowohl Radialkräfte als auch Tangentialkräfte auftreten.
- Bei Lagern hängt die Anzahl der Kräfte von der Wertigkeit des Lagers ab (dies wird ausführlich in Kapitel 3 beschrieben).

Übungen zu Kräftesystemen und zum Freimachen von Körpern

ÜBUNG

Aufgabe 1.7

Abbildung 1.14 zeigt ein System aus vier parallelen Kräften, die auf einen Körper wirken. Um was für ein Kräftesystem handelt es sich? Wie groß ist die Gesamtkraft und (gegebenenfalls) das Drehmoment in Bezug auf Punkt A?

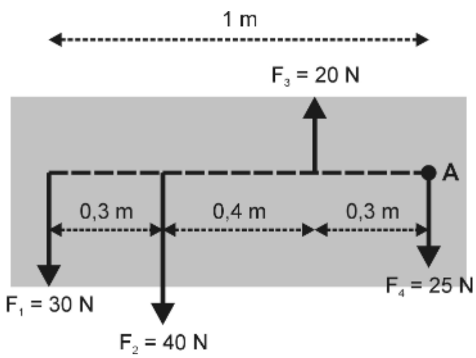

Abbildung 1.14: System aus vier Kräften

Aufgabe 1.8

Abbildung 1.15 zeigt die Tretkurbel eines Fahrrads. Sie treten das Pedal mit einer Kraft F_1 = 420 N. Wie groß ist das Drehmoment, wenn a) die Kurbel horizontal gerichtet ist, wie in der Abbildung gezeigt; b) die Kurbel einen Winkel von 45° mit der Horizontalen bildet oder c) die Kurbel senkrecht nach unten zeigt?

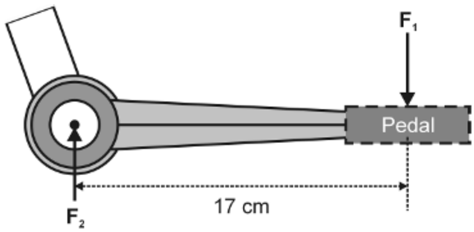

Abbildung 1.15: Tretkurbel

Aufgabe 1.9

Abbildung 1.16 zeigt einen Karren, der von vier Personen gezogen wird. Die Kräfte betragen $F_1 = 200$ N, $F_2 = 225$ N, $F_3 = 180$ N und $F_4 = 270$ N. Wie groß ist die resultierende Gesamtkraft? In welche Richtung zeigt sie?

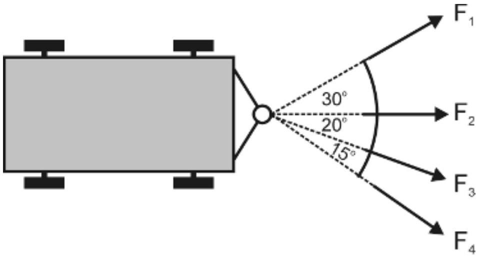

Abbildung 1.16: Ein von vier Personen gezogener Karren

Aufgabe 1.10

Abbildung 1.17 zeigt einen an beiden Seiten gestützten Träger von 8 m Länge, auf den asymmetrisch eine Kraft von 80 kN wirkt. Machen Sie den Körper frei und bestimmen Sie die Stützkräfte.

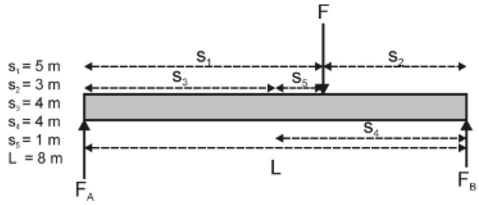

Abbildung 1.17: Ein auf zwei Seiten gestützter Träger

Aufgabe 1.11

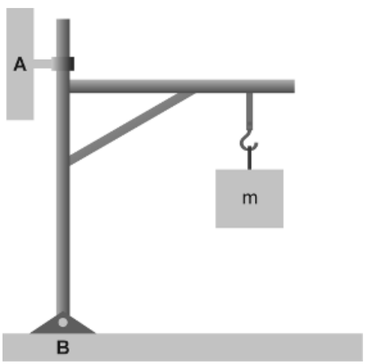

Abbildung 1.18: Kran

Machen Sie den in Abbildung 1.18 dargestellten Kran frei.

Aufgabe 1.12

Machen Sie die in Abbildung 1.17 dargestellten Körper frei.

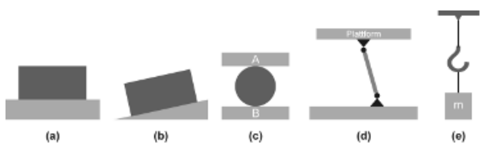

Abbildung 1.19: Eine Anzahl verschiedener Körper

Lösungen zu den Aufgaben in diesem Kapitel

Aufgabe 1.1

Zeichnerisch: Siehe Abbildung 1.20.

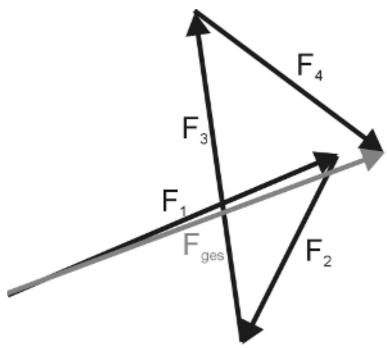

Abbildung 1.20: Zu Aufgabe 1.1

Rechnerisch:

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7-2-1+4 \\ 3-4+7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2

Zunächst muss man ermitteln, unter welchem Winkel γ die Kraft am Körper selbst angreift. Aus Abbildung 1.7 ergibt sich:

$$\gamma = \alpha + \beta = 20° + 35° = 55°$$

Daraus ergibt sich dann für die Normal- und die Tangentialkraft:

$$F_N = F \cdot \sin\gamma = 3\ \text{kN} \cdot \sin(55°) = 2{,}46\ \text{kN}$$
$$F_T = F \cdot \cos\gamma = 3\ \text{kN} \cdot \cos(55°) = 1{,}72\ \text{kN}$$

Aufgabe 1.3

Das Drehmoment M_1 erzeugt zwischen den beiden Rädern eine Kraft F. Diese beträgt:

$$M_1 = r_1 \cdot F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{M_1}{r_1} = \frac{8\ \text{Nm}}{35\ \text{mm}} = 229\ \text{N}$$

Diese Kraft bewirkt ein Drehmoment M_2 der zweiten Welle:

$$M_2 = r_2 \cdot F = 229\ \text{N} \cdot 75\ \text{mm} = 17\ \text{Nm}$$

Aufgabe 1.4

Damit die Wippe im Gleichgewicht ist, müssen die Drehmomente auf beiden Seiten gleich sein. Es muss also gelten:

$$F \sin\alpha \cdot 1{,}2\ \text{m} = F_G \cdot 1\ \text{m}$$

$$\sin\alpha = \frac{F_G \cdot 1\ \text{m}}{F \cdot 1{,}2\ \text{m}} = \frac{30\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1\ \text{m}}{400\ \text{N} \cdot 1{,}2\ \text{m}} = 0{,}61$$

$$\alpha = 37{,}8°$$

Aufgabe 1.5

Aus der Aufgabenstellung und der Skizze in Abbildung 1.21 lässt sich ablesen:

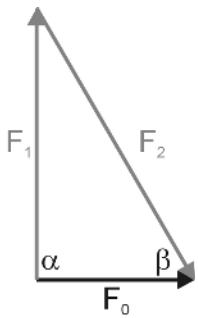

Abbildung 1.21: Zur Lösung von Aufgabe 1.5

$$\tan\beta = \frac{F_1}{F_0} \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_0 \cdot \tan\beta = 3{,}8\ \text{kN}$$

$$\cos\beta = \frac{F_0}{F_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{F_0}{\cos\beta} = 4{,}4\ \text{kN}$$

Aufgabe 1.6

Die Lösung dieser Aufgabe verlangt eine Betrachtung der Drehmomente. Der Momentensatz liefert für diesen Fall:

$$F_1 = F \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 2\ \text{kN} \cdot \frac{40\ \text{cm}}{(20+40)\ \text{cm}} = 1{,}33\ \text{kN}$$

$$F_2 = F \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2} = 2\ \text{kN} \cdot \frac{20\ \text{cm}}{(20+40)\ \text{cm}} = 0{,}67\ \text{kN}$$

Aufgabe 1.7

Da kein Zentralpunkt existiert, handelt es sich um ein allgemeines ebenes Kräftesystem. Daher kann auch ein Drehmoment auftreten. Da die Kräfte parallel zueinander sind, ergibt sich für die Gesamtkraft:

$$F = \sum_i F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = (30 + 40 - 20 + 25)\ \text{N} = 75\ \text{N}$$

Das Drehmoment in Bezug auf den Punkt A berechnet sich zu:

$$M = \sum_i x_i F_i = 30\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} + 40\,\mathrm{N} \cdot 0{,}7\,\mathrm{m} - 20\,\mathrm{N} \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} = 52\,\mathrm{Nm}$$

Aufgabe 1.8

Die Kraft F_1, die auf das Pedal ausgeübt wird, bedingt im Lager der Kurbel eine gleich große, nach oben gerichtete Kraft F_2, die mit F_1 ein Kräftepaar bildet. Daraus resultiert ein Drehmoment M, das definiert ist als

$$\mathrm{M} = \mathrm{r} \times \mathrm{F} = rF \sin\alpha$$

wobei α der Winkel zwischen der Kurbel und der nach unten wirkenden Kraft ist. Für eine Kurbellänge von 17 cm ergibt sich daher für die drei Fälle:

$$M_a = 0{,}17\,\mathrm{m} \cdot 420\,\mathrm{N} \cdot \sin(90^o) = 71{,}4\,\mathrm{Nm}$$

$$M_b = 0{,}17\,\mathrm{m} \cdot 420\,\mathrm{N} \cdot \sin(45^o) = 50{,}5\,\mathrm{Nm}$$

$$M_c = 0{,}17\,\mathrm{m} \cdot 420\,\mathrm{N} \cdot \sin(0^o) = 0$$

Aufgabe 1.9

Hier handelt es sich um ein zentrales ebenes Kräftesystem. Zur Lösung legt man am besten eine kleine Tabelle an.

	F	**α**	**F_x = F cos α**	**F_y = F sin α**
1	200 N	30°	173,2 N	100 N
2	225 N	0	225 N	0
3	180 N	340°	169,1 N	-61,6 N
4	270 N	325°	221,2 N	–154,9 N
Σ			788,5 N	–116,5 N

Daraus ergibt sich für die resultierende Gesamtkraft:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} = \sqrt{(788{,}5\,\mathrm{N})^2 + (-116{,}5\,\mathrm{N})^2} = 797\,\mathrm{N}$$

Für den resultierenden Winkel erhält man:

$$\alpha = \arctan\frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma x}} = \arctan\frac{-116{,}5\,\mathrm{N}}{788{,}5\,\mathrm{N}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 351{,}6° = -8{,}4°$$

Aufgabe 1.10

Auf das Lager A wirken zwei Drehmomente, die sich gegenseitig aufheben müssen. Das erste wird durch die Kraft F, das zweite durch die Stützkraft F_B hervorgerufen. Es gilt also:

$$M_A = -Fs_1 + F_B L = 0$$

Löst man nach F_B auf und setzt die Zahlen ein, so erhält man:

$$F_B = \frac{Fs_1}{L} = \frac{80\ \text{kN} \cdot 5\ \text{m}}{8\ \text{m}} = 50\ \text{kN}$$

Die Stützkraft F_A kann auf die gleiche Weise erhalten werden:

$$M_B = -Fs_2 + F_A L = 0$$

$$F_A = \frac{Fs_2}{L} = \frac{80\ \text{kN} \cdot 3\ \text{m}}{8\ \text{m}} = 30\ \text{kN}$$

Die Stützkräfte sind also nicht gleich. Der Grund dafür ist, dass die Kraft F nicht symmetrisch angreift.

Aufgabe 1.11

Der Kran hat an drei Stellen Kontakt mit anderen Körpern: Im Lager A mit der Wand, im Lager B mit dem Boden und schließlich noch mit der getragenen Last. Beim Freimachen des Krans müssen insgesamt vier Kräfte berücksichtigt werden (Abbildung 1.22):

- ✔ Die Stützkraft F_{Ax}, die im Loslager A (Kapitel 4) ausgeübt wird
- ✔ Die Stützkraft F_{Bx}, die im Festlager B ausgeübt wird
- ✔ Die Stützkraft F_{By}, die im Festlager B ausgeübt wird
- ✔ Die durch die Gewichtskraft der Masse bedingte nach unten wirkende Kraft F_G.

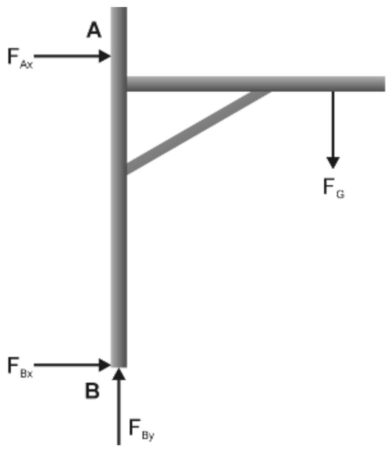

Abbildung 1.22: Zur Lösung von Aufgabe 1.11

Aufgabe 1.12

Die Lösung dieser Aufgabe ist in Abbildung 1.23 dargestellt. Im Fall (b) steht F_R für die Reibungskraft, ohne die der Körper die Ebene herunterrutschen würde.

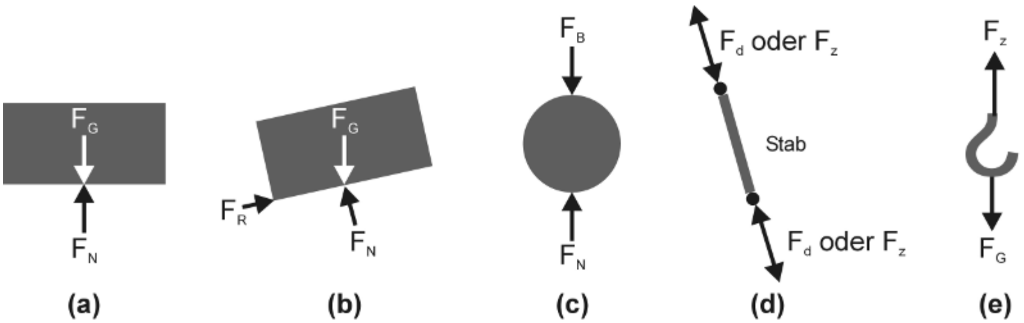

Abbildung 1.23: Die freigemachten Körper aus Abbildung 1.17

Das Freimachen von Körpern steht am Beginn fast jeder Statikaufgabe. Weitere Übungen zu diesem Thema finden Sie daher in den übrigen Kapiteln dieses Buches.