1 Geradlinige Bewegung

Beispielaufgaben

BEISPIELAUFGABE 1.1

Sie fahren in einem heruntergekommenen Kleinlastwagen mit 70 km/h 8,4 km weit eine gerade Straße entlang, bevor ihrem Fahrzeug das Benzin ausgeht und es anhält. Während der nächsten 30 min legen Sie bis zur Tankstelle auf der gleichen Straße weitere 2,0 km zu Fuß zurück.

(a) Wie groß ist Ihre Verschiebung insgesamt, gemessen vom Anfang Ihrer Fahrt bis zu Ihrer Ankunft an der Tankstelle?

LÖSUNG: Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass Sie sich in positiver Richtung auf einer x-Achse bewegen, und zwar von einem Punkt $x_1 = 0$ bis zu einem zweiten Punkt x_2 bei der Tankstelle. Dieser zweite Punkt liegt bei $x_2 = 8{,}4\,\text{km} + 2{,}0\,\text{km} = 10{,}4\,\text{km}$. Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass Ihre Verschiebung Δx entlang der x-Achse gleich der Position des zweiten Punkts minus der des ersten Punkts ist. Mit Gl. Ü1.1 erhalten wir dann

(Ü1.1) $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10{,}4\,\text{km} - 0 = 10{,}4\,\text{km}\,.$$

Ihre Gesamtverschiebung beträgt also 10,4 km in die positive Richtung der x-Achse.

(b) Wie groß ist das Zeitintervall Δt zwischen dem Anfang Ihrer Fahrt und Ihrer Ankunft an der Tankstelle?

LÖSUNG: Das Zeitintervall $\Delta t_{\text{Fuß}}$ Ihres Fußwegs kennen wir bereits. Was noch fehlt, ist das entsprechende Intervall Δt_{Fahrt} Ihrer Fahrt. Wir wissen allerdings, dass die Verschiebung Δx_{Fahrt} während der Fahrt gleich 8,4 km und die Durchschnittsgeschwindigkeit Δx_{Fahrt} gleich 70 km/h ist. Gleichung Ü1.2 liefert die **LÖSUNGSIDEE**: Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht dem Verhältnis zwischen der Verschiebung bei der Fahrt und dem entsprechenden Zeitintervall

(Ü1.2) $v_{\text{gem}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

$$v_{\text{gem,Fahrt}} = \frac{\Delta x_{\text{Fahrt}}}{\Delta t_{\text{Fahrt}}}\,.$$

Nach Umformung und Einsetzen der Zahlenwerte erhalten wir damit

$$\Delta t_{\text{Fahrt}} = \frac{\Delta x_{\text{Fahrt}}}{v_{\text{gem, Fahrt}}} = \frac{8{,}4\,\text{km}}{70\,\text{km/h}} = 0{,}12\,\text{h}$$

und somit

$$\Delta t = \Delta t_{\text{Fahrt}} + \Delta t_{\text{Fuß}} = 0{,}12\,\text{h} + 0{,}50\,\text{h} = 0{,}62\,\text{h}\,.$$

(c) Wie groß ist Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit v_{gem} zwischen dem Beginn Ihrer Fahrt und Ihrer Ankunft an der Tankstelle? Ermitteln Sie diese sowohl numerisch als auch grafisch.

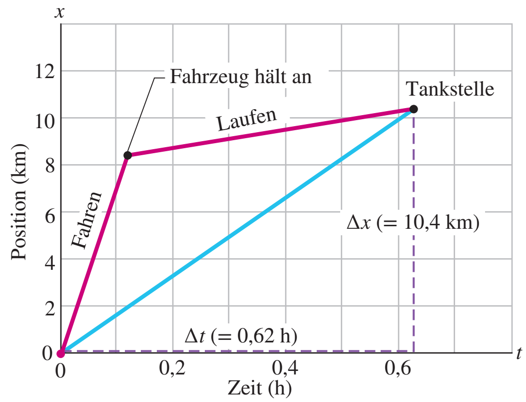


Abb. Ü1.1
Die Linien, die mit „Fahren" und „Laufen" gekennzeichnet sind, entsprechen den Ort-Zeit-Kurven während der Phasen des Fahrens und des Laufens. (Die Kurve für den Fußmarsch geht von einer konstanten Gehgeschwindigkeit aus.) Die Steigung der Geraden, die den Ursprung mit dem Punkt „Tankstelle" verbindet, gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit über die gesamte Strecke – vom Startpunkt bis zur Tankstelle – an.

LÖSUNG: Auch hier liefert Gl. Ü1.2 die **LÖSUNGSIDEE**: v_{gem} für die gesamte Wegstrecke ist gleich dem Verhältnis der Verschiebung von 10,4 km für die gesamte Wegstrecke zu dem Zeitintervall von 0,62 h für die gesamte Wegstrecke. Mit Gl. Ü1.2 erhalten wir dann

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10{,}4\,\text{km}}{0{,}62\,\text{h}} = 16{,}8\,\text{km/h} \approx 17\,\text{km/h}\,.$$

Um v_{gem} grafisch zu ermitteln, zeichnen wir zunächst die Bahnkurve $x(t)$ wie in Abb. Ü1.1 gezeigt, wobei Anfangs- und Endpunkt der Kurve durch den Ursprung und den Punkt „Tankstelle" gegeben sind. Die Lösung liefert die Tatsache, dass Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit gleich der Steigung der Geraden zwischen diesen beiden Punkten ist, also gleich dem Verhältnis von $\Delta x = 10{,}4\,\text{km}$ zu $\Delta t = 0{,}62\,\text{h}$. Damit ergibt sich $v_{\text{gem}} = 16{,}8\,\text{km/h}$.

(d) Um Ihren Kanister mit Benzin zu füllen, zu bezahlen und zu Ihrem Kleinlastwagen zurückzulaufen, brauchen Sie weitere 45 min. Wie groß ist Ihre Effektivgeschwindigkeit zwischen dem Beginn Ihrer Fahrt und Ihrer Rückkehr zu Ihrem Fahrzeug?

$$v_{\text{eff}} = \frac{\text{gesamte Entfernung}}{\Delta t} \qquad (\text{Ü}1.3)$$

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass Ihre Effektivgeschwindigkeit gleich dem Verhältnis zwischen der Entfernung, die Sie insgesamt zurückgelegt haben, und dem gesamten Zeitintervall ist, das Sie dafür benötigt haben. Die Gesamtentfernung entspricht $8{,}4\,\text{km} + 2{,}0\,\text{km} + 2{,}0\,\text{km} = 12{,}4\,\text{km}$. Das gesamte Zeitintervall ist gleich $0{,}12\,\text{h} + 0{,}50\,\text{h} + 0{,}75\,\text{h} = 1{,}37\,\text{h}$. Anhand von Gl. Ü1.3 erhalten wir damit also

$$v_{\text{eff}} = \frac{12{,}4\,\text{km}}{1{,}37\,\text{h}} = 9{,}1\,\text{km/h}\,.$$

BEISPIELAUFGABE 1.2

Abb. Ü1.2a zeigt eine $x(t)$-Kurve für einen Aufzug, der zunächst steht, sich dann aufwärts bewegt (wobei wir aufwärts als die positive x-Richtung ansehen) und dann wieder anhält. Tragen Sie v als Funktion der Zeit auf.

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** liefert die Tatsache, dass wir die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt anhand der Steigung der Kurve $x(t)$ zu diesem Zeitpunkt bestimmen können. Die Steigung von $x(t)$ – und damit die Geschwindigkeit – ist in den Intervallen von 0 bis 1 s und von 9 s an gleich null, d. h., der Aufzug bewegt sich nicht. Im Zeitintervall zwischen 3 s und 8 s ist die Steigung konstant und von null verschieden, d. h., der Aufzug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Dort können wir die Steigung von $x(t)$ folgendermaßen berechnen

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\,\text{m} - 4{,}0\,\text{m}}{8{,}0\,\text{s} - 3{,}0\,\text{s}} = +4{,}0\,\text{m/s}\,.$$

Das Pluszeichen gibt an, dass sich der Aufzug in die positive x-Richtung bewegt. Die Intervalle, in denen $v = 0$ und $v = 4\,\text{m/s}$ ist, sind in Abb. Ü1.2b dargestellt. Zusätzlich verändert sich v wie abgebildet in den Intervallen von 1–3 s und von

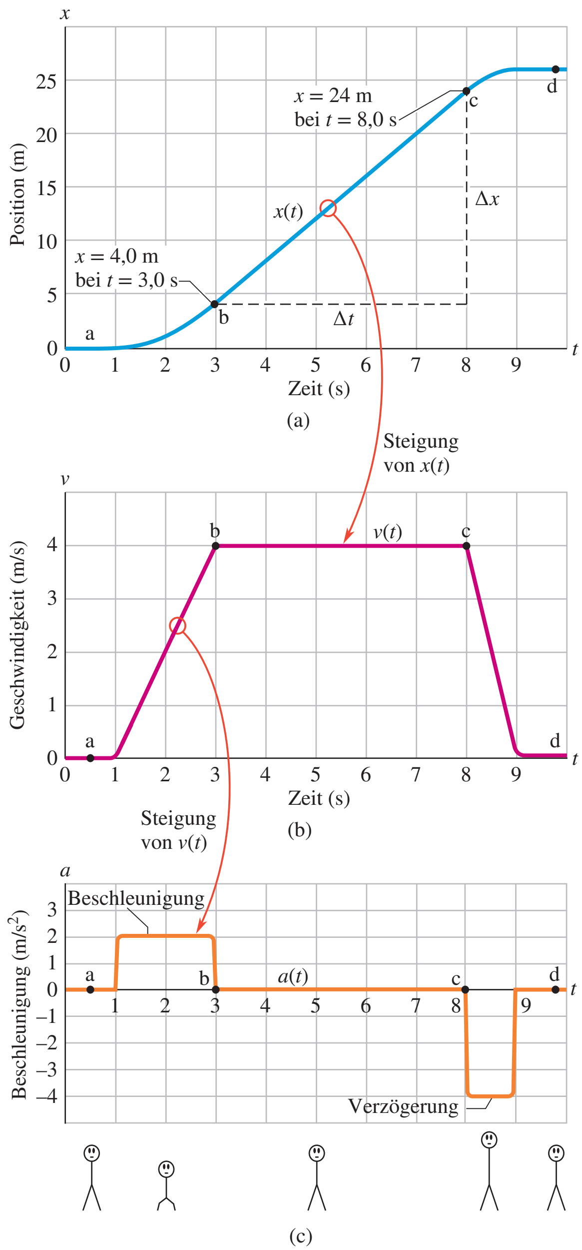


Abb. Ü1.2
(a) Die $x(t)$-Kurve eines Aufzugs, der sich entlang einer x-Achse nach oben bewegt. (b) Die $v(t)$-Kurve des Aufzugs. Beachten Sie, dass sie der Ableitung der $x(t)$-Kurve entspricht ($v = dx/dt$). (c) Die $a(t)$-Kurve des Aufzugs. Sie entspricht der Ableitung der $v(t)$-Kurve ($a = dv/dt$). Die Strichmännchen am unteren Rand der Abbildung versuchen deutlich zu machen, wie sich der Körper eines Passagiers während der verschiedenen Beschleunigungsphasen anfühlt.

8–9 s, während denen sich der Aufzug zunächst in Bewegung setzt und schließlich abbremst und anhält. Abbildung Ü1.2b ist also die gewünschte Kurve. (Abb. Ü1.2c wird in Abschn. 1.3 im Lehrbuch behandelt.)

Liegt uns eine $v(t)$-Kurve wie die aus Abb. Ü1.2b vor, so könnten wir daraus auch umgekehrt auf den Verlauf der entsprechenden $x(t)$-Kurve (Abb. Ü1.2a) schließen. Wir könnten dabei jedoch nicht die tatsächlichen Werte für x zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmen, da die Kurve $v(t)$ nur *Änderungen* in x angibt. Um solch eine Änderung in x während eines beliebigen Zeitintervalls zu ermitteln, müssen wir – in der Sprache der Differenzialrechnung – die Fläche „unterhalb der Kurve" von $v(t)$ für dieses Intervall berechnen. Für das Intervall von 3–8 s z. B., in dem der Aufzug eine Geschwindigkeit von 4,0 m/s hat, ist die Änderung in x

$$\Delta x = (4{,}0\,\mathrm{m/s})(8{,}0\,\mathrm{s} - 3{,}0\,\mathrm{s}) = +20\,\mathrm{m}\,.$$

(Diese Fläche ist positiv, da die $v(t)$-Kurve oberhalb der t-Achse verläuft.) Abbildung Ü1.2a zeigt, dass x in diesem Zeitintervall in der Tat um 20 m zunimmt. Abbildung Ü1.2b verrät uns jedoch nicht, welche *Zahlenwerte* x am Anfang und am Ende des Intervalls einnimmt. Dazu benötigen wir zusätzliche Informationen, wie z. B. den Wert von x zu einem bestimmten Zeitpunkt.

BEISPIELAUFGABE 1.3

Die Position eines Teilchens wird auf der x-Achse von Abb. 1.1 im Lehrbuch durch

$$x = 4 - 27t + t^3$$

gegeben, wobei x in Metern und t in Sekunden gemessen wird.

(a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ des Teilchens.

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ aus der Ableitung der Ortsfunktion $x(t)$ nach der Zeit erhalten. Wir finden damit also

$$v = -27 + 3t^2 \,,$$

wobei v in Metern pro Sekunde angegeben wird.

Die zweite **LÖSUNGSIDEE** ist, dass wir die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ erhalten, indem wir die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ nach der Zeit ableiten. Damit ergibt sich

$$a = +6t \,,$$

wobei a in Metern pro Sekunde zum Quadrat ausgedrückt wird.

(b) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem $v = 0$ ist?

LÖSUNG: Wir setzen $v(t) = 0$ und erhalten

$$0 = -27 + 3t^2 \,.$$

Diese Gleichung hat die folgenden zwei Lösungen

$$t = \pm 3\,\mathrm{s} \,.$$

Die Geschwindigkeit ist also drei Sekunden vor und drei Sekunden nach dem Zeitpunkt, wenn die Stoppuhr 0 anzeigt, gleich null.

(c) Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens für $t \geq 0$.

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, die Ausdrücke von $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ genauer zu untersuchen.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen bei $x(0) = +4\,\mathrm{m}$ und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v(0) = -27\,\mathrm{m/s}$, also in die negative Richtung der x-Achse. Seine Beschleunigung ist $a(0) = 0$, da sich die Geschwindigkeit des Teilchens zu diesem Zeitpunkt nicht ändert.

Für $0 < t < 3\,\mathrm{s}$ besitzt das Teilchen weiterhin eine negative Geschwindigkeit und bewegt sich deshalb weiter in die negative Richtung. Seine Beschleunigung ist jedoch nicht mehr gleich null, sondern positiv und ansteigend. Da die Vorzeichen von Geschwindigkeit und Beschleunigung entgegengesetzt sind, wird das Teilchen langsamer.

Tatsächlich wissen wir schon, dass das Teilchen bei $t = 3\,\mathrm{s}$ vorübergehend anhält. In diesem Moment befindet es sich an dem am weitesten links vom Ursprung der Achse liegenden Punkt, den es auf seinem Weg überhaupt erreichen wird. Setzen wir $t = 3\,\mathrm{s}$ in den Ausdruck von $x(t)$ ein, so finden wir, dass das Teilchen sich zu diesem Zeitpunkt am Ort $x = -50\,\mathrm{m}$ befindet. Seine Beschleunigung ist dabei immer noch positiv.

Für $t > 3\,\mathrm{s}$ bewegt sich das Teilchen auf der Achse nach rechts. Seine Beschleunigung bleibt weiterhin positiv und der Betrag der Beschleunigung wird immer größer. Die Geschwindigkeit ist nun positiv, ihr Betrag nimmt ebenfalls zu.

BEISPIELAUFGABE 1.4

Ein beliebtes Video im Web zeigt ein Wettrennen auf einer Rollbahn zwischen einem Düsenjet, einem Auto und einem Motorrad (Abb. Ü1.3). Zunächst geht das Motorrad in Führung, wird dann aber von dem Düsenjet abgelöst und schließlich auch von dem Auto überholt. Wir wollen uns hier auf das Auto und das Motorrad konzentrieren und sinnvolle Werte annehmen, um ihre Bewegung zu beschreiben. Das Motorrad geht zunächst in Führung, weil seine (konstante) Beschleunigung $a_\mathrm{M} = 8{,}40\,\mathrm{m/s^2}$ größer ist als die (konstante) Beschleunigung $a_\mathrm{A} = 5{,}60\,\mathrm{m/s^2}$ des Autos. Es verliert das Rennen jedoch trotzdem, weil seine Höchstgeschwindigkeit $v_\mathrm{M} = 58{,}8\,\mathrm{m/s}$ beträgt, die des Autos jedoch $v_\mathrm{A} = 106\,\mathrm{m/s}$. Wie lange benötigt das Auto, um das Motorrad einzuholen?

LÖSUNGSIDEE Wir können die Gleichungen für die Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung auf beide Fahrzeuge anwenden, müssen dabei aber für das Motorrad in zwei Schritten vorgehen: (1) Zuerst legt es ausgehend von einer Startgeschwindigkeit von null eine Entfernung x_M1 unter dem Einfluss einer Beschleunigung $a_\mathrm{M} = 8{,}40\,\mathrm{m/s^2}$ zurück und erreicht dabei eine Geschwindigkeit $v_\mathrm{M} = 58{,}8\,\mathrm{m/s}$. (2) Anschließend legt es mit konstanter Geschwindigkeit $v_\mathrm{M} = 58{,}8\,\mathrm{m/s}$ und ohne Beschleunigung (auch dies ist eine konstante Beschleunigung!) eine Entfernung x_M2 zurück. (Wir haben die Entfernungen hier bereits mit Variablen bezeichnet, obwohl wir ihre Werte noch nicht kennen. Diese Vorgehensweise ist oft hilfreich, um physikalische Fragestellungen zu behandeln, auch wenn die Verwendung von Variablen für unbekannte Größen manchmal etwas Mut erfordert!)

LÖSUNG Damit wir Skizzen erstellen und mit dem Rechnen beginnen können, wollen wir annehmen, dass die Fahrzeuge ihr Rennen entlang der positiven Richtung einer x-Achse austragen und dabei zur Zeit $t = 0$ bei $x = 0$ starten. (Natürlich können wir beliebige Startwerte wählen, weil wir uns nur für die verstrichene Zeit interessieren, nicht für eine definierte Uhrzeit z. B. am Nachmittag. Wir wählen die angegebenen Werte, weil sie uns das Rechnen einfacher machen.)

Das Auto soll am Ende das Motorrad überholen, aber was bedeutet das mathematisch? Es bedeutet, dass sich die beiden Fahrzeuge zu einem Zeitpunkt t an derselben Position entlang der x-Achse befinden müssen, dass also die Koordinate x_A des Autos der Koordinate $x_\mathrm{M1} + x_\mathrm{M2}$ des Motorrads entsprechen muss. Mathematisch können wir diese Bedingung wie folgt formulieren

$$x_\mathrm{A} = x_\mathrm{M1} + x_\mathrm{M2}\,. \tag{Ü1.4}$$

(Wie in vielen physikalischen Aufgabenstellungen ist diese Formulierung des ersten Schritts die größte Herausforderung. Wie kommt man von einer in Worten formulierten Aufgabe auf einen mathematischen Ausdruck? Eines der Ziele dieses Buches ist es, Ihnen diese Fähigkeit zu vermitteln, den Ansatz einer Fragestellung mathematisch auszudrücken. Wie viele Fähigkeiten erfordert auch diese viel Übung!)

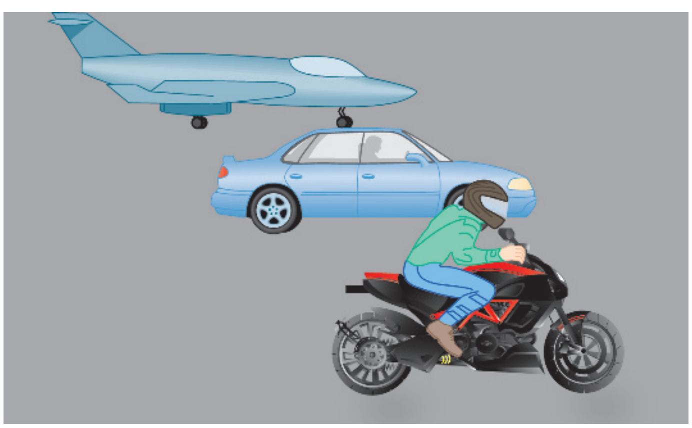


Abb. Ü1.3
Düsenjet, Motorrad und Auto kurz nach dem Start aus dem Stand.

Wir wollen nun beide Seiten von Gl. Ü1.4 ausformulieren, beginnend mit der linken. Um die Stelle x_A zu erreichen, beschleunigt das Auto aus dem Stand. Nach Gl. Ü1.5 ist dann mit $x_0 = v_0 = 0$

$x - x_0 = v_0 t + at^2/2$ (Ü1.5)

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 \,. \tag{Ü1.6}$$

Um einen Ausdruck für die Entfernung x_{M1} zu erhalten, bestimmen wir zuerst mithilfe von Gl. Ü1.7 die Zeit t_M, nach der das Motorrad seine Maximalgeschwindigkeit v_M erreicht. Wenn wir $v_0 = 0$, $v = v_M = 58{,}8\,\mathrm{m/s}$ und $a = a_M = 8{,}40\,\mathrm{m/s^2}$ einsetzen, erhalten wir hierfür

$v = v_0 + at$ (Ü1.7)

$$t_M = \frac{v_M}{a_M} = \frac{58{,}8\,\mathrm{m/s}}{8{,}40\,\mathrm{m/s^2}} = 7{,}00\,\mathrm{s} \,. \tag{Ü1.8}$$

Um die Entfernung x_{M1} zu berechnen, die das Motorrad in diesem ersten Abschnitt des Rennens zurücklegt, verwenden wir wieder Gl. Ü1.5 mit $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$, setzen jetzt aber die Zeit aus Gl. Ü1.8 ein. So erhalten wir

$$x_{M1} = \frac{1}{2} a_M t_M^2 = \frac{1}{2} a_M \left(\frac{v_M}{a_M}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_M^2}{a_M} \,. \tag{Ü1.9}$$

In der verbleibenden Zeit $t - t_M$ fährt das Motorrad unbeschleunigt mit seiner Maximalgeschwindigkeit. Die Entfernung, die es dabei zurücklegt, erhalten wir wieder aus Gl. Ü1.5, in die wir nun die Geschwindigkeit $v_0 = v_M$ (die Geschwindigkeit am Ende des ersten Rennabschnitts) und die Beschleunigung $a = 0$ einsetzen. Damit erhalten wir für die im zweiten Rennabschnitt zurückgelegte Entfernung

$$x_{M2} = v_M(t - t_M) = v_M(t - 7{,}00\,\mathrm{s}) \,. \tag{Ü1.10}$$

Um die Rechnung abzuschließen, setzen wir nun die Gln. Ü1.6, Ü1.9 und Ü1.10 in Gl. Ü1.4 ein und erhalten so

$$\frac{1}{2} a_A t^2 = \frac{1}{2}\frac{v_M^2}{a_M} + v_M(t - 7{,}00\,\mathrm{s}) \,. \tag{Ü1.11}$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die wir nach Einsetzen der Zahlenwerte mit der üblichen Formel für quadratische Gleichungen lösen. So erhalten wir $t = 4{,}44\,\mathrm{s}$ und $t = 16{,}6\,\mathrm{s}$. Aber warum erhalten wir zwei Lösungen? Überholt das Auto das Motorrad etwa zweimal? Natürlich nicht, wie wir schon im Video sehen können. Des Rätsels Lösung: Eine der Antworten ist zwar mathematisch korrekt, aber physikalisch sinnlos. Da wir bereits herausgefunden haben, dass das Auto das Motorrad erst überholt, nachdem dieses zur Zeit $t = 7{,}00\,\mathrm{s}$ seine Maximalgeschwindigkeit erreicht hat, können wir die Antwort mit $t < 7{,}00\,\mathrm{s}$ als unphysikalisch verwerfen. Der Überholvorgang findet folglich bei $t = 16{,}6\,\mathrm{s}$ statt.

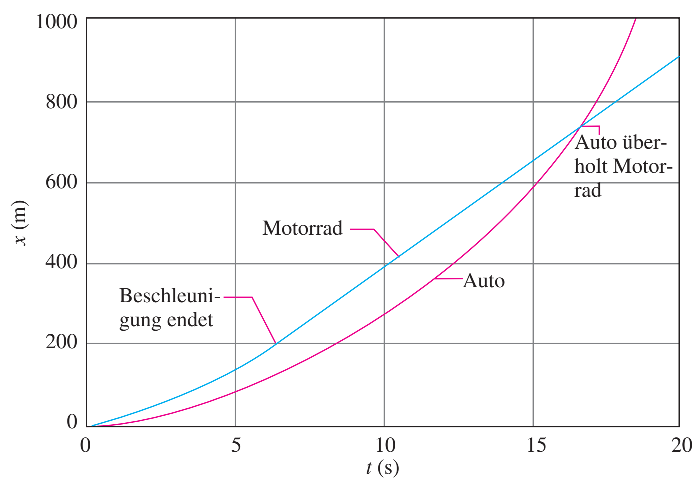


Abb. Ü1.4 Auftragung der Positionen von Auto und Motorrad gegen die Zeit.

Abbildung Ü1.4 zeigt die Auftragung der Positionen beider Fahrzeuge gegen die Zeit; der Moment des Überholens ist markiert. Man erkennt gut, dass die Kurve für das Motorrad zur Zeit $t = 7{,}00\,\mathrm{s}$ von gekrümmt (wegen der steigenden Geschwindigkeit) zu gerade wechselt (weil die Geschwindigkeit ab diesem Zeitpunkt konstant bleibt).

BEISPIELAUFGABE 1.5

In Abb. Ü1.5 wirft ein Baseballwerfer einen Ball entlang einer y-Achse mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 12 m/s nach oben.

(a) Wie lange braucht der Ball, um seine maximale Höhe zu erreichen?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass der Ball zwischen dem Loslassen und dem Auffangen nur der Erdbeschleunigung $a = -g$ ausgesetzt ist. Da diese konstant ist, gelten die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch. Ein weiterer Schlüsselgedanke ist, dass die Geschwindigkeit am höchsten Punkt der Flugbahn null sein muss. Da wir v, a und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ kennen und t suchen, lösen wir also Gl. Ü1.7, da sie all diese vier Variablen enthält. Durch Umformen ergibt sich

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12\,\mathrm{m/s}}{-9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = 1{,}2\,\mathrm{s}\,.$$

(b) Wie groß ist die maximale Höhe des Balls über seinem Ausgangspunkt?

LÖSUNG: Wir können den Ausgangspunkt des Balls gleich $y_0 = 0$ setzen. Damit schreiben wir Gl. Ü1.12 in y-Schreibweise um, setzen bei maximaler Höhe $y - y_0 = y$ und $v = 0$ und lösen nach y auf. Wir erhalten so

(Ü1.12) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (12\,\mathrm{m/s})^2}{2(-9{,}8\,\mathrm{m/s^2})} = 7{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

(c) Wie lange braucht der Ball, um einen Punkt zu erreichen, der 5,0 m über seinem Ausgangspunkt liegt?

LÖSUNG: Wir kennen v_0, $a = -g$ und die Verschiebung $y - y_0 = 5{,}0\,\mathrm{m}$; wir suchen t. Also wählen wir Gl. Ü1.5. Nachdem wir sie in y umgeschrieben und $y_0 = 0$ gesetzt haben, erhalten wir

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

oder

$$5{,}0\,\mathrm{m} = (12\,\mathrm{m/s})t - \left(\frac{1}{2}\right)(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})t^2\,.$$

Lassen wir die Einheiten vorläufig weg – nachdem wir festgestellt haben, dass sie konsistent sind, können wir dies umschreiben in

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0\,.$$

Auflösen dieser quadratischen Gleichung nach t ergibt

$$t = 0{,}53\,\mathrm{s} \quad \text{und} \quad t = 1{,}9\,\mathrm{s}\,.$$

Offensichtlich gibt es zwei derartige Zeiten! Dies ist nicht wirklich verwunderlich, da der Ball zweimal am Ort $y = 5{,}0\,\mathrm{m}$ vorbeikommt – einmal auf seinem Weg nach oben und einmal auf seinem Weg nach unten.

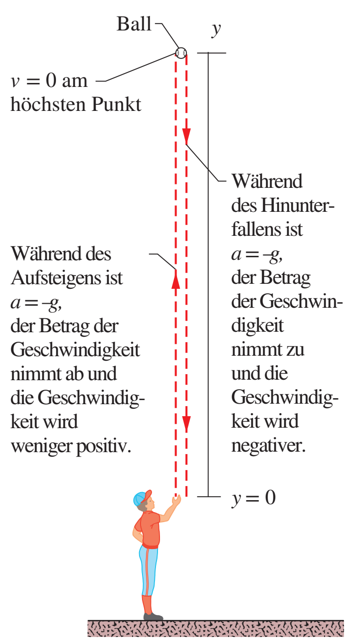


Abb. Ü1.5
Ein Baseballwerfer wirft einen Ball senkrecht nach oben. Unter der Voraussetzung, dass der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann, gelten die Gleichungen für den freien Fall sowohl für aufsteigende als auch für nach unten fallende Objekte.

BEISPIELAUFGABE 1.6

Ein Auto fährt auf einer zum Parken freigegebenen Fläche, bei der zur genauen Angabe der Parkplätze ein Koordinatensystem aufgemalt wurde. Die Koordinaten des Pkw-Mittelpunkts werden durch die Gleichungen

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \qquad \text{(Ü1.13)}$$

und

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30 \qquad \text{(Ü1.14)}$$

angegeben, wobei t in Sekunden und x und y in Metern gemessen werden.

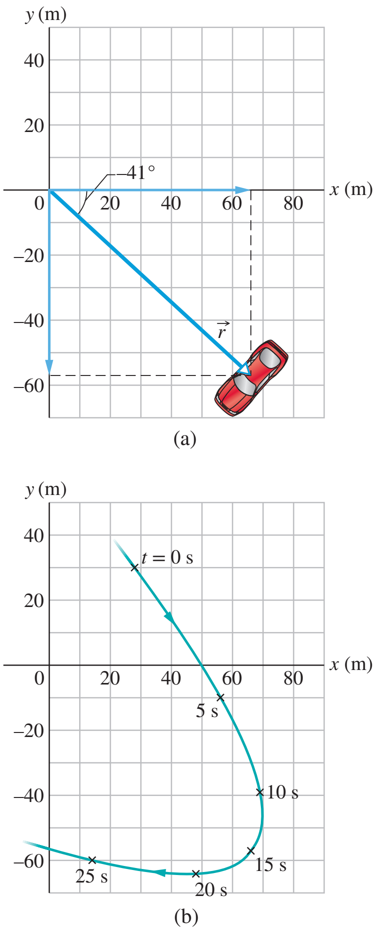


Abb. Ü1.6
(a) Der Ortsvektor $\vec{r}$ eines Autos zur Zeit $t = 15$ s. Die skalaren Komponenten von $\vec{r}$ sind entlang der jeweiligen Achsen eingezeichnet. (b) Die Bahnkurve des Autos und seine Position zu fünf verschiedenen Zeiten t.

(a) FRAGE: Wie lautet der Ortsvektor $\vec{r}$ des Autos zum Zeitpunkt $t = 15$ s in Einheitsvektoren- bzw. Betrag-Winkel-Schreibweise (vgl. Gl. D.6 in Anhang D im Lehrbuch)?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass die x- und y-Koordinaten, wie sie in den Gln. Ü1.13 und Ü1.14 angegeben sind, gleichzeitig die skalaren Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$ des Autos darstellen. Also ist

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y\,. \qquad \text{(Ü1.15)}$$

(Wir schreiben hier $\vec{r}(t)$ anstelle von $\vec{r}$, da die Komponenten Funktionen von t sind und der Vektor $\vec{r}$ damit ebenso eine Funktion von t ist.)

Zum Zeitpunkt $t = 15$ s sind die skalaren Komponenten

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66\,\text{m}$$

und

$$y = (0{,}22)(15)^2 + (9{,}1)(15) + 30 = -57\,\text{m}\,.$$

Zur Zeit $t = 15$ s ist also

$$\vec{r} = (66\,\text{m})\vec{e}_x - (57\,\text{m})\vec{e}_y\,.$$

Dieser Vektor ist in Abb. Ü1.6a dargestellt.

Um den Betrag und den Winkel von $\vec{r}$ zu ermitteln, können wir entweder einen vektorfähigen Taschenrechner benutzen oder aber Gl. Ü1.16 ausnutzen, was auf

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad \text{(Ü1.16)}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\,\text{m})^2 + (-57\,\text{m})^2} = 87\,\text{m}$$

und

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57\,\text{m}}{66\,\text{m}}\right) = -41°\,.$$

führt. (Obwohl $\theta = 139°$ denselben Tangens besitzt wie $-41°$, können wir 139° als Lösung ausschließen, wenn wir die Vorzeichen der Komponenten von $\vec{r}$ berücksichtigen.)

(b) FRAGE: Zeichnen Sie die Bahnkurve des Autos von $t = 0$ bis $t = 25$ s.

LÖSUNG: Wir können hier Teil (a) für verschiedene Werte von t wiederholen und diese Ergebnisse auftragen. Abbildung Ü1.6b zeigt entsprechende Punkte für fünf verschiedene Zeiten sowie die Kurve, die diese Punkte verbindet. Wir können auch einen grafikfähigen Taschenrechner benutzen, um eine Parameterkurve zu erstellen: Das heißt, wir lassen den Taschenrechner y in Abhängigkeit von x auftragen, wobei diese Koordinaten als Funktionen von t durch die Gln. Ü1.13 und Ü1.14 gegeben sind.

BEISPIELAUFGABE 1.7

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ für das Auto aus Beispielaufgabe 1.6 zur Zeit $t = 15\,\mathrm{s}$ sowohl in Einheitsvektoren-Schreibweise als auch mit Betrag und Winkel.

LÖSUNG: Hier gibt es zwei **LÖSUNGSIDEEN:** (1) Wir können die Geschwindigkeit des Autos ermitteln, indem wir zunächst die Komponenten der Geschwindigkeit bestimmen. (2) Diese Komponenten können wir herausfinden, indem wir die Komponenten des Pkw-Ortsvektors nach der Zeit ableiten. Wenden wir die erste Gleichung von Gl. Ü1.17 auf Gl. Ü1.13 an, so erhalten wir die x-Komponente von $\vec{v}$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{Ü1.17}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2\,. \tag{Ü1.18}$$

Zur Zeit $t = 15\,\mathrm{s}$ ergibt dies $v_x = -2{,}1\,\mathrm{m/s}$. Indem wir die zweite Gleichung von Gl. Ü1.17 auf Gl. Ü1.14 anwenden, erhalten wir analog die y-Komponente

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1\,. \tag{Ü1.19}$$

Zur Zeit $t = 15\,\mathrm{s}$ ergibt dies $v_y = -2{,}5\,\mathrm{m/s}$. In Einheitsvektoren-Schreibweise erhalten wir dann schließlich

$$\vec{v} = -(2{,}1\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (2{,}5\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y\,.$$

Diese Geschwindigkeit ist in Abb. Ü1.7 dargestellt. Sie verläuft tangential zur Bahn des Autos und zeigt daher in die Richtung, in die das Auto zum Zeitpunkt $t = 15\,\mathrm{s}$ fährt.

Um den Betrag und den Winkel von $\vec{v}$ zu bestimmen, können wir entweder einen vektorfähigen Taschenrechner benutzen oder wir berechnen beide Werte mithilfe von Gl. Ü1.16

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\,\mathrm{m/s})^2 + (-2{,}5\,\mathrm{m/s})^2} = 3{,}3\,\mathrm{m/s}$$

und

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5\,\mathrm{m/s}}{-2{,}1\,\mathrm{m/s}}\right) = \tan^{-1} 1{,}19 = -130^\circ\,.$$

(Obwohl 50° denselben Tangens besitzt wie −130°, zeigt die Betrachtung der Vorzeichen der Geschwindigkeitskomponenten, dass der gesuchte Winkel im dritten Quadranten liegt und durch 50° − 180° = −130° gegeben ist.)

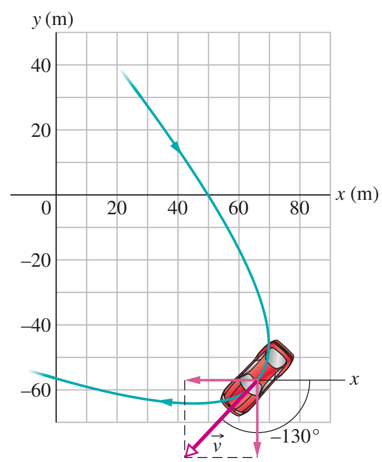


Abb. Ü1.7
Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Autos bei $t = 15\,\mathrm{s}$. Der Geschwindigkeitsvektor verläuft tangential zur Bahnkurve am momentanen Ort des Autos. Die skalaren Komponenten von $\vec{v}$ sind ebenfalls eingezeichnet.

BEISPIELAUFGABE 1.8

Bestimmen Sie die Beschleunigung $\vec{a}$ für das Auto aus den Beispielaufgaben 1.6 und 1.7 zur Zeit $t = 15\,\mathrm{s}$ in Einheitsvektoren- und Betrag-Winkel-Schreibweise (vgl. Anhang D im Lehrbuch).

LÖSUNG: Hier gibt es zwei **LÖSUNGSIDEEN:** (1) Wir können die Beschleunigung $\vec{a}$ des Autos ermitteln, indem wir zuerst die Komponenten der Beschleunigung bestimmen. (2) Diese Komponenten können wir berechnen, indem wir die Geschwindigkeitskomponenten des Autos nach der Zeit ableiten. Wenden wir die erste Gleichung von Gl. Ü1.20 auf Gl. Ü1.18 an, so erhalten wir die x-Komponente von $\vec{a}$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{Ü1.20}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62\,\mathrm{m/s}\,.$$

Analog ergibt sich die y-Komponente, indem wir die zweite Gleichung von Gl. Ü1.20 auf Gl. Ü1.19 anwenden

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44\,\mathrm{m/s}\,.$$

Wie man sieht, hängt die Beschleunigung nicht von der Zeit ab (sie ist konstant), da die Zeitvariable t in keiner der beiden Beschleunigungskomponenten vorkommt.

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \quad \text{(Ü1.21)}$$

Gleichung Ü1.21 liefert dann

$$\vec{a} = (-0{,}62\,\text{m/s}^2)\vec{e}_x + (0{,}44\,\text{m/s}^2)\vec{e}_y\,.$$

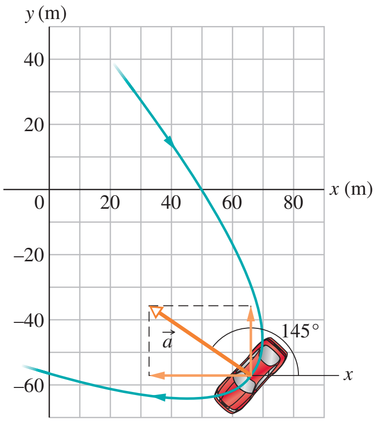


Abb. Ü1.8
Die Beschleunigung $\vec{a}$ des Pkw bei $t = 15$ s. Der Fahrer gibt gerade so viel Gas, dass sein Auto konstant beschleunigt wird.

Die Beschleunigung ist in Abb. Ü1.8 auf der Bahnkurve des Autos eingezeichnet.

Um den Betrag und den Winkel von $\vec{a}$ zu ermitteln, benutzen wir entweder einen vektorfähigen Taschenrechner oder Gl. Ü1.16. Für den Betrag ergibt sich damit

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\,\text{m/s}^2)^2 + (0{,}44\,\text{m/s}^2)^2} = 0{,}76\,\text{m/s}^2\,,$$

für den Winkel erhalten wir

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44\,\text{m/s}^2}{-0{,}62\,\text{m/s}^2}\right) = -35°\,.$$

Dieses letzte Ergebnis, das der Taschenrechner liefert, bedeutet, dass $\vec{a}$ in Abb. Ü1.8 nach rechts unten gerichtet sein muss. Wir wissen jedoch aus den oben genannten Komponenten, dass $\vec{a}$ tatsächlich nach links oben zeigen sollte. Um einen zweiten Winkel zu finden, der denselben Tangens besitzt wie $-35°$, aber von unserem Taschenrechner nicht angezeigt wird, addieren wir 180°

$$-35° + 180° = 145°\,.$$

Dieser Winkel passt nun zu den Komponenten von $\vec{a}$. Beachten Sie, dass $\vec{a}$ während der gesamten Fahrt denselben Betrag und dieselbe Richtung aufweist, da die Beschleunigung, wie wir bereits zuvor festgestellt hatten, konstant ist.

BEISPIELAUFGABE 1.9

Abbildung Ü1.9 zeigt ein Rettungsflugzeug, das mit einer Geschwindigkeit von 55,0 m/s in einer konstanten Höhe von 500 m auf einen Punkt zufliegt, der direkt oberhalb eines im Wasser schwimmenden Schiffbrüchigen liegt. Der Pilot möchte eine Rettungskapsel so abwerfen, dass sie möglichst nahe bei dem Schiffbrüchigen auftrifft.

(a) Wie groß sollte der Winkel φ der Sichtlinie zwischen dem Piloten und dem Schiffbrüchigen in dem Moment sein, in dem der Pilot die Kapsel abwirft?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir die abgeworfene Kapsel als ein Projektil betrachten. Dies bedeutet, dass ihre horizontale und ihre vertikale Bewegung unabhängig sind und getrennt untersucht werden können (die gekrümmte Bahn, die die Kapsel tatsächlich beschreibt, brauchen wir nicht zu bestimmen). Abbildung Ü1.9 beinhaltet ein Koordinatensystem, dessen Ursprung am Abwurfpunkt liegt. Anhand des Koordinatensystems können wir erkennen, dass der Winkel φ durch

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{x}{h} \quad \text{(Ü1.22)}$$

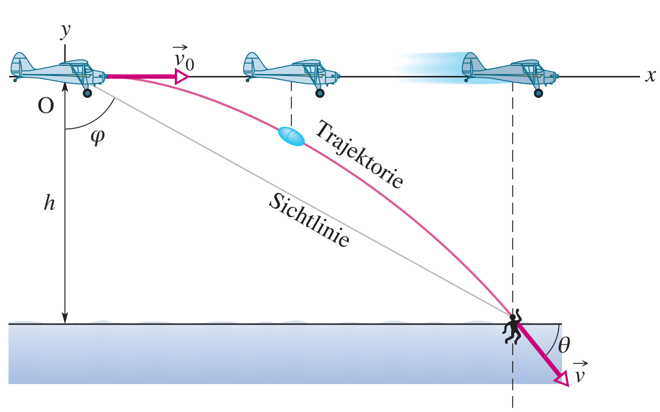


Abb. Ü1.9
Ein Flugzeug wirft eine Rettungskapsel ab; dabei fliegt es mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung. Während des Falls bleibt die horizontale Geschwindigkeitskomponente der Kapsel konstant gleich der Geschwindigkeit des Flugzeugs.

gegeben ist, wobei x die horizontale Koordinate des Schiffbrüchigen zum Zeitpunkt des Abwurfs angibt (und damit auch die Koordinate der Kapsel in dem Moment, in dem sie das Wasser berührt) und h die Flughöhe des Flugzeugs bezeichnet. Diese Höhe ist gleich 500 m; also benötigen wir nur noch x, um φ ermitteln zu können. x sollten wir anhand von Gl. Ü1.23 herausfinden können

(Ü1.23) $x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t \,. \tag{Ü1.24}$$

Wir wissen, dass $x_0 = 0$ ist, da der Ursprung des Koordinatensystems auf den Abwurfpunkt gelegt wurde. Da die Kapsel nur fallen gelassen und nicht abgeschossen wird, ist ihre Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ gleich der Geschwindigkeit des Flugzeugs. Also wissen wir ebenfalls, dass die Anfangsgeschwindigkeit einen Betrag von $v_0 = 55{,}0\,\text{m/s}$ und einen Winkel von $\theta_0 = 0°$ (relativ zur positiven Richtung der x-Achse) besitzt. Wir kennen jedoch die Zeit t nicht, welche die Kapsel vom Flugzeug bis zum Schiffbrüchigen braucht.

Um t zu bestimmen, betrachten wir zunächst die senkrechte Bewegung und dabei speziell Gl. Ü1.25

(Ü1.25)
$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \,. \tag{Ü1.26}$$

Hier ist die vertikale Verschiebung $y - y_0$ der Kapsel gleich $-500\,\text{m}$ (das negative Vorzeichen zeigt an, dass die Kapsel sich nach unten bewegt). Einsetzen der bekannten Werte in Gl. Ü1.26 ergibt dann

$$-500\,\text{m} = (55{,}0\,\text{m/s})(\sin 0°)t - \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)t^2 \,.$$

Indem wir nach t auflösen, erhalten wir $t = 10{,}1\,\text{s}$. Einsetzen in Gl. Ü1.24 liefert nun

$$x - 0 = (55{,}0\,\text{m/s})(\cos 0°)(10{,}0\,\text{s})$$

beziehungsweise

$$x = 555{,}5\,\text{m} \,.$$

Damit erhalten wir mit Gl. Ü1.22 das Ergebnis

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{555{,}5\,\text{m}}{500\,\text{m}} = 48° \,.$$

(b) Wie lautet die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Kapsel in dem Moment, in dem die Kapsel im Wasser auftrifft, in Einheitsvektoren- bzw. Betrag-Winkel-Schreibweise (vgl. Anhang D im Lehrbuch)?

LÖSUNG: Auch hier hilft uns die **LÖSUNGSIDEE**, dass die horizontale und die vertikale Bewegung der Kapsel während des Falls voneinander unabhängig sind. Insbesondere sind die horizontale und die vertikale Komponente der Geschwindigkeit der Kapsel voneinander unabhängig.

Die zweite **LÖSUNGSIDEE** ist, dass sich die waagerechte Komponente der Geschwindigkeit v_x nicht verändert, sondern konstant gleich ihrem Anfangswert $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ ist, da die Kapsel keiner horizontalen Beschleunigung unterliegt. In dem Moment, in dem die Kapsel die Wasseroberfläche erreicht, ist also

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (55{,}0\,\text{m/s})(\cos 0°) = 55{,}0\,\text{m/s} \,.$$

Eine dritte **LÖSUNGSIDEE** ist, dass sich die vertikale Komponente der Geschwindigkeit v_y verändert und nicht gleich ihrem Anfangswert $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$ bleibt, da die Kapsel einer senkrechten Beschleunigung unterliegt. Nutzen wir Gl. Ü1.27 und

(Ü1.27) $v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$

die bekannte Fallzeit $t = 10{,}1$ s der Kapsel, so erhalten wir für den Augenblick, in dem die Kapsel die Wasseroberfläche erreicht,

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt \\ &= (55{,}0\,\mathrm{m/s})(\sin 0°) - (9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(10{,}1\,\mathrm{s}) = -99{,}0\,\mathrm{m/s}\,. \end{aligned}$$

Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Kapsel das Wasser erreicht, besitzt sie also die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = (55{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (99{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y\,.$$

Mithilfe der Gl. Ü1.16 bzw. eines vektorfähigen Taschenrechners erhalten wir für den Betrag und den Winkel von $\vec{v}$

$$v = 113\,\mathrm{m/s} \quad \text{und} \quad \theta = -61°\,.$$

BEISPIELAUFGABE 1.10

Ein dramatisches (aber komplett fiktives) Webvideo zeigt einen Mann, wie er eine lange Wasserrutsche hinunterrutscht, dann in die Luft geschleudert wird und schließlich in einem Wasserbecken landet. Wir wollen einen solchen Flug auf der Grundlage sinnvoller Annahmen untersuchen, um herauszufinden, mit welcher Geschwindigkeit der Mann auf dem Wasser aufschlagen würde. Abbildung Ü1.10a zeigt die Startrampe und die Landestelle sowie ein Koordinatensystem, dessen Ursprung wir bequemerweise auf die Startrampe gelegt haben. Auf dem Video können wir die horizontale Flugstrecke zu $D = 20{,}0$ m sowie die Flugdauer zu $t = 2{,}50$ s abschätzen; der Abflugwinkel beträgt $\theta_0 = 40{,}0°$. Welchen Betrag hat die Geschwindigkeit des Manns beim Start und bei der Landung?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir die Gleichungen für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung separat auf die horizontale und die vertikale Komponente des Flugs anwenden können. Die vertikale Beschleunigung ist während des gesamten Flugs $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, während die horizontale Beschleunigung durchgehend null ist.

Wie bei den meisten Analysen von Flugbahnen ist die entscheidende Frage: Wo beginnen? Es spricht nichts dagegen, verschiedene Gleichungen auszuprobieren, um zu sehen, ob wir irgendwie auf die Geschwindigkeiten kommen. Und in diesem Fall haben wir sogar einen Hinweis: Da wir die Gleichungen separat für die vertikale und die horizontale Bewegung anwenden wollen, sollten wir versuchen, auch die horizontalen und vertikalen Komponenten der Geschwindigkeit bei Start und Landung separat zu finden. Anschließend können wir für beide Stellen die zusammengehörenden Komponenten kombinieren, um die Geschwindigkeit zu erhalten.

Da wir die horizontale Verschiebung $D = 20{,}0$ m kennen, wollen wir mit der horizontalen Bewegung beginnen. Weil $a_x = 0$ ist, wissen wir, dass die horizontale

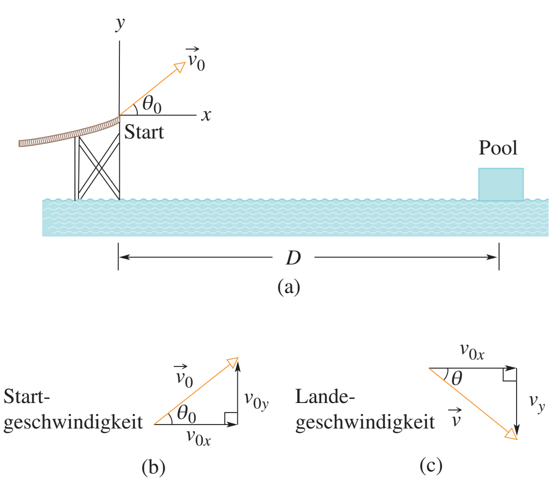


Abb. Ü1.10
(a) Die Wasserrutsche mit Rampe für den Start und der Pool für die Landung. (b) Geschwindigkeitsvektor beim Start und (c) bei der Landung.

Komponente der Geschwindigkeit während des Flugs unverändert bleibt, also immer gleich der horizontalen Komponente v_{0x} beim Start ist. Diese Komponente, die Flugdauer $t = 2{,}50\,\mathrm{s}$ und die horizontale Verschiebung $x - x_0$ können wir mithilfe von Gl. Ü1.5 miteinander verknüpfen

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \,.$$

Wenn wir hier $a_x = 0$ einsetzen, erhalten wir Gl. Ü1.23. Mit $x - x_0 = D$ bekommen wir dann

$$\begin{aligned} 20\,\mathrm{m} &= v_{0x}(2{,}50\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}(0)(2{,}50\,\mathrm{s})^2 \,, \\ v_{0x} &= 8{,}00\,\mathrm{m/s} \,. \end{aligned}$$

Dies ist die x-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit, wir benötigen aber den Betrag des vollständigen Vektors, wie Abb. Ü1.10b zeigt, in der die beiden Komponenten die Schenkel eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, dessen Hypotenuse der vollständige Vektor ist. Wir können also eine trigonometrische Beziehung nutzen, um den Betrag der vollen Geschwindigkeit beim Start herauszufinden

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0} \,,$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{v_{0x}}{\cos\theta_0} \\ &= \frac{8{,}00\,\mathrm{m/s}}{\cos 40^\circ} = 10{,}44\,\mathrm{m/s} \approx 10{,}4\,\mathrm{m/s} \,. \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Betrag der Geschwindigkeit bei der Landung herausfinden. Die horizontale Komponente kennen wir bereits, da sich ihr anfänglicher Wert von 8,00 m/s nicht verändert. Um die vertikale Komponente v_y zu bestimmen, schreiben wir Gl. Ü1.7 in der Form

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

und unter Verwendung von Abb. Ü1.10b

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 + a_y t \,.$$

Dann setzen wir $t = 2{,}50\,\mathrm{s}$ und $a_y = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ ein und bekommen

$$\begin{aligned} v_y &= (10{,}44\,\mathrm{m/s})\sin(40{,}0^\circ) - (9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(2{,}50\,\mathrm{s}) \\ &= -17{,}78\,\mathrm{m/s} \,. \end{aligned}$$

Nachdem wir nun beide Komponenten der Landegeschwindigkeit kennen, verwenden wir die Gl. Ü1.16, um ihren Betrag zu berechnen

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(8{,}00\,\mathrm{m/s})^2 + (-17{,}78\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 19{,}49\,\mathrm{m/s} \approx 19{,}5\,\mathrm{m/s} \,. \end{aligned}$$

BEISPIELAUFGABE 1.11

Die Piloten von Kampfjets müssen darauf achten, Kurven nicht zu eng zu fliegen, denn wenn ihr Körper mit dem Kopf in Richtung Kurvenmittelpunkt einer Zentripetalbeschleunigung ausgesetzt ist, nimmt der Blutdruck im Gehirn ab, was zu einer Beeinträchtigung der Gehirnfunktionen führen kann.

Verschiedene Warnsignale vermitteln dem Piloten, wann die Situation kritisch zu werden droht. Bei einer Zentripetalbeschleunigung von $2g$ oder $3g$ fühlt sich der Pilot schwer. Bei ungefähr $4g$ verliert er die Fähigkeit, Farben zu sehen, und sein Sichtfeld reduziert sich auf den sogenannten „Tunnelblick“. Wird diese Beschleunigung beibehalten oder noch verstärkt, verliert der Pilot das Sehvermögen vollständig und wird kurze Zeit später ohnmächtig.

(a) Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung (in Einheiten von g) eines Piloten, der ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_A = (400\vec{e}_x + 500\vec{e}_y)$ m/s in einen Kreisbogen fliegt und diesen 24,0 s später mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_E = (-400\vec{e}_x - 500\vec{e}_y)$ m/s wieder verlässt?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass es sich um eine gleichförmige Kreisbewegung handelt. Der Pilot spürt daher eine Zentripetalbeschleunigung mit einem Betrag $a = v^2/R$, wobei R der Radius des Kreises ist. Die Zeit für einen vollständigen Umlauf ist nach Gl. Ü1.28 $T = 2\pi R/v$. Da wir den Radius R nicht kennen, lösen wir Gl. Ü1.28 nach R auf und setzen in Gl. Ü1.29 ein. So erhalten wir

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(Ü1.28)}$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(Ü1.29)}$$

$$a = \frac{2\pi v}{T} \,.$$

Um die konstante Geschwindigkeit v zu bekommen, verwenden wir die Gl. Ü1.16

$$v = \sqrt{(400\,\text{m/s})^2 + (500\,\text{m/s})^2} = 640{,}31\,\text{m/s} \,.$$

Die Periode T erhalten wir nun, indem wir uns klarmachen, dass die Endgeschwindigkeit des Flugzeugs gerade die Umkehrung der Anfangsgeschwindigkeit ist. Mit anderen Worten, das Flugzeug verlässt den Kreis nach genau einer halben Runde und fliegt in einer der ursprünglichen Flugrichtung entgegengesetzten Richtung zurück. Dafür hat er 24,0 s benötigt, für einen vollen Umlauf bräuchte es folglich 48,0 s. Wenn wir das in unsere Gleichung für a einsetzen, erhalten wir

$$a = \frac{2\pi(640{,}31\,\text{m/s})}{48{,}0\,\text{s}} = 83{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 8{,}6g \,.$$

BEISPIELAUFGABE 1.12

Für die in Abb. 1.19 im Lehrbuch dargestellte Situation sei Barbaras Geschwindigkeit relativ zu Alex konstant $v = 52$ km/h. Das Auto P bewege sich in die negative Richtung der x-Achse.

(a) Alex misst für das Auto P eine konstante Geschwindigkeit $v_{PA} = -78$ km/h. Welche Geschwindigkeit misst Barbara?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir Alex das Bezugssystem A und Barbara ein anderes Bezugssystem B zuweisen. Da sich diese Bezugssysteme relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit entlang der gleichen Achse bewegen, können wir Gl. Ü1.30 benutzen, um v_{PB} und v_{PA} miteinander zu verknüpfen. Wir erhalten

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \quad \text{(Ü1.30)}$$

$$-78\,\text{km/h} = v_{PB} + 52\,\text{km/h} \,,$$

folglich ist

$$v_{PB} = -130\,\text{km/h} \,.$$

(b) Das Auto bremst relativ zu Alex (und damit zum Erdboden) und hält nach $t = 10$ s bei konstanter Beschleunigung an. Wie groß ist seine Beschleunigung a_{PA} relativ zu Alex?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir die Geschwindigkeiten des Autos P *relativ zu Alex* verwenden müssen, um die Beschleunigung des Autos *relativ zu Alex* herauszufinden. Da die Beschleunigung konstant ist, können wir Gl. Ü1.7

($v = v_0 + at$) benutzen, um die Beschleunigung mit der Anfangs- und Endgeschwindigkeit von P in Verbindung zu bringen. Die Anfangsgeschwindigkeit von P relativ zu Alex ist $v_{PA} = -78\,\text{km/h}$, die Endgeschwindigkeit ist null. Damit erhalten wir die Beschleunigung

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78\,\text{km/h})}{10\,\text{s}} \cdot \frac{1\,\text{m/s}}{3{,}6\,\text{km/h}} = 2{,}2\,\text{m/s}^2\,.$$

(c) Wie groß ist die Beschleunigung a_{PA} des Autos relativ zu Barbara während des Bremsvorgangs?

LÖSUNG: Hier ist die **LÖSUNGSIDEE**, dass wir die Geschwindigkeiten des Autos P *relativ zu Barbara* verwenden müssen, um die Beschleunigung des Autos *relativ zu Barbara* zu ermitteln. Wir kennen die Anfangsgeschwindigkeit von P relativ zu Barbara aus Teil (a) ($v_{PB} = -130\,\text{km/h}$). Die Endgeschwindigkeit von P relativ zu Barbara ist $-52\,\text{km/h}$ (dies entspricht der Geschwindigkeit des haltenden Fahrzeugs relativ zu der sich bewegenden Barbara). Also erhalten wir hier ebenfalls die Beschleunigung

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52\,\text{km/h} - (-130\,\text{km/h})}{10\,\text{s}} \cdot \frac{1\,\text{m/s}}{3{,}6\,\text{km/h}} = 2{,}2\,\text{m/s}^2\,.$$

Dieses Ergebnis hätten wir voraussagen können: Da sich Alex und Barbara relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen, müssen sie für das Auto beide die gleiche Beschleunigung messen.

BEISPIELAUFGABE 1.13

Das in Abb. Ü1.11a dargestellte Flugzeug bewegt sich nach Osten. Aufgrund eines gleichmäßigen Nordostwinds muss der Pilot das Flugzeug jedoch leicht nach Süden einstellen. Relativ zum Wind besitzt das Flugzeug die Fluggeschwindigkeit $\vec{v}_{PW}$ mit einem Betrag von 215 km/h und einem Winkel θ südlich der östlichen Richtung. Der Wind hat relativ zum Erdboden die Geschwindigkeit $\vec{v}_{WG}$ mit einem Betrag von 65,0 km/h und einem Winkel von 20° östlich von Norden. Wie groß sind der Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}_{PG}$ des Flugzeugs relativ zum Erdboden und der Winkel θ?

LÖSUNG: Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass die gegebene Situation derjenigen aus Abb. 1.20 im Lehrbuch entspricht. Das bewegte Teilchen P entspricht dem Flugzeug, das Bezugssystem A ist am Erdboden angebracht (es wird mit G bezeichnet), während das System B am Wind „befestigt" ist (nennen wir es W). Auch hier müssen wir ein Vektordiagramm wie das aus Abb. 1.20 im Lehrbuch zeichnen, diesmal jedoch mit drei Geschwindigkeitsvektoren.

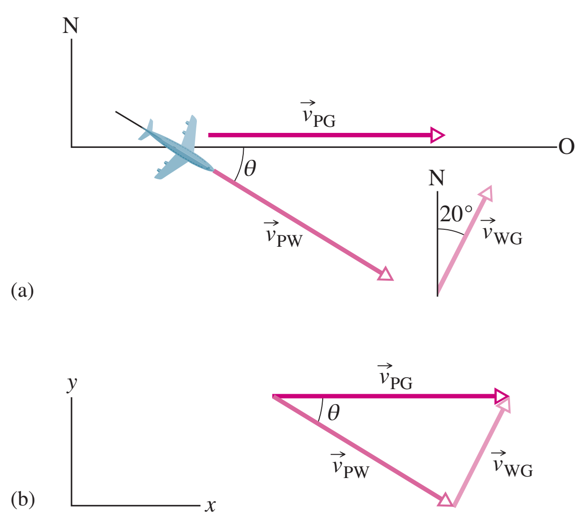


Abb. Ü1.11
Um direkt nach Osten fliegen zu können, muss der Pilot das Flugzeug leicht in den Wind drehen.

Fassen wir zunächst in Worten zusammen, wie die Vektoren miteinander verbunden sind

$$\begin{array}{lcl} \text{Geschwindigkeit des} & & \text{Geschwindigkeit des} & & \text{Geschwindigkeit} \\ \text{Flugzeugs relativ} & = & \text{Flugzeugs relativ} & + & \text{des Winds relativ} \\ \text{zum Boden (PG)} & & \text{zum Wind (PW)} & & \text{zum Boden (WG)} \end{array}$$

Diese Beziehung können wir, wie in Abb. Ü1.11 dargestellt, zeichnen und erhalten damit die Vektorgleichung

$$\vec{v}_{\mathrm{PG}} = \vec{v}_{\mathrm{PW}} + \vec{v}_{\mathrm{WG}} \,. \tag{Ü1.31}$$

Gesucht werden der Betrag des ersten und der Winkel des zweiten Vektors. Mit Unbekannten in zwei Vektoren können wir Gl. Ü1.31 nicht direkt mit einem vektorfähigen Taschenrechner lösen. Stattdessen müssen wir die Vektoren in ihre Komponenten entlang der Achsen des Koordinatensystems aus Abb. Ü1.11b zerlegen und Gl. Ü1.31 dann Achse für Achse lösen (siehe Anhang D im Lehrbuch). Für die y-Komponenten erhalten wir

$$v_{\mathrm{PG},y} = v_{\mathrm{PW},y} + v_{\mathrm{WG},y}$$

oder

$$0 = -(215\,\mathrm{km/h})\sin\theta + (65{,}0\,\mathrm{km/h})(\cos 20{,}0°) \,.$$

Auflösen nach θ ergibt

$$\theta = \sin^{-1}\frac{(65{,}0\,\mathrm{km/h})(\cos 20{,}0°)}{215\,\mathrm{km/h}} = 16{,}5° \,.$$

Analog erhalten wir für die x-Komponenten

$$v_{\mathrm{PG},x} = v_{\mathrm{PW},x} + v_{\mathrm{WG},x} \,.$$

Da $\vec{v}_{\mathrm{PG}}$ parallel zur x-Achse verläuft, ist die Komponente $v_{\mathrm{PG},x}$ gleich dem Betrag v_{PG}. Setzen wir dies und $\theta = 16{,}5°$ ein, so ergibt sich für den Betrag

$$v_{\mathrm{PG}} = (215\,\mathrm{km/h})(\cos 16{,}5°) + (65{,}0\,\mathrm{km/h})(\sin 20{,}0°) = 228\,\mathrm{km/h} \,.$$

Aufgaben

1.1 Ein Baseballwerfer wirft einen Ball mit einer horizontalen Geschwindigkeit von 160 km/h. Wie lange braucht der Ball, bis er die Home Base in 18,4 m Entfernung erreicht?

1.2 Im Jahr 1992 stellte Chris Huber auf Cheetah, einem von drei Maschinenbaustudenten gebauten Hightech-Fahrrad, einen Geschwindigkeitsweltrekord auf. Er benötigte nur unglaubliche 6,509 s für die Messstrecke mit einer Länge von 200,0 m. Nach seiner Fahrt kommentierte Huber seinen Erfolg mit den Worten: „Cogito ergo zoom!“ („Ich denke, daher bin ich schnell!“). 2001 übertraf Sam Whittingham Hubers Rekord um 19,0 km/h. Wie lange benötigte er für die 200,0 m?

1.3 Ein Auto fährt auf einer geraden Straße 40 km weit mit 30 km/h. Anschließend bewegt es sich weitere 40 km mit 60 km/h.

(a) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos auf dieser Fahrt von 80 km? (Nehmen Sie an, dass es sich in die positive x-Richtung bewegt.)

(b) Wie groß ist die Effektivgeschwindigkeit?

(c) Tragen Sie x gegen t auf und erläutern Sie, wie sich die Durchschnittsgeschwindigkeit anhand der Kurve bestimmen lässt.

1.4 Der Pilot eines Kampfjets fliegt auf einem Radarvermeidungsmanöver mit 1300 km/h in horizontaler Richtung in einer Höhe von nur 35 m über den Boden. Plötzlich steigt der Boden mit 4,3° sanft an – eine Steigung, die mit bloßem Auge nur sehr schwer zu erkennen ist (Abb. Ü1.A4). Wie viel Zeit bleibt dem Piloten, seine Flugbahn zu korrigieren, damit er nicht den Boden rammt?

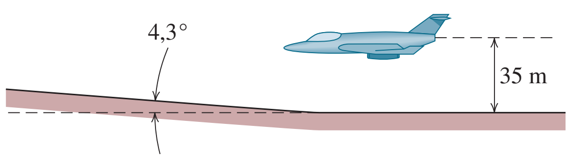


Abb. Ü1.A4

1.5 Sie fahren auf der Autobahn von San Antonio nach Houston die Hälfte der *Zeit* mit 55 km/h, die andere Hälfte mit 90 km/h. Auf dem Rückweg fahren Sie die Hälfte der *Strecke* mit 55 km/h und die andere Hälfte mit 90 km/h. Wie groß ist Ihre Effektivgeschwindigkeit auf der Fahrt

(a) von San Antonio nach Houston,
(b) von Houston zurück nach San Antonio und
(c) auf der gesamten Fahrt?
(d) Wie groß ist Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit auf der gesamten Fahrt?
(e) Skizzieren Sie x als Funktion von t im Fall (a) unter der Annahme, dass die Bewegung in die positive x-Richtung erfolgt. Geben Sie an, wie die Durchschnittsgeschwindigkeit anhand der Kurve ermittelt werden kann.

1.6 Tragen Sie Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit in den folgenden beiden Fällen auf

(a) Sie gehen zunächst 73,2 m mit einer Geschwindigkeit von 1,22 m/s und laufen dann weitere 73,2 m mit einer Geschwindigkeit von 3,05 m/s einen geraden Weg entlang.
(b) Sie gehen 1,00 min mit einer Geschwindigkeit von 1,22 m/s und laufen dann 1,00 min mit 3,05 m/s einen geraden Weg entlang.
(c) Tragen Sie für beide Fälle x in Abhängigkeit von t auf und geben Sie an, wie sich die Durchschnittsgeschwindigkeit anhand der Kurve bestimmen lässt.

1.7 Die Position eines Objekts, das sich entlang einer x-Achse bewegt, wird durch $x = 3t - 4t^2 + t^3$ beschrieben, wobei x in Metern und t in Sekunden angegeben wird.

(a) Was ist die Position des Objekts bei $t = 1, 2, 3$ und 4 s?
(b) Wie groß ist die Verschiebung des Objekts zwischen $t = 0$ und $t = 4$ s?
(c) Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall von $t = 2$ bis $t = 4$ s?
(d) Tragen Sie x als Funktion von t für $0 \leq t \leq 4$ auf und geben Sie an, wie Sie die Antwort auf Frage (c) anhand der Kurve herausfinden können.

1.8 Zwei Züge bewegen sich mit jeweils 30 km/h auf dem gleichen Gleis aufeinander zu. In dem Moment, in dem sich die beiden Züge 60 km weit auseinander befinden, fliegt ein Vogel mit 60 km/h von der Spitze des einen Zugs los und direkt auf den anderen Zug zu. Kaum hat er diesen erreicht, kehrt er um und fliegt zum ersten Zug zurück usw. (*Warum* ein Vogel so etwas tun würde, wissen wir nicht.) Welche Gesamtstrecke legt der Vogel zurück?

1.9 Die Gewinner von zwei Ein-Kilometer-Wettrennen liefen die Strecke auf *verschiedenen* Bahnen in 2 min, 27,95 s bzw. 2 min, 28,15 s. Um zu dem Schluss kommen zu können, dass der Läufer mit der kürzesten Zeit tatsächlich der schnellere war, wie viel länger darf die andere Bahn tatsächlich gewesen sein?

1.10

(a) Die Position eines Teilchens ist durch $x = 4 - 12t + 3t^2$ gegeben, wobei t in Sekunden und x in Metern gemessen wird. Wie groß ist seine Geschwindigkeit zur Zeit $t = 1$ s?
(b) Bewegt es sich zu dem Zeitpunkt in die positive oder negative Richtung der x-Achse?
(c) Wie groß ist der Betrag seiner Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt?
(d) Ist dieser Geschwindigkeitsbetrag größer oder kleiner als zu späteren Zeiten?
(Versuchen Sie, die nächsten beiden Fragen ohne weitere Berechnungen zu beantworten.)
(e) Wird die Geschwindigkeit des Teilchens jemals null und wenn ja, zu welchem Zeitpunkt?
(f) Gibt es einen Zeitpunkt nach $t = 3$ s, an dem das Teilchen sich in die negative x-Richtung bewegt?

1.11 Die Position eines Teilchens, das sich auf der x-Achse bewegt, ist in Zentimetern durch $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$ gegeben, wobei t in Sekunden gemessen wird. Berechnen Sie

(a) die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $t = 2{,}00$ s bis $t = 3{,}00$ s;
(b) die Momentangeschwindigkeit bei $t = 2{,}00$ s;
(c) die Momentangeschwindigkeit bei $t = 3{,}00$ s;
(d) die Momentangeschwindigkeit bei $t = 2{,}50$ s und
(e) die Momentangeschwindigkeit in dem Augenblick, in dem sich das Teilchen genau in der Mitte zwischen den beiden Orten bei $t = 2{,}00$ s und $t = 3{,}00$ s befindet.
(f) Tragen Sie x als Funktion von t auf und begründen Sie Ihre Antworten anhand der Grafik.

1.12 Welche Entfernung legt der Läufer, dessen $v(t)$-Kurve in Abb. Ü1.A12 aufgetragen ist, innerhalb von 16 s zurück?

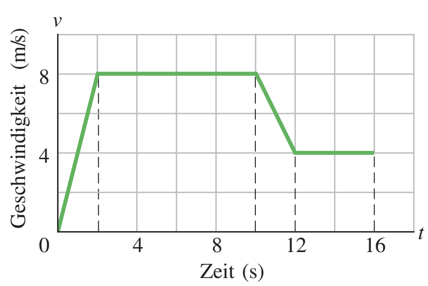


Abb. Ü1.A12

1.13 Der Betrag der Geschwindigkeit eines Teilchens ist zu einer bestimmten Zeit 18 m/s. 2,4 s später beträgt seine Geschwindigkeit 30 m/s in die entgegengesetzte Richtung. Ermitteln Sie Betrag und Richtung der Durchschnittsbeschleunigung des Teilchens während dieses Zeitintervalls von 2,4 s.

1.14 Ein Mann steht von $t = 0$ bis $t = 5{,}00$ min bewegungslos. Von $t = 5{,}00$ min bis $t = 10{,}0$ min bewegt er sich zügig auf einer geraden Linie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,20 m/s. Wie groß sind

(a) seine Durchschnittsgeschwindigkeit v_{gem} und
(b) seine Durchschnittsbeschleunigung a_{gem} während des Zeitintervalls von $t = 2{,}00$ min bis $t = 8{,}00$ min? Wie groß sind
(c) v_{gem} und
(d) a_{gem} im Zeitintervall von $t = 3{,}00$ min bis $t = 9{,}00$ min?
(e) Zeichnen Sie x als Funktion von t und v als Funktion von t und erläutern Sie, wie die Antworten auf die Fragen (a) bis (d) aus den Kurven ermittelt werden können.

1.15 Ein Proton bewegt sich entlang einer x-Achse gemäß der Gleichung $x = 50t + 10t^2$, wobei x in Metern und t in Sekunden gemessen wird. Berechnen Sie

(a) die Durchschnittsgeschwindigkeit des Protons während der ersten 3,0 s seiner Bewegung,
(b) die Momentangeschwindigkeit des Protons zur Zeit $t = 3{,}0$ s und
(c) die Momentanbeschleunigung des Protons bei $t = 3{,}0$ s.
(d) Zeichnen Sie x als Funktion von t und erläutern Sie, wie die Antwort auf die Frage (a) aus der Kurve ermittelt werden kann.
(e) Geben Sie die Antwort auf Frage (b) auf der Kurve an.
(f) Zeichnen Sie v als Funktion von t und geben Sie auf der Kurve die Antwort auf Frage (c) an.

1.16 Die Position eines Elektrons, das sich entlang der x-Achse bewegt, wird durch $x = 16te^{-t}$ beschrieben, wobei t in Sekunden angegeben ist. Wie weit ist das Elektron in dem Augenblick, in dem es vorübergehend anhält, vom Ursprung entfernt?

1.17 Die Position eines Teilchens, das sich entlang der x-Achse bewegt, hängt entsprechend der Gleichung $x = ct^2 - bt^3$ von der Zeit ab, wobei x in Metern und t in Sekunden angegeben werden.

(a) Welche Einheiten müssen die Konstanten c und b besitzen? Ihre Zahlenwerte seien jeweils 3,0 und 2,0.
(b) Zu welcher Zeit erreicht das Teilchen seine in positiver x-Richtung maximale Position?
(c) Welche Strecke legt das Teilchen von $t = 0{,}0$ s bis $t = 4{,}0$ s zurück und
(d) wie groß ist dabei seine Verschiebung? Wie groß sind
(e) seine Geschwindigkeit und
(f) seine Beschleunigung bei $t = 1{,}0$ s, 2,0, 3,0 und 4,0 s?

1.18 Ein Autofahrer vergrößert die Geschwindigkeit seines Wagens mit konstanter Beschleunigung in 0,50 min von 25 km/h auf 55 km/h. Ein Fahrradfahrer beschleunigt mit konstanter Beschleunigung in 0,50 min von null auf 30 km/h. Berechnen Sie die entsprechenden Beschleunigungen.

1.19 Ein Myon (ein Elementarteilchen) tritt mit einer Geschwindigkeit von $5{,}00 \cdot 10^6$ m/s in einen bestimmten Bereich ein und wird in diesem Bereich dann mit einer Verzögerung von $1{,}25 \cdot 10^{14}$ m/s^2 abgebremst.

(a) Welche Strecke legt das Myon zurück, bis es anhält?
(b) Zeichnen Sie die Größen x und v als Funktionen von t auf.

1.20 Der Kopf einer Klapperschlange kann während des Angriffs eine Beschleunigung von 50 m/s^2 erreichen. Wenn ein Auto genauso schnell beschleunigen könnte, in welcher Zeit käme es dann von null auf 100 km/h?

1.21 Ein Elektron wird konstant mit +3,2 m/s^2 beschleunigt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist seine Geschwindigkeit gleich +9,6 m/s. Wie groß ist seine Geschwindigkeit

(a) 2,5 s vorher und
(b) 2,5 s später?

1.22 Eine Kugel besitzt am Austritt eines Gewehrlaufs von 1,20 m Länge eine Geschwindigkeit von 640 m/s. Ermitteln Sie unter der Annahme, dass die Beschleunigung konstant ist, wie lange sich die Kugel nach dem Abfeuern im Gewehrlauf befunden hat.

1.23 Ein Raumschiff bewegt sich in den Tiefen des Alls mit einer konstanten Beschleunigung von 9,8 m/s^2, die den Insassen während des Flugs das Gefühl normaler Schwerkraftbedingungen vermittelt.

(a) Wie lange braucht das Raumschiff, um von null auf eine Geschwindigkeit zu kommen, die einem Zehntel der Lichtgeschwindigkeit von $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s entspricht?
(b) Welche Entfernung legt es dabei zurück?

1.24 Ein Jumbojet muss auf der Startbahn eine Geschwindigkeit von 360 km/h erreichen, damit er abheben kann. Wie groß ist die kleinste konstante Beschleunigung, die es dem Flugzeug erlaubt, von einer 1,80 km langen Bahn zu starten?

1.25 Ein Elektron tritt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 1{,}50 \cdot 10^5$ m/s in einen 1,0 cm langen Bereich ein, in dem es von einem elektrischen Feld beschleunigt wird (Abb. Ü1.A25). Es tritt anschließend mit einer Geschwindigkeit von $v = 5{,}70 \cdot 10^6$ m/s aus dem Bereich aus. Wie groß ist seine Beschleunigung unter der Annahme, dass diese konstant ist? (Ein solcher Vorgang fand früher in Fernsehern oder Monitoren mit Bildröhre statt.)

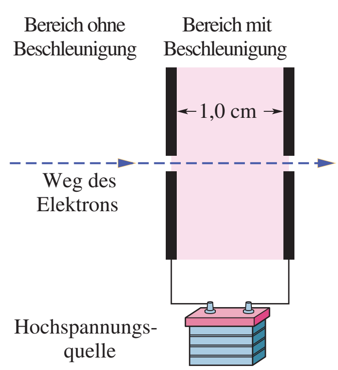


Abb. Ü1.A25

1.26 Im März 1954 stellte Colonel John P. Stapp anhand eines raketengetriebenen Schlittens, der mit 1020 km/h seine Bahn entlang schoss, einen Geschwindigkeitsweltrekord zu Lande auf. Fahrer und Schlitten wurden innerhalb von 1,4 s wieder zum Stehen gebracht (siehe Abb. 2.7). Wie groß ist die Beschleunigung, der Colonel Stapp während des Bremsvorgangs ausgesetzt war, in Einheiten von g?

1.27 Die Bremsen Ihres Autos liefern eine maximale Verzögerung von 5,2 m/s^2.

(a) Sie fahren mit 137 km/h und erblicken plötzlich eine Radarfalle. Wie lang brauchen Sie mindestens, um Ihren Wagen unter die maximal erlaubte Geschwindigkeit von 90 km/h zu bringen? (Die Antwort macht deutlich, wie sinnlos hier die Hoffnung ist, durch Bremsen dem „Geblitztwerden“ zu entgehen.)
(b) Tragen Sie für eine solche Verzögerung x und v jeweils in Abhängigkeit von t auf.

1.28 Abbildung Ü1.A28 stellt die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines Teilchens entlang einer x-Achse dar. Wie groß ist der Betrag der Beschleunigung und in welche Richtung weist sie?

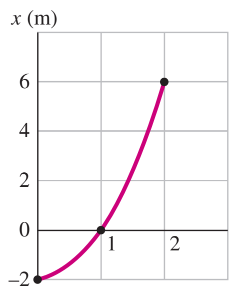


Abb. Ü1.A28

1.29 Ein Auto, das sich mit 56,0 km/h bewegt, befindet sich 24,0 m von einer Schranke entfernt, als der Fahrer mit Wucht auf die Bremse tritt. Der Wagen prallt 2,00 s später auf die Schranke auf.

(a) Wie groß ist die konstante Beschleunigung des Wagens während des Bremsvorgangs?
(b) Wie schnell bewegt sich der Wagen im Augenblick des Aufpralls?

1.30 Ein roter und ein grüner Zug bewegen sich mit 72 bzw. 144 km/h entlang einer geraden, waagerechten Strecke aufeinander zu. Als sie sich 950 m voneinander entfernt befinden, erblicken die Zugführer den jeweils anderen Zug und fangen an zu bremsen. Die Bremsen verzögern beide Züge mit einer Rate von 1,0 m/s^2. Stoßen die beiden Züge zusammen? Wenn ja, wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Züge während des Aufpralls? Wenn nein, in welchem Abstand voneinander kommen die beiden Züge zum Halten?

1.31 Ein gleichmäßig beschleunigtes Auto legt die 60,0 m zwischen zwei bestimmten Punkten in 6,00 s zurück. Am zweiten Punkt fährt es mit einer Geschwindigkeit von 15,0 m/s vorbei.

(a) Wie groß war sein Geschwindigkeitsbetrag am ersten Punkt?
(b) Wie groß war die Beschleunigung?
(c) In welcher Entfernung vor dem ersten Punkt war die Geschwindigkeit des Wagens gleich null?
(d) Tragen Sie von dem Moment des Haltens ($t = 0$) an die Größen x und v als Funktionen von t auf.

1.32 In dem Augenblick, in dem die Ampel auf Grün springt, fährt ein Auto mit einer konstanten Beschleunigung a von 2,2 m/s^2 an. Im selben Moment überholt ein Lkw den Wagen mit einer konstanten Geschwindigkeit von 9,5 m/s.

(a) In welcher Entfernung von der Ampel wird das Auto den Lkw überholen?
(b) Wie schnell fährt das Auto in diesem Moment?

1.33 Um ein Auto anzuhalten, benötigen Sie zunächst eine bestimmte Reaktionszeit, bevor Sie überhaupt anfangen zu bremsen; danach wird der Wagen unter dem Einfluss einer konstanten Bremsverzögerung langsamer. Nehmen Sie an, dass sich Ihr Auto während dieser beiden Phasen bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 80,5 km/h insgesamt 56,7 m weit bewegt, während Sie bei einer ursprünglichen Geschwindigkeit von 48,3 km/h insgesamt 24,4 m brauchen, bis Ihr Fahrzeug zum Stehen kommt. Wie groß sind

(a) Ihre Reaktionszeit und
(b) der Betrag der Verzögerungsrate?

1.34 Als ein Intercity mit 161 km/h um eine Kurve fährt, erschrickt der Lokführer: Eine weitere Lokomotive ist vor ihm ohne Freigabe von einem Seitengleis auf das Hauptgleis eingebogen und befindet sich in einem Abstand von $D = 676$ m voraus (Abb. Ü1.A34). Die Lokomotive bewegt sich mit 29,0 km/h in dieselbe Richtung wie der Intercity. Der Lokführer des Intercitys fängt sofort an zu bremsen.

(a) Welche konstante Verzögerungsrate ist mindestens notwendig, um den Zusammenstoß gerade noch zu vermeiden?
(b) Der Lokführer befinde sich in dem Augenblick $t = 0$, in dem er die Lokomotive zum ersten Mal erblickt, am Ort $x = 0$. Zeichnen Sie die $x(t)$-Kurven für die Lokomotive und den Intercity für den Fall, dass der Zusammenstoß gerade noch vermieden wird, und für den Fall, in dem der Zusammenstoß gerade nicht vermieden werden kann.

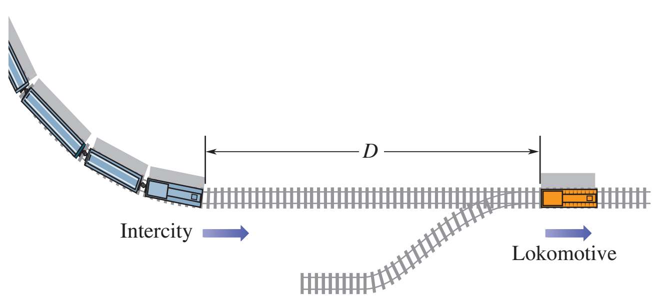


Abb. Ü1.A34

1.35 Ein Aufzug in einem New Yorker Hotel kann eine Gesamtstrecke von 190 m zurücklegen. Seine Maximalgeschwindigkeit beträgt dabei 305 m/min. Seine Beschleunigung und Verzögerung betragen jeweils 1,22 m/s^2.

(a) Welche Wegstrecke benötigt der Aufzug, um von null auf Maximalgeschwindigkeit zu beschleunigen?
(b) Wie lange braucht er, um die 190 m zurückzulegen, wenn er mit Geschwindigkeit null startet und nach 190 m wieder anhält?

1.36 Regentropfen fallen 1700 m aus einer Wolke zu Boden.

(a) Nehmen Sie an, dass die Tropfen nicht durch den Luftwiderstand gebremst werden. Wie schnell sind die Tropfen bei ihrem Aufprall auf dem Erdboden?
(b) Ist es gefährlich, sich während eines heftigen Niederschlags im Freien aufzuhalten?

1.37 Auf einer Baustelle schlägt ein Schraubenschlüssel mit einer Geschwindigkeit von 24 m/s auf dem Boden auf.

(a) Aus welcher Höhe wurde der Schraubenschlüssel versehentlich fallen gelassen?
(b) Wie lange dauerte der Fall?
(c) Skizzieren Sie für den Schraubenschlüssel die Kurven von y, v und a in Abhängigkeit von t.

1.38 Ein Rowdy wirft einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 12,0 m/s vom Dach eines Gebäudes, das sich in einer Höhe von 30,0 m über dem Boden befindet, senkrecht nach unten.

(a) Wie lange braucht der Stein, bis er auf dem Boden auftrifft?
(b) Wie groß ist seine Geschwindigkeit beim Aufprall?

1.39

(a) Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Ball vom Boden aus senkrecht nach oben geworfen werden, damit er eine Maximalhöhe von 50 m erreicht?
(b) Wie lange befindet sich der Ball in der Luft?
(c) Skizzieren Sie für den Ball die Kurven von y, v und a in Abhängigkeit von t. Zeichnen Sie auf den ersten beiden Kurven ein, zu welcher Zeit der Ball die Maximalhöhe von 50 m erreicht.

1.40 Das Forschungszentrum zur Schwerelosigkeit im NASA Lewis Research Center verfügt über einen Fallturm von 145 m Höhe. In diesem luftleeren senkrechten Turm kann unter anderem eine Kapsel von einem Meter Durchmesser fallen gelassen werden, die verschiedene Messinstrumente und experimentelle Aufbauten enthält.

(a) Wie lange befindet sich die Kapsel im freien Fall?
(b) Wie groß ist ihre Geschwindigkeit in dem Moment, in dem sie von einer besonderen Vorrichtung am Boden des Turms aufgefangen wird?
(c) Während des Auffangens ist die Kapsel – bis sie die Geschwindigkeit null erreicht – einer durchschnittlichen Verzögerung von 25g ausgesetzt. Wie weit bewegt sich die Kapsel während des Verzögerungsvorgangs?

1.41 Ein Felsbrocken wird von einer 100 m hohen Klippe hinuntergeworfen. Wie lange braucht der Stein, um

(a) die ersten 50 m und
(b) die zweiten 50 m hinunterzufallen?

1.42 Ein Ball wird von einer Höhe h aus senkrecht *nach unten* geworfen. Der Betrag seiner Geschwindigkeit ist dabei v_0.

(a) Wie schnell ist der Ball, kurz bevor er den Boden erreicht?
(b) Wie lange braucht der Ball, bis er auf dem Boden aufprallt? Wie würden die Antworten auf
(c) Frage (a) und
(d) Frage (b) ausfallen, wenn der Ball von der gleichen Höhe aus mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag *nach oben* geworfen worden wäre? Bevor Sie irgendeine Gleichung lösen, entscheiden Sie, ob die Antworten auf (c) und (d) größer als, kleiner als oder gleich groß wie die von (a) und (b) sind.

1.43 Ein aufgeschrecktes Gürteltier springt senkrecht in die Luft und erreicht dabei in den ersten 0,200 s eine Höhe von 0,544 m.

(a) Wie groß ist die anfängliche Geschwindigkeit, mit der es den Boden verlässt?
(b) Wie groß ist seine Geschwindigkeit in 0,544 m Höhe?
(c) Welche Höhe erreicht das Gürteltier maximal?

1.44 Ein Stein wird (mit Anfangsgeschwindigkeit null) vom Dach eines 60 m hohen Gebäudes fallen gelassen. In welcher Höhe befindet sich der Stein, 1,2 s bevor er den Boden erreicht?

1.45 Ein Schlüssel fällt von einer Brücke, die sich 45 m über dem Wasser befindet. Er fällt direkt auf ein Modellboot, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Zu dem Zeitpunkt, als der Schlüssel fallen gelassen wurde, befand sich das Boot 12 m von dem Aufprallpunkt entfernt. Wie schnell bewegt sich das Boot?

1.46 Ein Ball wird vom Dach eines 36,6 m hohen Gebäudes senkrecht nach unten geworfen. 2,00 s, nachdem der Ball losgelassen wurde, fliegt er an der Oberkante eines Fensters vorbei, die sich 12,2 m über dem Boden befindet. Wie schnell ist der Ball in dem Augenblick, in dem er an der Oberkante des Fensters vorbeikommt?

1.47 Eine Kugel aus feuchtem Ton fällt aus einer Höhe von 15,0 m auf den Boden. Sie berührt den Boden während einer Zeitdauer von 20,0 ms, bevor sie anhält. Wie groß ist die Durchschnittsbeschleunigung der Kugel während der Zeit, in der sie den Boden berührt? (Behandeln Sie die Kugel wie ein Teilchen.)

1.48 Um die Qualität eines Tennisballs zu testen, lassen Sie ihn aus einer Höhe von 4,00 m auf den Boden fallen. Er prallt auf eine Höhe von 2,00 m zurück. Der Ball berührt den Boden während eines Zeitintervalls von 12,0 ms. Wie groß ist seine Durchschnittsbeschleunigung während des Aufpralls?

1.49 Ein Basketballspieler befindet sich in der Nähe des Korbes, um einen Rebound abzufangen. Dazu springt er 76,0 cm senkrecht nach oben. Wie viel Zeit verbringt der Spieler insgesamt

(a) in den obersten 15,0 cm und
(b) in den untersten 15,0 cm seines Sprungs? Erklärt dies, warum solche Spieler so aussehen, als seien sie am obersten Punkt ihres Sprungs quasi in der Luft aufgehängt?

1.50 Aus einem Duschkopf tropft Wasser 200 cm tief auf den Boden. Die Tropfen fallen in gleichmäßigen Zeitabständen; dabei erreicht der erste Tropfen den Boden in dem Moment, in dem der vierte Tropfen gerade anfängt, hinunterzufallen. Ermitteln Sie die Positionen

(a) des zweiten und
(b) des dritten Tropfens in dem Augenblick, in dem der erste Tropfen den Boden erreicht.

1.51 Ein Ball wird von der Oberfläche eines Planeten in einem fernen Sonnensystem senkrecht nach oben geworfen. Abbildung Ü1.A51 zeigt die Kurve von y in Abhängigkeit von t für den Ball. Hierbei sind y die Höhe des Balls oberhalb seines Ausgangspunkts und $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem der Ball geworfen wird. Wie groß sind

(a) der Betrag der Gravitationsbeschleunigung dieses Planeten und
(b) die Anfangsgeschwindigkeit des Balls?

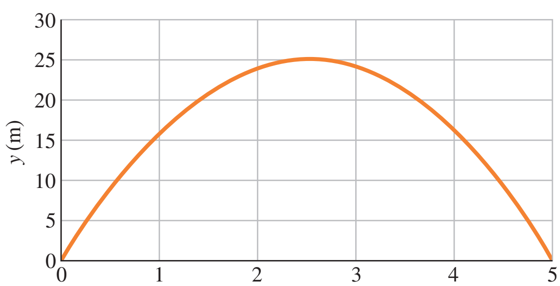


Abb. Ü1.A51

1.52 Zwei Diamanten fallen mit Anfangsgeschwindigkeit null aus der gleichen Höhe nach unten; der eine 1,0 s später als der andere. Nach welcher Zeitdauer (vom Start des ersten Diamanten an gemessen) befinden sich die beiden Diamanten 10 m weit auseinander?

1.53 Ein Jongleur wirft seine Bälle üblicherweise senkrecht nach oben bis zu einer Höhe H. Bis zu welcher Höhe müsste er die Bälle werfen, damit sie doppelt so lange in der Luft bleiben?

1.54 Ein Heißluftballon steigt mit einer Geschwindigkeit von 12 m/s auf. Er befindet sich 80 m über dem Boden, als ein Paket aus dem Korb hinausgeworfen wird.

(a) Wie lang braucht das Paket, bis es den Boden erreicht?
(b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft es auf dem Boden auf?

1.55 Ein Stein wird von einer 43,9 m hohen Brücke aus in den darunterliegenden Fluss fallen gelassen. Ein weiterer Stein wird 1,00 s nach dem ersten hinuntergeworfen. Beide Steine erreichen die Wasseroberfläche zur gleichen Zeit.

(a) Wie groß ist der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit des zweiten Steins?
(b) Tragen Sie für jeden der beiden Steine die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auf (mit $t = 0$ als dem Zeitpunkt, wenn der erste Stein losgelassen wird).

1.56 Ein Aufzug ohne Dach fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 m/s nach oben. In dem Aufzug wirft ein Junge aus einer Höhe von 2,0 m über dem Fußboden des Aufzugs einen Ball senkrecht nach oben – genau in dem Moment, in dem sich der Fußboden des Aufzugs 28 m über dem Erdboden befindet. Die anfängliche Geschwindigkeit des Balls relativ zum Aufzug beträgt 20 m/s.

(a) Welche Maximalhöhe über dem Erdboden erreicht der Ball?
(b) Wie lange braucht der Ball, bis er wieder auf dem Fußboden des Aufzugs auftrifft?

1.57 Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen. Auf seinem Weg nach oben kommt er an Punkt A mit der Geschwindigkeit v und an Punkt B, der sich 3,00 m über A befindet, mit der Geschwindigkeit $v/2$ vorbei. Berechnen Sie (a) die Geschwindigkeit v und (b) die maximale Höhe, die der Stein oberhalb von B erreicht.

1.58 Abbildung Ü1.A58 zeigt eine einfache Vorrichtung zur Messung Ihrer Reaktionszeit. Sie besteht aus einem Pappstreifen, auf dem eine Skala und zwei große Punkte eingezeichnet sind. Ein Freund von Ihnen fasst den Streifen am Punkt auf der rechten Seite von Abb. Ü1.A58 zwischen Daumen und Zeigefinger und hält den Streifen dann senkrecht in die Höhe. Anschließend legen Sie Ihren Daumen und Zeigefinger an den anderen Punkt (in Abb. Ü1.A58 auf der linken Seite), ohne den Pappstreifen jedoch zu berühren. Ihr Freund lässt den Streifen – ohne Vorwarnung – fallen und Sie versuchen, ihn so schnell wie möglich mit Daumen und Zeigefinger zu fassen zu kriegen. Die Markierung, bei der sich Ihre Finger befinden, gibt Ihre Reaktionszeit an.

(a) Wie weit sollte die 50,0 ms-Markierung vom unteren Punkt entfernt sein?
(b) Wie viel höher sollten die Markierungen für 100, 150, 200 und 250 ms liegen? (Sollte die 100-ms-Markierung z. B. zweimal so weit von dem Punkt entfernt sein wie die 50-ms-Markierung? Können Sie in den Antworten ein bestimmtes Muster erkennen?)

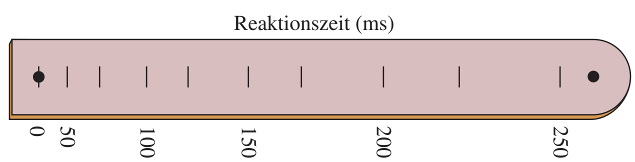


Abb. Ü1.A58

1.59 Eine Fallschirmspringerin springt aus einem Flugzeug und fällt 50 m im freien Fall. Dann öffnet sich der Fallschirm und verzögert den Fall mit 2,0 m/s^2. Die Springerin erreicht den Boden mit 3,0 m/s.

(a) Wie lange befand sie sich in der Luft?
(b) In welcher Höhe ist sie aus dem Flugzeug gesprungen?

1.60 Eine verträumte Katze schaut aus einem Fenster und bemerkt einen Blumentopf, der zuerst nach oben und dann nach unten an dem Fenster vorbeifliegt. Der Topf ist für insgesamt 0,50 s zu sehen; die Höhe des Fensters von der Fensterbank bis zur Oberkante beträgt 2,00 m. Welche Höhe über der Oberkante des Fensters erreicht der Blumentopf?

1.61 Der Kern einer Wassermelone besitze die folgenden Koordinaten: $x = -5{,}0\,\text{m}$, $y = -8{,}0\,\text{m}$ und $z = 0\,\text{m}$. Bestimmen Sie seinen Ortsvektor

(a) in Einheitsvektoren-Schreibweise und als
(b) ein Betrag und
(c) ein Winkel relativ zur positiven Richtung der x-Achse.
(d) Skizzieren Sie diesen Vektor in einem rechtshändigen Koordinatensystem. Der Kern bewege sich nun zu den xyz-Koordinaten (3,00 m, 0 m, 0 m). Wie lautet seine Verschiebung
(e) in Einheitsvektoren-Schreibweise und als
(f) ein Betrag und
(g) ein Winkel relativ zur positiven Richtung der x-Achse?

1.62 Der Ortsvektor eines Elektrons sei

$$\vec{r} = (5{,}0\,\text{m})\vec{e}_x - (3{,}0\,\text{m})\vec{e}_y + (2{,}0\,\text{m})\vec{e}_z\,.$$

(a) Ermitteln Sie den Betrag von $\vec{r}$.
(b) Zeichnen Sie den Vektor in einem rechtshändigen Koordinatensystem.

1.63 Der Ortsvektor eines Protons sei zunächst

$$\vec{r} = 5{,}0\vec{e}_x - 6{,}0\vec{e}_y + 2{,}0\vec{e}_z$$

und später

$$\vec{r} = -2{,}0\vec{e}_x + 6{,}0\vec{e}_y + 2{,}0\vec{e}_z$$

(alle Angaben in Metern).

(a) Wie lautet der Verschiebungsvektor des Protons und
(b) zu welcher Ebene ist dieser Vektor parallel?

1.64 Eine Radaranlage registriert ein Flugzeug, das direkt von Osten heranfliegt (Abb. Ü1.A64). Zum ersten Beobachtungszeitpunkt ist der Abstand zwischen Flugzeug und Radaranlage gleich 360 m unter einem Winkel von 40° über dem Horizont. Die Radaranlage verfolgt das Flugzeug über einen Winkel von 123° hinweg in einer senkrechten Ost-West-Ebene bis zu dem Augenblick, in dem sich das Flugzeug in einer Entfernung von 790 m von der Radaranlage befindet. Bestimmen Sie die Verschiebung des Flugzeugs während des Beobachtungszeitraums.

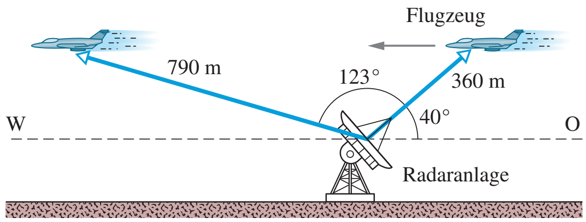


Abb. Ü1.A64

1.65 Ein Zug fahre 40,0 min lang mit einem konstanten Geschwindigkeitsbetrag von 60,0 km/h nach Osten, dann 20,0 min lang in eine Richtung 50,0° östlich von Norden und schließlich 50,0 min lang nach Westen. Wie lautet die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zugs während dieser Fahrt?

1.66 Der Ortsvektor eines Ions sei anfänglich

$$\vec{r} = 5{,}0\vec{e}_x - 6{,}0\vec{e}_y + 2{,}0\vec{e}_z\,,$$

10 s später sei er

$$\vec{r} = -2{,}0\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y - 2{,}0\vec{e}_z$$

(alle Angaben in Metern). Wie lautet seine Durchschnittsgeschwindigkeit während dieser 10 s?

1.67 Die Position eines Elektrons wird durch

$$\vec{r} = 3{,}00t\vec{e}_x - 4{,}00t^2\vec{e}_y + 2{,}00\vec{e}_z$$

gegeben, wobei t in Sekunden und $\vec{r}$ in Metern gemessen werden.

(a) Wie lautet die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Elektrons? Wie lautet $\vec{v}$ zur Zeit $t = 2{,}00$
(b) in Einheitsvektoren-Schreibweise sowie als
(c) ein Betrag und
(d) ein Winkel relativ zur positiven Richtung der x-Achse?

1.68 Die Oase A liegt 90 km westlich von der Oase B. Ein Kamel verlässt die Oase A und läuft innerhalb von 50 h 75 km in eine Richtung von 37° nördlich von Osten. Dann wendet sich das Kamel nach Süden und legt innerhalb von 35 h eine Entfernung von 65 km zurück. Daraufhin ruht es sich 5,0 h aus.

(a) Wie lautet die Verschiebung des Kamels relativ zur Oase A nach dem Ausruhen?
(b) Wie lautet die Durchschnittsgeschwindigkeit des Kamels zwischen dem Zeitpunkt, in dem es die Oase A verlässt, und dem Moment, in dem es seine Ruhepause beendet hat?
(c) Wie groß ist der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall?
(d) Wenn ein Kamel fünf Tage (120 h) lang laufen kann, ohne Wasser zu brauchen, wie muss dann seine Durchschnittsgeschwindigkeit nach dem Ausruhen lauten, damit es die Oase B gerade noch rechtzeitig erreicht?

1.69 Ein Teilchen bewege sich so, dass seine Position (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden) durch

$$\vec{r} = \vec{e}_x + 4t^2\vec{e}_y + t\vec{e}_z$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie

(a) seine Geschwindigkeit und
(b) seine Beschleunigung als Funktion der Zeit.

1.70 Ein Proton besitzt die Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v} = 4{,}0\vec{e}_x - 2{,}0\vec{e}_y + 3{,}0\vec{e}_z\,.$$

4,0 s später ist seine Geschwindigkeit

$$\vec{v} = -2{,}0\vec{e}_x - 2{,}0\vec{e}_y + 5{,}0\vec{e}_z$$

(jeweils in m/s).

(a) Geben Sie die Durchschnittsbeschleunigung $\vec{a}_{\text{gem}}$ des Protons während dieser 4,0 s an.
(b) Wie groß ist der Betrag der Durchschnittsbeschleunigung in dieser Zeit?
(c) Welchen Winkel schließt $\vec{a}_{\text{gem}}$ mit der positiven x-Richtung ein?

1.71 Der Ort $\vec{r}$ eines Teilchens, das sich in der xy-Ebene bewegt, sei durch

$$\vec{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\vec{e}_x + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\vec{e}_y$$

gegeben, mit $\vec{r}$ in Metern und t in Sekunden. Berechnen Sie

(a) $\vec{r}$,
(b) $\vec{v}$ und
(c) $\vec{a}$ zum Zeitpunkt $t = 2{,}00$ s.
(d) Welchen Winkel schließt die Tangente an die Bahnkurve des Teilchens bei $t = 2{,}00$ s mit der positiven x-Achse ein?

1.72 Ein Eissegler bewegt sich über die Oberfläche eines gefrorenen Sees mit einer vom Wind verursachten konstanten Beschleunigung. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit des Boots $(6{,}30\vec{e}_x - 8{,}42\vec{e}_y)$ m/s. Drei Sekunden später kommt das Boot abrupt zum Stehen, da der Wind gedreht hat. Wie lautet die Durchschnittsbeschleunigung des Boots während dieses Zeitintervalls von 3 s?

1.73 Ein Teilchen verlässt den Ursprung mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = (3{,}00\vec{e}_x)$ m/s und einer konstanten Beschleunigung $\vec{a} = (-1{,}00\vec{e}_x - 0{,}500\vec{e}_y)$ m/s². Wie lauten

(a) die Geschwindigkeit und
(b) der Ortsvektor des Teilchens in dem Moment, in dem es seine maximale x-Koordinate erreicht?

1.74 Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Teilchens, das sich in einer xy-Ebene bewegt, sei durch $\vec{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y$ gegeben, wobei $\vec{v}$ in Metern pro Sekunde und t (> 0) in Sekunden gemessen wird.

(a) Wie lautet die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 3{,}0$ s?
(b) Wann (wenn überhaupt) wird die Beschleunigung gleich null?
(c) Wann (wenn überhaupt) wird die Geschwindigkeit gleich null?
(d) Wann (wenn überhaupt) ist der Geschwindigkeitsbetrag gleich 10 m/s?

1.75 Ein Teilchen starte vom Ursprung bei $t = 0$ mit einer Geschwindigkeit von $8{,}0\vec{e}_y$ m/s und bewege sich in der xy-Ebene mit einer konstanten Beschleunigung von $(4{,}0\vec{e}_x + 2{,}0\vec{e}_y)$ m/s². In dem Moment, in dem die x-Koordinate des Teilchens gleich 29 m ist, wie lauten dann

(a) seine y-Koordinate und
(b) der Betrag seiner Geschwindigkeit?

1.76 Teilchen A bewegt sich entlang der Geraden $y = 30$ m mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$, deren Betrag gleich 3,0 m/s ist und die parallel zur positiven x-Achse zeigt (Abb. Ü1.A76). Teilchen B startet am Ursprung mit der Geschwindigkeit null und einer konstanten Beschleunigung $\vec{a}$ (mit Betrag 0,40 m/s²) genau zu dem Zeitpunkt, zu dem A die y-Achse überquert. Welcher Winkel θ zwischen $\vec{a}$ und der positiven Seite der x-Achse würde zu einem Zusammenstoß der beiden Teilchen führen? (Sollten Ihre Berechnungen eine Gleichung beinhalten, in der ein Term wie r^4 auftritt, so setzen Sie $u = t^2$ ein und lösen die daraus resultierende quadratische Gleichung nach u auf.)

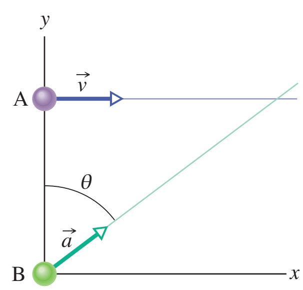


Abb. Ü1.A76

In einigen der folgenden Aufgaben ist es nicht gerechtfertigt, den Luftwiderstand zu vernachlässigen; es hilft jedoch, die Berechnungen zu vereinfachen.

1.77 Ein Gewehr wird horizontal auf ein 30 m weit entferntes Ziel gerichtet. Die Kugel trifft das Ziel 1,9 cm unterhalb des Punkts, auf den ursprünglich gezielt wurde. Wie groß sind

(a) die Flugzeit der Kugel und
(b) der Betrag ihrer Geschwindigkeit in dem Moment, in dem sie aus dem Gewehrlauf austritt?

1.78 Ein kleiner Ball rollt horizontal über einen 1,20 m hohen Tisch und fällt über die Kante. Er erreicht den Boden in einem Punkt, der in horizontaler Richtung gemessen 1,52 m von der Tischkante entfernt ist.

(a) Wie lange befindet sich der Ball in der Luft?
(b) Wie groß ist der Betrag seiner Geschwindigkeit in dem Moment, in dem er über die Tischkante rollt?

1.79 Ein Baseballspieler wirft einen Ball in horizontaler Richtung mit einem Geschwindigkeitsbetrag von 161 km/h. Der Abstand zum Schlagmann beträgt 18,3 m. (Vernachlässigen Sie die Auswirkungen des Luftwiderstands.)

(a) Wie lange braucht der Ball, um die erste Hälfte dieser Entfernung zurückzulegen?
(b) Wie lange braucht der Ball für die zweite Hälfte?
(c) Wie weit fällt der Ball im freien Fall während der ersten Hälfte und
(d) während der zweiten Hälfte?
(e) Warum sind die Größen in (c) und (d) nicht gleich?

1.80 Ein Dartpfeil werde mit einem anfänglichen Geschwindigkeitsbetrag von 10 m/s horizontal auf Punkt P geworfen, das Zentrum der Dartscheibe. Der Pfeil trifft 0,19 s später im Punkt Q senkrecht unterhalb von P am Rand der Scheibe auf.

(a) Wie groß ist der Abstand PQ?
(b) Aus welcher Entfernung von der Dartscheibe wurde der Pfeil geworfen?

1.81 Ein Elektron fliegt mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit mit Betrag $1{,}00 \cdot 10^9$ cm/s in einen Bereich zwischen zwei horizontalen Metallplatten hinein, die elektrisch geladen sind. In diesem Bereich bewegt es sich in horizontaler Richtung gemessen 2,00 cm weit; dabei ist es durch die geladenen Platten einer konstanten, nach unten weisenden Beschleunigung von $1{,}00 \cdot 10^{17}$ cm/s^2 ausgesetzt. Bestimmen Sie

(a) die Zeit, die das Elektron braucht, um die 2,00 cm zurückzulegen, und
(b) die vertikale Entfernung, die es während dieser Zeit zurücklegt. Ermitteln Sie ebenfalls den Betrag
(c) der horizontalen und
(d) der vertikalen Geschwindigkeitskomponente des Elektrons in dem Moment, in dem es aus dem Bereich heraustritt.

1.82 Während der Leichtathletikweltmeisterschaften von 1991 in Tokyo sprang Mike Powell 8,95 m weit und übertraf damit den 23 Jahre zuvor aufgestellten Weltrekord von Bob Beamon um ganze 5 cm. Nehmen Sie an, dass Powells Geschwindigkeit beim Absprung 9,5 m/s betrug (was etwa der Geschwindigkeit eines Sprinters entspricht) und dass in Tokyo $g = 9{,}80$ m/s^2 ist. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand. Wie viel kleiner war Powells horizontale Reichweite als die maximal mögliche horizontale Reichweite eines Teilchens, das mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag von 9,5 m/s geworfen wird?

1.83 Ein Stein werde zur Zeit $t = 0$ unter einem Winkel von 40,0° oberhalb der Horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20,0 m/s von einem Katapult abgeschossen. Wie groß ist der Betrag

(a) der horizontalen und
(b) der vertikalen Komponente der Verschiebung des Steins vom Ort des Katapults aus gemessen zum Zeitpunkt $t = 1{,}10$ s? Wiederholen Sie diese Berechnung für
(c) die horizontale und
(d) die vertikale Komponente zur Zeit $t = 1{,}80$ s sowie für
(e) die horizontale und
(f) die vertikale Komponente zur Zeit $t = 5{,}00$ s.

1.84 Ein Golfball wird vom Boden aus geschlagen. Abbildung Ü1.A84 zeigt den Geschwindigkeitsbetrag des Golfballs in Abhängigkeit von der Zeit, wobei $t = 0$ den Zeitpunkt angibt, zu dem der Ball geschlagen wird.

(a) Welche horizontale Entfernung legt der Golfball zurück, bevor er wieder auf Bodenhöhe ankommt?
(b) Welche Höhe über dem Boden erreicht der Golfball maximal?

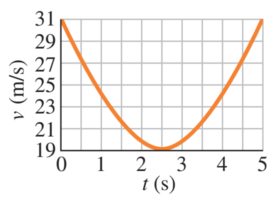


Abb. Ü1.A84

1.85 Ein Gewehr, das Kugeln mit 460 m/s abfeuert, wird auf eine Zielscheibe in 45,7 m Entfernung gerichtet, die sich auf gleicher Höhe befindet wie das Gewehr. Wie hoch muss der Gewehrlauf über die Zielscheibe zielen, damit die Kugel die Zielscheibe trifft?

1.86 Auf dem Planeten Megaton herrscht eine Schwerebeschleunigung von $g_M = 32$ m/s^2. Ein Schwerathlet wirft dort einen Ball aus einer Höhe von 3,0 m über der Megaton-Oberfläche. Eine Stroboskopaufnahme von der Position des Balls ist in Abb. Ü1.A86 dargestellt. Die Punkte befinden sich 0,25 s auseinander, der Ball wird bei $t = 0$ geworfen.

(a) Wie groß ist der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit des Balls?
(b) Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag des Balls in dem Moment, in dem er seine Maximalhöhe über dem Boden erreicht?
(c) Wie groß ist diese Maximalhöhe?

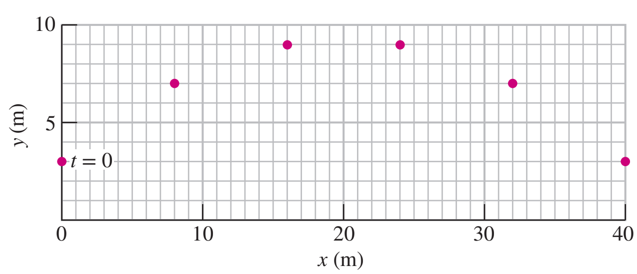


Abb. Ü1.A86

1.87 Zeigen Sie, dass die Maximalhöhe, die ein Projektil erreicht, gleich $y_{max} = (v_0 \sin \theta_0)^2/2g$ ist.

1.88 Sie werfen einen Ball in einem Winkel von 40,0° oberhalb der Horizontalen mit einem Geschwindigkeitsbetrag von 25,0 m/s gegen eine Wand (Abb. Ü1.A88). Die Wand befindet sich 22,0 m von dem Punkt entfernt, an dem der Ball geworfen wird.

(a) Wie weit oberhalb der Abwurfhöhe trifft der Ball die Wand?
(b) Wie groß sind die horizontale und die vertikale Komponente seiner Geschwindigkeit in dem Moment, in dem er die Wand erreicht?
(c) Hat der Ball den höchsten Punkt seiner Trajektorie in dem Moment, in dem er auf der Wand auftrifft, schon durchflogen oder noch nicht?

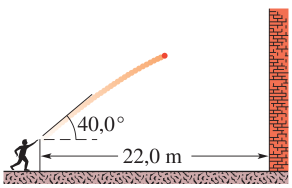


Abb. Ü1.A88

1.89 Ein Ball werde vom Boden aus in die Luft geworfen. In einer Höhe von 9,1 m sei seine Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde $\vec{v} = 7{,}6\vec{e}_x + 6{,}1\vec{e}_y$ ($\vec{e}_x$ sei horizontal, $\vec{e}_y$ zeige nach oben).

(a) Welche Höhe erreicht der Ball maximal?
(b) Welche horizontale Entfernung legt der Ball insgesamt zurück? Wie lauten
(c) der Betrag und
(d) die Richtung der Geschwindigkeit des Balls, kurz bevor er auf dem Boden auftrifft?

1.90 Zwei Sekunden, nachdem es vom Boden aus abgeschossen wurde, hat ein Projektil relativ zu seinem Startpunkt eine Verschiebung von 40 m in horizontaler und 53 m in vertikaler Richtung nach oben zurückgelegt. Wie groß sind

(a) die horizontale und
(b) die vertikale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit des Projektils?
(c) Wie groß ist die Verschiebung des Projektils in horizontaler Richtung vom Startpunkt aus gesehen in dem Moment, in dem es seine Maximalhöhe über dem Erdboden erreicht?

1.91 Ein Fußballspieler schießt einen Ball derart, dass dieser 4,5 s lang durch die Luft fliegt und dann 46 m weit vom Spieler entfernt landet. Nehmen Sie an, der Ball verlässt den Fuß des Spielers in einer Höhe von 150 cm über dem Boden. Wie lauten dann

(a) der Betrag und
(b) die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Balls?

1.92 Ein Turmspringer stößt sich mit einem Geschwindigkeitsbetrag von 2,00 m/s in horizontaler Richtung vom Rand eines Sprungturms ab, der sich 10,0 m oberhalb der Wasseroberfläche befindet.

(a) In welcher horizontalen Entfernung vom Rand des Turms befindet sich der Springer 0,800 s nach dem Abstoßen?
(b) In welcher vertikalen Entfernung von der Wasseroberfläche befindet sich der Springer in diesem Moment?
(c) In welcher horizontalen Entfernung vom Rand des Turms trifft der Springer im Wasser auf?

1.93 Ein bestimmtes Flugzeug besitzt einen Geschwindigkeitsbetrag von 290,0 km/h und fliegt in einem Winkel von 30,0° unterhalb der Horizontalen. In diesem Augenblick wirft der Pilot ein Hilfspaket ab (Abb. Ü1.A93). Die horizontale Entfernung zwischen dem Abwurfpunkt und dem Punkt, an dem das Hilfspaket auftrifft, beträgt 700 m.

(a) Wie lange befindet sich das Hilfspaket in der Luft?
(b) In welcher Höhe wurde es abgeworfen?

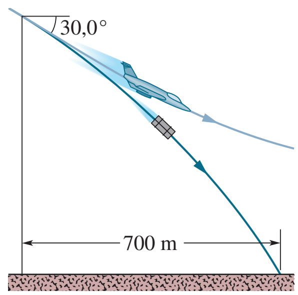


Abb. Ü1.A93

1.94 Der Betrag der Wurfgeschwindigkeit eines bestimmten Projektils sei fünfmal so groß wie der Betrag der Geschwindigkeit, die es am maximalen Punkt seiner Flugbahn hat. Berechnen Sie den Abwurfwinkel θ_0.

1.95 Ein Ball rollt mit einem Geschwindigkeitsbetrag von 1,52 m/s horizontal über den Rand der obersten Stufe einer Treppe. Die Treppenstufen sind 20,3 cm hoch und 20,3 cm tief. Auf welcher Treppenstufe trifft der Ball zuerst auf?

1.96 Ein Fußball wird vom Erdboden aus mit einem anfänglichen Geschwindigkeitsbetrag von 19,5 m/s in einem Winkel von 45° nach oben geschossen. Ein Spieler, der sich in Flugrichtung des Balls in einer Entfernung von 55 m befindet, fängt im gleichen Moment an zu rennen, um den Ball rechtzeitig zu erreichen. Welchen Betrag muss die Durchschnittsgeschwindigkeit des Spielers haben, damit er den Ball erreicht, kurz bevor dieser auf dem Boden auftrifft? Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

1.97 Ein Flugzeug fliege in einem Winkel von 53,0° relativ zur Senkrechten nach unten. In einer Höhe von 730 m wirft der Pilot ein Hilfspaket ab. Das Paket erreicht den Erdboden 5,00 s, nachdem es abgeworfen wurde.

(a) Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit des Flugzeugs?
(b) Welche horizontale Entfernung hat das Hilfspaket während seines Flugs zurückgelegt? Wie groß waren
(c) die horizontale und
(d) die vertikale Komponente seiner Geschwindigkeit, kurz bevor es auf dem Boden auftrifft?

1.98 Beim Frauenvolleyball befindet sich der obere Rand des Netzes in einer Höhe von 2,24 m über dem Boden und das Spielfeld misst auf jeder Seite des Netzes 9,0 m mal 9,0 m. Für die Angabe springt eine Spielerin hoch und schlägt den Ball in einem Punkt, der sich 3,0 m über dem Boden und in einer horizontalen Entfernung von 8,0 m vom Netz befindet. Die Anfangsgeschwindigkeit des Balls sei horizontal.

(a) Wie groß muss der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit mindestens sein, damit der Ball über das Netz kommt, und
(b) welchen Betrag darf die Anfangsgeschwindigkeit maximal haben, damit der Ball auf der anderen Seite des Netzes noch innerhalb des Spielfelds auf dem Boden landet?

1.99 Ein Schläger trifft einen Ball in dem Moment, in dem sich der Mittelpunkt des Balls in einer Höhe von 1,22 m über dem Boden befindet. Der Ball verlässt den Schläger in einem Winkel von 45° relativ zum Boden. Mit einem solchen Schlag sollte der Ball eine horizontale Reichweite (also bis zu dem Punkt gemessen, an dem er auf seine Ausgangshöhe zurückkehrt) von 107 m besitzen.

(a) Fliegt der Ball über einen 7,32 m hohen Zaun, der sich in einer horizontalen Entfernung von 97,5 m vom Wurfpunkt entfernt befindet?
(b) Wie die Antwort auf Teil (a) auch ausfallen mag, bestimmen Sie den Abstand zwischen dem oberen Rand des Zauns und dem Mittelpunkt des Balls in dem Augenblick, in dem der Ball den Zaun erreicht.

1.100 Während des Aufschlags in einem Tennismatch schlägt der Spieler den Ball mit 23,6 m/s, wobei der Mittelpunkt des Balls den Schläger in einer Höhe von 2,37 m über dem Boden horizontal verlässt. Das Netz ist 12 m entfernt und 0,90 m hoch.

(a) Fliegt der Ball über das Netz?
(b) Wie groß ist in diesem Moment der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Balls und dem oberen Rand des Netzes? Nehmen Sie nun an, dass der Aufschlag wie vorher erfolgt, jedoch mit dem Unterschied, dass der Ball den Schläger in einem Winkel von 5,00° unterhalb der Horizontalen verlässt.
(c) Fliegt der Ball jetzt immer noch über das Netz?
(d) Wie groß ist jetzt der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Balls und dem oberen Rand des Netzes?

1.101 Ein American-Football-Spieler gibt einem Ball einen anfänglichen Geschwindigkeitsbetrag von 25 m/s. Innerhalb welcher beiden Winkel muss er den Ball abschießen, um von einem 50 m vom Tor entfernten Punkt aus ein Feldtor zu schießen, wenn sich die horizontale Torstange in einer Höhe von 3,44 m über dem Boden befindet? (Wenn Sie dies algebraisch berechnen möchten, benutzen Sie

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\ ,$$

um eine Beziehung zwischen $\tan^2\theta$ und $1/\cos^2\theta$ herzuleiten; setzen Sie dies ein und lösen Sie die daraus resultierende quadratische Gleichung.)

1.102 Wie groß ist der Betrag der Beschleunigung eines Sprinters, der mit dem konstanten Geschwindigkeitsbetrag 10 m/s eine Kurve mit Radius 25 m durchläuft?

1.103 Ein Erdbeobachtungssatellit bewege sich mit einer Periode von 98,0 min auf einer kreisförmigen Umlaufbahn in einer Höhe von 640 km über der Erdoberfläche. Wie groß sind

(a) der Betrag der Geschwindigkeit und
(b) der Betrag der Zentripetalbeschleunigung des Satelliten?

1.104 Ein rotierender Hochleistungsventilator absolviert 1200 Umdrehungen pro Minute. Betrachten Sie die Spitze eines Ventilatorblatts, das einen Radius von 0,15 m besitzt.

(a) Welche Entfernung legt diese Spitze während einer Umdrehung zurück? Wie groß sind
(b) der Betrag der Geschwindigkeit der Spitze und
(c) der Betrag ihrer Beschleunigung?
(d) Wie groß ist die Periode dieser Bewegung?

1.105 Ein Astronaut rotiere in einer horizontalen Zentrifuge mit Radius 5,0 m.

(a) Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag des Astronauten, wenn die Zentripetalbeschleunigung einen Betrag von 7,0g besitzt?
(b) Wie viele Umdrehungen pro Minute braucht man, um eine solche Beschleunigung zu erhalten?
(c) Wie groß ist die Periode der Bewegung?

1.106 Ein Karussell auf einem Jahrmarkt rotiert mit einer konstanten Geschwindigkeit um eine vertikale Achse. Ein Fahrgast, der sich am äußeren Rand des Karussells befindet, besitzt einen konstanten Geschwindigkeitsbetrag von 3,66 m/s. Erläutern Sie für jede der folgenden Momentaufnahmen, wie weit und in welche Richtung der Fahrgast vom Mittelpunkt des Karussells entfernt ist

(a) Der Fahrgast unterliegt einer Beschleunigung von 1,83 m/s^2 nach Osten.
(b) Der Fahrgast unterliegt einer Beschleunigung von 1,83 m/s^2 nach Süden.

1.107

(a) Wie groß ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung, die ein Objekt am Äquator aufgrund der Erddrehung besitzt?
(b) Wie groß müsste die Periode der Erddrehung sein, damit ein Objekt am Äquator einer Zentripetalbeschleunigung mit einem Betrag von 9,8 m/s^2 unterliegt?

1.108 Der französische Schnellzug TGV (*Train á Grande Vitesse*) fährt auf einer älteren Strecke eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 216 km/h.

(a) Wenn der Zug mit diesem Geschwindigkeitsbetrag um eine Kurve fährt und der Betrag der Beschleunigung, der die Passagiere unterliegen dürfen, auf $0{,}050g$ begrenzt ist, welcher minimale Kurvenradius ist dann gerade noch erlaubt?
(b) Mit welchem Geschwindigkeitsbetrag muss der Zug eine Kurve von 1,00 km Radius durchfahren, um die vorgegebene Beschleunigungsgrenze zu erreichen?

1.109 Ein Riesenrad besitze einen Radius von 15 m und drehe sich in einer Minute fünfmal um seine horizontale Achse.

(a) Wie groß ist die Periode der Bewegung? Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung eines Fahrgasts
(b) im höchsten Punkt und
(c) im tiefsten Punkt, wenn man davon ausgeht, dass der Fahrgast sich am Ende des 15 m langen Radius befindet?

1.110 Wenn ein großer Stern zu einer *Supernova* wird, kann sein Kern dabei so stark komprimiert werden, dass er einen *Neutronenstern* mit einem Radius von etwa 20 km bildet (was ungefähr der Größe von San Francisco entspricht). Wenn ein Neutronenstern mit einer Umdrehung pro Sekunde rotiert (viele Neutronensterne rotieren sogar noch deutlich schneller),

(a) wie groß ist dann der Geschwindigkeitsbetrag eines Teilchens auf seinem Äquator und
(b) wie groß ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung?
(c) Wenn der Neutronenstern schneller rotiert, nehmen die Antworten auf die Teilfragen (a) und (b) zu, nehmen sie ab oder bleiben sie gleich?

1.111 Ein Junge schleudert einen Stein an einer Schnur in einem horizontalen Kreis mit Radius 1,5 m in einer Höhe von 2,0 m über dem ebenen Erdboden. Die Schnur reißt und der Stein fliegt in horizontaler Richtung davon. Er trifft auf dem Boden auf, nachdem er eine horizontale Entfernung von 10,0 m zurückgelegt hat. Wie groß ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung des Steins während der Kreisbewegung?

1.112 Ein Teilchen P bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einem Kreis mit Radius $r = 3{,}00$ m (Abb. Ü1.A112). Es durchläuft den Kreis einmal in 20,0 s. Zum Zeitpunkt $t = 0$ kommt das Teilchen am Ursprung O des verwendeten Koordinatensystems vorbei. Bestimmen Sie den Ortsvektor des Teilchens relativ zu O zu den folgenden Zeiten t

(a) 5,00 s,
(b) 7,50 s und
(c) 10,0 s. Drücken Sie alle Vektoren in der Betrag-Winkel-Schreibweise aus (vgl. Anhang D im Lehrbuch; der Winkel soll relativ zur positiven Richtung der x-Achse angegeben werden).
(d) Bestimmen Sie die Verschiebung des Teilchens während des 5,00 s langen Zeitintervalls vom Ende der fünften Sekunde bis zum Ende der zehnten Sekunde.
(e) Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit während dieses Zeitintervalls. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens
(f) am Anfang und
(g) am Ende dieses 5,00 s langen Intervalls. Ermitteln Sie schließlich die Beschleunigung
(h) am Anfang und
(i) am Ende des Intervalls.

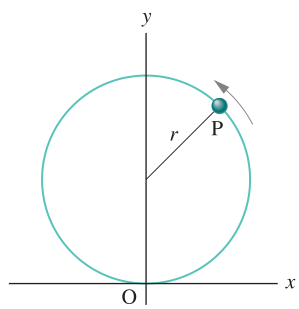


Abb. Ü1.A112

1.113 Ein Kameramann sitzt in einem Jeep, der mit 20 km/h nach Westen fährt. Er filmt einen Gepard, der sich 30 km/h schneller als der Jeep ebenfalls nach Westen bewegt. Auf einmal hält der Gepard an, dreht um und läuft mit 45 km/h nach Osten, wie ein plötzlich nervös gewordenes Mitglied der Kameracrew am Wegesrand gerade noch messen kann. Der Gepard braucht 2,0 s, um seine Geschwindigkeit zu verändern. Wie groß ist die Beschleunigung des Gepards aus Sicht

(a) des Kameramanns und
(b) des nervösen Crewmitglieds?

1.114 Ein Boot bewegt sich mit 14 km/h relativ zum Wasser eines Flusses stromaufwärts. Das Wasser fließt mit 9 km/h relativ zum Ufer.

(a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Boots relativ zum Ufer?
(b) Ein Kind läuft mit 6 km/h relativ zum Boot vom vorderen zum hinteren Ende des Boots. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Kinds relativ zum Ufer?

1.115 Eine Person erklimmt eine stehende, 15 m lange Rolltreppe in 90 s. Bewegt sich die Rolltreppe wieder, so wird die – stehende – Person in 60 s hinaufgetragen. Wie lange würde diese Person brauchen, um die sich bewegende Rolltreppe hinaufzulaufen? Hängt die Antwort von der Länge der Rolltreppe ab?

1.116 Ein Rugbyspieler darf einem seiner Teamkollegen den Ball zuwerfen, solange dieser Pass nicht „vorwärts" erfolgt (d. h., der Ball darf keine Geschwindigkeitskomponente besitzen, die parallel zur Längsseite des Spielfelds verläuft und in Richtung des Tors der gegnerischen Mannschaft zeigt). Nehmen Sie an, ein Spieler läuft mit einem Geschwindigkeitsbetrag von 4,0 m/s parallel zur Längsseite des Felds auf das gegnerische Tor zu. Dabei spielt er den Ball mit einem Geschwindigkeitsbetrag von 6,0 m/s relativ zu sich selbst einem Teamkollegen zu. Wie groß ist der kleinste Winkel relativ zur Vorwärtsrichtung, in dem der Pass gerade noch erlaubt ist?

1.117 Es schneit. Die Schneeflocken fallen mit einem konstanten Geschwindigkeitsbetrag von 8,0 m/s senkrecht nach unten. In welchem Winkel scheinen die Schneeflocken aus der Sicht eines Autofahrers zu fallen, dessen Auto mit 50 km/h eine gerade, horizontale Straße entlangfährt?

1.118 Zwei Straßen kreuzen sich wie in Abb. Ü1.A118 gezeigt. In dem dargestellten Augenblick befindet sich ein Polizeiwagen P 800 m von der Kreuzung entfernt, er bewegt sich mit 80 km/h. Ein Mann M befindet sich mit seinem Auto in 600 m Entfernung von der Kreuzung, er fährt mit 60 km/h.

(a) Wie lautet die Geschwindigkeit des Autofahrers relativ zu dem Polizeiwagen in der Einheitsvektoren-Schreibweise?
(b) Wie verläuft in dem in Abb. Ü1.A118 dargestellten Moment die Richtung der Geschwindigkeit aus (a) im Vergleich zur Sichtlinie zwischen den beiden Autos?
(c) Wenn die Autos ihre jeweiligen Geschwindigkeiten beibehalten, ändern sich die Antworten auf die Teilfragen (a) und (b), je mehr sich die Autos der Kreuzung nähern?

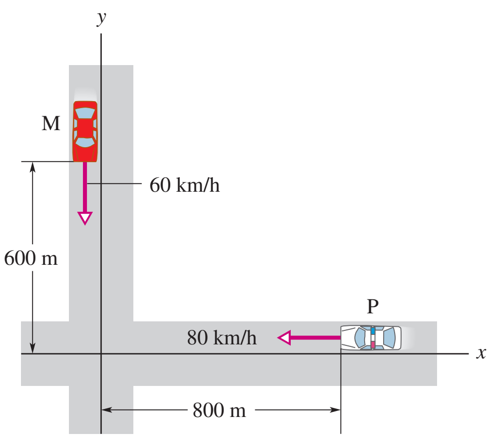


Abb. Ü1.A118

1.119 Ein Zug fährt während eines Regenschauers mit 30 m/s (relativ zum Erdboden) nach Süden. Die Regentropfen werden vom Wind ebenfalls nach Süden geblasen. Ein regungsloser Beobachter am Boden stellt fest, dass die Bahn eines jeden Regentropfens einen Winkel von 70° mit der Senkrechten bildet. Ein zweiter Beobachter, der sich im Zug befindet, sieht die Regentropfen jedoch genau senkrecht nach unten fallen. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsbetrag der Regentropfen relativ zum Erdboden.

1.120 Ein Schiff A befinde sich 4,0 km nördlich und 2,5 km östlich von Schiff B. Das Schiff A bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 22 km/h Richtung Süden, das Schiff B besitze eine Geschwindigkeit von 40 km/h in eine Richtung von 37° nördlich von Osten.

(a) Wie lautet die Geschwindigkeit von A relativ zu B? (Geben Sie Ihre Antwort anhand der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ an, wobei $\vec{e}_x$ nach Osten zeigt.)
(b) Geben Sie (anhand von $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$) die Position von A relativ zu B als Funktion von t an, wobei $t = 0$ der Moment ist, in dem sich die Schiffe in der oben beschriebenen Position befinden.
(c) Zu welchem Zeitpunkt ist der Abstand zwischen den Schiffen am geringsten?
(d) Wie groß ist dieser kleinste Abstand zwischen den Schiffen?

1.121 Zwei Schiffe A und B laufen zur selben Zeit aus dem Hafen aus. Das Schiff A fährt mit 24 Knoten nach Nordwesten, während sich das Schiff B mit 28 Knoten in eine Richtung von 40° westlich von Süden bewegt. (1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde; siehe Anhang C im Lehrbuch.)

(a) Wie lauten Betrag und Richtung der Geschwindigkeit von Schiff A relativ zu B?
(b) Nach welcher Zeit befinden sich die Schiffe in einem Abstand von 160 Seemeilen?
(c) Wie lautet die Peilung von B (die Richtung der Position von B) relativ zu A zu diesem Zeitpunkt?

1.122 Ein hölzerner Güterwagen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_1 entlang eines geraden Gleises. Ein Heckenschütze feuert aus einem Hochleistungsgewehr eine Kugel (mit Anfangsgeschwindigkeit v_2) auf den Wagen ab. Die Kugel durchschlägt beide Längsseiten des Güterwagens, wobei sich Eintritts- und die Austrittsöffnung vom Inneren des Wagens aus gesehen genau gegenüberliegen. Aus welcher Richtung relativ zu den Gleisen wurde die Kugel abgefeuert? Nehmen Sie an, dass die Kugel bei ihrem Aufprall nicht abgelenkt wurde, ihre Geschwindigkeit sich dabei jedoch um 20 % verringert hat. Es seien $v_1 = 85$ km/h und $v_2 = 650$ m/s. (Warum brauchen Sie die Breite des Güterwagens für diese Aufgabe nicht zu kennen?)

1.123 Ein 200 m breiter Fluss fließt mit einem gleichförmigen Geschwindigkeitsbetrag von 1,1 m/s durch einen Dschungel in Richtung Osten. Ein Abenteurer möchte den Fluss von einer kleinen Lichtung am südlichen Ufer aus in einem Motorboot überqueren, das sich mit einem konstanten Geschwindigkeitsbetrag von 4,0 m/s relativ zum Wasser bewegt. Am nördlichen Ufer befindet sich 82 m stromaufwärts von dem Punkt, welcher der Lichtung am Südufer direkt gegenüberliegt, eine zweite Lichtung.

(a) In welche Richtung muss das Boot zeigen, damit es sich in einer geraden Linie bewegt und genau bei der zweiten Lichtung am Nordufer ankommt?
(b) Wie lange braucht das Boot, um den Fluss zu überqueren und an der zweiten Lichtung zu landen?

1.124 Ein großer metallischer Asteroid trifft die Erde und wirft in dem Felsgestein unterhalb der Erdoberfläche einen gewaltigen Krater auf, aus dem Gesteinsbrocken nach oben und nach außen geschleudert werden. Die folgende Tabelle gibt fünf Paare von Wurfgeschwindigkeiten und -winkeln (relativ zur Horizontalen) für solche Felsbrocken an; die Angaben beruhen auf einem Modell für Kraterbildung. (Außerdem werden weitere Gesteinsbrocken mit mittleren Geschwindigkeiten und Winkeln herausgeschleudert.)

Wurf	Geschwindigkeit (m/s)	Winkel (Grad)
A	520	14,0
B	630	16,0
C	750	18,0
D	870	20,0
E	1000	22,0

Nehmen Sie an, Sie befinden sich zu dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem der Asteroid bei $x = 0$ einschlägt, am Punkt $x = 20$ km (Abb. Ü1.A124).

(a) Wie lauten die x- und y-Koordinaten der Felsen, die mit den Anfangsbedingungen A bis E in Ihre Richtung fliegen, zum Zeitpunkt $t = 20$ s?

(b) Tragen Sie diese Koordinaten auf und zeichnen Sie eine Kurve durch diese Punkte, um auch Gesteinsbrocken mit mittleren Anfangsgeschwindigkeiten und -winkeln zu erfassen. Diese Kurve sollte Ihnen eine Ahnung davon vermitteln, was Sie sehen würden, wenn Sie aufblicken und den Gesteinsschauer auf sich zukommen sehen – und davon, was die Dinosaurier vor langer Zeit während des für sie fatalen Asteroideneinschlags beobachtet haben müssen.

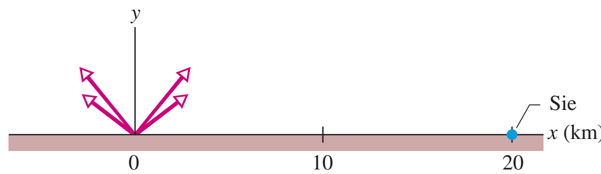


Abb. Ü1.A124

Lösungen

1.1 Nehmen wir an, dass die Horizontalgeschwindigkeit des Balls konstant ist, beträgt seine horizontale Auslenkung

$$\Delta x = v\Delta t \, ,$$

wobei Δx den horizontal zurückgelegten Abstand, Δt die Zeit und v die (horizontale) Geschwindigkeit bezeichnet.

Wandeln wir v in Meter pro Sekunde um, erhalten wir 160 km/h = 44,4 m/s. Damit ergibt sich

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{18{,}4\,\text{m}}{44{,}4\,\text{m/s}} = 0{,}414\,\text{s} \, .$$

Anmerkung: Die obige Umwandlung der Geschwindigkeitseinheiten kann man mit „elementaren Grundkenntnissen" (1000 m = 1 km, 3600 s = 1 h) nachrechnen oder in Anhang D im Lehrbuch nachschauen.

1.2 Hubers Geschwindigkeit betrug

$$v_0 = \frac{200\,\text{m}}{6{,}509\,\text{s}} = 30{,}72\,\text{m/s} = 110{,}6\,\text{km/h} \, ,$$

wobei wir den Umrechnungsfaktor 1 m/s = 3,6 km/h verwendet haben. Da Whittingham 19,0 km/h schneller war als Huber, betrug seine Geschwindigkeit $v_1 =$ (110,6 km/h + 19,0 km/h) = 129,6 km/h oder 36 m/s (1 km/h = 0,2778 m/s). Nach Gl. Ü1.2 brauchte er demzufolge für die 200 m

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_1} = \frac{200\,\text{m}}{36\,\text{m/s}} = 5{,}554\,\text{s} \, .$$

1.3 Wir verwenden die Gln. Ü1.2 und Ü1.3. Wenn die Geschwindigkeit während einer Zeit t_c konstant und positiv ist, ist der Geschwindigkeitsbetrag gleich der Geschwindigkeit, und der Abstand ist gleich der Verschiebung $\Delta x = v t_c$.

(a) Während des ersten Teils der Bewegung beträgt die Verschiebung $\Delta x_1 = 40$ km, und das Zeitintervall ist

$$t_1 = \frac{(40\,\text{km})}{(30\,\text{km/h})} = 1{,}33\,\text{h} \, .$$

Während des zweiten Teils ist die Verschiebung $\Delta x_2 =$ 40 km, und das Zeitintervall ist

$$t_2 = \frac{(40\,\text{km})}{(60\,\text{km/h})} = 0{,}67\,\text{h} \, .$$

Beide Verschiebungen finden in dieselbe Richtung statt, also ist die Gesamtverschiebung $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 =$ 40 km + 40 km = 80 km. Die Gesamtzeit für die Fahrt beträgt $t = t_1 + t_2 = 2{,}00$ h. Folglich ist die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v_{\text{gem}} = \frac{(80\,\text{km})}{(2{,}0\,\text{h})} = 40\,\text{km/h} \, .$$

(b) In diesem Beispiel ist die Effektivgeschwindigkeit gleich dem Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit, also auch 40 km/h.

(c) Wir beschreiben kurz den Graphen (natürlich mit Kilometern und Stunden): zwei aneinander angrenzende gerade Abschnitte, der erste mit einer Steigung von 30, der den Ursprung mit $(t_1, x_1) = (1{,}33{,}40)$ verbindet, und der andere mit einer Steigung von 60, der (t_1, x_1) mit $(t, x) = (2{,}00{,}80)$ verbindet. Die Durchschnittsgeschwindigkeit, vom grafischen Gesichtspunkt aus betrachtet, ist die Steigung einer Linie, die vom Ursprung zum Punkt (t, x) gezogen wird.

1.4 Wenn das Flugzeug seinen Kurs mit der Geschwindigkeit v beibehält und der Boden weiterhin mit einer Steigung von 4,3° ansteigt, dann wird die Maschine nach einer Wegstrecke

$$\Delta x = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{35\,\mathrm{m}}{\tan 4{,}3°} = 465{,}5\,\mathrm{m} \approx 0{,}465\,\mathrm{km}$$

auf dem Boden aufschlagen. Da die Geschwindigkeit konstant ist, gilt $v = v_{\mathrm{gem}}$ und wir finden nach Gl. Ü1.2 eine Flugzeit von

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{0{,}465\,\mathrm{km}}{1300\,\mathrm{km/h}} = 0{,}000\,358\,\mathrm{h} \approx 1{,}3\,\mathrm{s}\,.$$

Das entspricht ungefähr der Zeit, die dem Piloten bleibt, um seinen Kurs zu korrigieren.

1.5

(a) Wir bezeichnen die Reisedauer mit T und die Strecke von San Antonio nach Houston mit D. Dann gilt für die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{eff},1} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{T}} = \frac{(55\,\mathrm{km/h})(T/2) + (90\,\mathrm{km/h})(\mathrm{T}/2)}{\mathrm{T}} = 72{,}5\,\mathrm{km/h}\,,$$

gerundet sind das 73 km/h.

(b) Da für konstante Geschwindigkeit die Beziehung Zeit = Entfernung/Geschwindigkeit gilt, ist in diesem Fall

$$v_{\mathrm{eff},2} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{D}}{\frac{\mathrm{D}/2}{55\,\mathrm{km/h}} + \frac{\mathrm{D}/2}{90\,\mathrm{km/h}}} = 68{,}3\,\mathrm{km/h}\,,$$

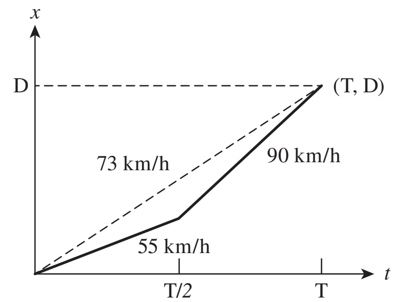
gerundet also 68 km/h.

(c) Wir dürfen die insgesamt zurückgelegte Strecke (2D) nicht mit der effektiven Verschiebung (null) verwechseln. Für den Hin- und Rückweg gilt

$$v_{\mathrm{eff}} = \frac{2\mathrm{D}}{\frac{\mathrm{D}}{72{,}5\,\mathrm{km/h}} + \frac{\mathrm{D}}{68{,}3\,\mathrm{km/h}}} = 70\,\mathrm{km/h}\,.$$

(d) Da die effektive Verschiebung null ist, ist die Durchschnittsgeschwindigkeit über die gesamte Reise berechnet ebenfalls null.

(e) Da nur eine *Skizze* gefragt war, können Sie die Entfernung D willkürlich wählen (die Absicht ist gerade *nicht*, dass sie die tatsächliche Entfernung im Atlas nachschlagen); ebenso können Sie auch T anstelle von D frei wählen, wie aus der folgenden Diskussion deutlich werden wird. Wie wollen die Grafik kurz beschreiben (alle Steigungen in km/h): Es gibt zwei aneinandergefügte Geradensegmente, von denen das erste eine Steigung von 55 besitzt und vom Ursprung zum Punkt $(t_1, x_1) = (\mathrm{T}/2, 55\,\mathrm{T}/2)$ verläuft und das zweite eine Steigung von 90 hat und vom Punkt (t_1, x_1) bis zum Punkt (T, D) mit $\mathrm{D} = (55+90)\mathrm{T}/2$ verläuft. Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht in der Grafik der Steigung der Ursprungsgeraden, die durch den Punkt (T, D) verläuft. Ihre Skizze könnte also ungefähr so aussehen (nicht maßstabsgerecht):



1.6

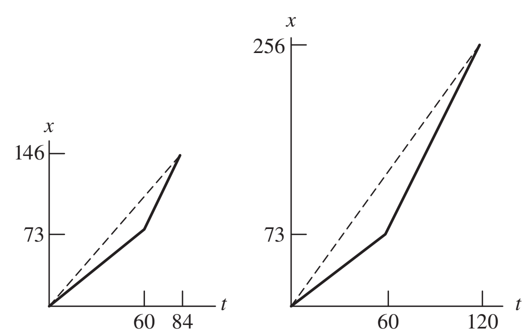
(a) Weil für konstante Geschwindigkeit gilt Zeit = Entfernung/Geschwindigkeit, ist

$$v_{\mathrm{gem}} = \frac{73{,}2\,\mathrm{m} + 73{,}2\,\mathrm{m}}{\frac{73{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}22\,\mathrm{m/s}} + \frac{73{,}2\,\mathrm{m}}{3{,}05\,\mathrm{m/s}}} = 1{,}74\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b) Da (wieder für konstante Geschwindigkeit) Entfernung = vt ist, erhalten wir

$$v_{\mathrm{gem}} = \frac{(1{,}22\,\mathrm{m/s})(60\,\mathrm{s}) + (3{,}05\,\mathrm{m/s})(60\,\mathrm{s})}{120\,\mathrm{s}} = 2{,}14\,\mathrm{m/s}\,.$$

(c) Die beiden Graphen sind unten gezeigt (Einheiten: Meter bzw. Sekunden). Der erste besteht aus zwei Geradenabschnitten (durchgezogene Linien), von denen der erste eine Steigung von 1,22 und der zweite eine von 3,05 besitzt. Die Steigung der gestrichelten Linie entspricht der Durchschnittsgeschwindigkeit (in beiden Diagrammen). Auch der zweite Graph besteht aus zwei Geradenabschnitten mit denselben Steigungen wie zuvor, allerdings ist das Zeitintervall mit der höheren Geschwindigkeit in diesem Fall viel länger als im ersten Graphen, daher ist auch die resultierende Steigung der gestrichelten Linie in diesem Fall größer.

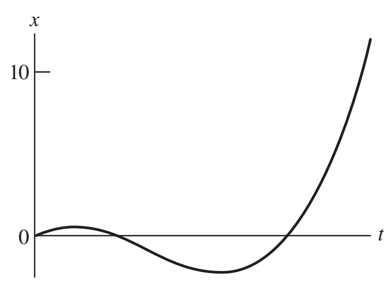


1.7 Die Verwendung von $x = 3t - 4t^2 + t^3$ (mit den jeweils passenden SI-Einheiten im Hinterkopf) ist praktisch, aber wenn wir die Einheiten explizit angeben wollten, würden wir $x = (3\,\mathrm{m/s})t - (4\,\mathrm{m/s^2})t^2 + (1\,\mathrm{m/s^3})t^3$ schreiben. In unseren Antworten werden wir eine oder zwei signifikante Stellen angeben und nicht versuchen, den Regeln für die anzugebenden signifikanten Stellen streng zu folgen.

(a) Wenn wir $t = 1\,\mathrm{s}$ einsetzen, erhalten wir $x = 0$. Für $t = 2\,\mathrm{s}$ erhalten wir $x = -2\,\mathrm{m}$. Für $t = 3\,\mathrm{s}$ erhalten wir analog $x = 0$, und für $t = 4\,\mathrm{s}$ erhalten wir $x = 12\,\mathrm{m}$. Für die spätere Verwendung bemerken wir noch, dass wir für $t = 0$ als Position $x = 0$ erhalten.
(b) Die Position bei $t = 0$ wird von der Position bei $t = 4\,\mathrm{s}$ subtrahiert, womit wir für die Verschiebung $\Delta x = 12\,\mathrm{m}$ erhalten.
(c) Die Position für $t = 2\,\mathrm{s}$ wird von der Position bei $t = 4\,\mathrm{s}$ subtrahiert, womit wir für die Verschiebung $\Delta x = 14\,\mathrm{m}$ erhalten. Gleichung Ü1.2 führt dann auf

$$v_{\mathrm{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{14\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 7\,\mathrm{m/s}\,.$$

(d) Die horizontale Achse ist die Zeitachse, wir betrachten das Intervall $0 \le t \le 4$ (in SI-Einheiten). Nicht dargestellt ist eine gerade Linie, die vom Punkt $(t, x) = (2, -2)$ zum höchsten dargestellten Punkt (bei $t = 4\,\mathrm{s}$) gezogen wird, womit die Antwort auf Teil (c) wiedergeben würde.



Wir legen die Bewegungsrichtung des Teilchens am Anfang in die $+x$-Richtung, sodass $v_0 = +18\,\mathrm{m/s}$ und $v = -30\,\mathrm{m/s}$ (für $t = 2{,}4\,\mathrm{s}$) sind. Wenn wir die Gleichungen

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{Ü1.32}$$

oder

$$v_{\mathrm{gem}} = \frac{1}{2}(v_0 + v) \tag{Ü1.33}$$

(geeignet interpretiert) verwenden, erhalten wir

$$a_{\mathrm{gem}} = \frac{(-30\,\mathrm{m/s}) - (+18\,\mathrm{m/s})}{2{,}4} = -20\,\mathrm{m/s}^2\,,$$

was zeigt, dass die Durchschnittsbeschleunigung den Betrag $20\,\mathrm{m/s}^2$ hat und in die der Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens entgegengesetzte Richtung weist.

1.8 Der Abstand zwischen den beiden Zügen verringert sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km/h}$, daher beträgt die Zeit bis zum Zusammenstoß $t = (60\,\mathrm{km})/(60\,\mathrm{km/h}) = 1{,}0\,\mathrm{h}$. In dieser Zeit legt der Vogel eine Entfernung $x = vt = (60\,\mathrm{km/h})(1{,}0\,\mathrm{h}) = 60\,\mathrm{km}$ zurück.

1.9 In Sekunden umgerechnet betragen die Laufzeiten $t_1 = 147{,}95\,\mathrm{s}$ bzw. $t_2 = 148{,}15\,\mathrm{s}$. Wenn beide Läufer gleich schnell gewesen wären, müsste gelten

$$v_{\mathrm{gem},1} = v_{\mathrm{gem},2} \quad\Rightarrow\quad \frac{L_1}{t_1} = \frac{L_2}{t_2}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$L_2 - L_1 = \left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right) L_1 = \left(\frac{148{,}15\,\mathrm{s}}{147{,}95\,\mathrm{s}} - 1\right) L_1$$
$$= 0{,}001\,35 \cdot L_1 \approx 1{,}4\,\mathrm{m}\,,$$

wobei wir im letzten Schritt $L_1 \approx 1000\,\mathrm{m}$ gesetzt haben. Nur wenn sich L_1 und L_2 um weniger als etwa $1{,}4\,\mathrm{m}$ unterscheiden, können wir also sicher sein, dass Läufer 1 tatsächlich schneller war als Läufer 2. Sollte L_1 mehr als $1{,}4\,\mathrm{m}$ kürzer sein als L_2, dann war in Wirklichkeit Läufer 2 der schnellere.

1.10 Diese Aufgabe lösen wir mithilfe von

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{Ü1.34}$$

und denken uns bei den Rechenschritten immer die eigentlich erforderlichen SI-Einheiten mit.

(a) Die Geschwindigkeit des Teilchens ist

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4 - 12t + 3t^2) = -12 + 6t\,.$$

Zur Zeit $t = 1\,\mathrm{s}$ beträgt die Geschwindigkeit also

$$v = (-12 + 6 \cdot 1) = -6\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b) Da $v < 0$ ist, bewegt es sich zur Zeit $t = 1\,\mathrm{s}$ in die negative x-Richtung.
(c) Zur Zeit $t = 1\,\mathrm{s}$ ist der Betrag der Geschwindigkeit $|v| = 6\,\mathrm{m/s}$.
(d) Für $0 < t < 2\,\mathrm{s}$ nimmt $|v|$ bis auf den Wert null ab. Für $2 < t < 3\,\mathrm{s}$ nimmt $|v|$ von null bis auf den Wert aus Teil (c) zu. $|v|$ ist dann größer als im Intervall $t > 3\,\mathrm{s}$.
(e) Ja, weil v sich stetig von negativen Werten (z. B. für $t = 1\,\mathrm{s}$) zu positiven Werten verändert (für $t \to +\infty$ gilt $v \to +\infty$). Die Überprüfung ergibt, dass die Geschwindigkeit für $t = 2\,\mathrm{s}$ null wird.
(f) Nein. Aus $v = -12 + 6t$ folgt, dass für $t > 2\,\mathrm{s}$ stets $v > 0$ gilt.

1.11 Wir verwenden Gl. Ü1.2 für die Durchschnitts- und Gl. Ü1.34 für die Momentangeschwindigkeit und setzen Entfernungen in Zentimetern und Zeiten in Sekunden ein.

(a) Wir setzen $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$ und $t = 3{,}00\,\mathrm{s}$ in die angegebene Gleichung ein und erhalten $x_2 = 21{,}75\,\mathrm{cm}$ sowie $x_3 = 50{,}25\,\mathrm{cm}$. Die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $2{,}00 \le t \le 3{,}00\,\mathrm{s}$ ist damit

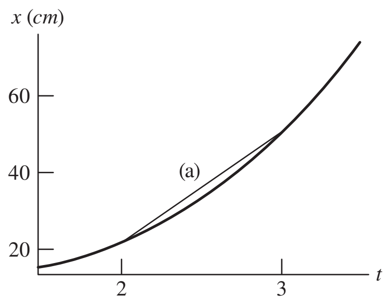
$$v_{\mathrm{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50{,}25\,\mathrm{cm} - 21{,}75\,\mathrm{cm}}{3{,}00\,\mathrm{s} - 2{,}00\,\mathrm{s}}$$

oder $v_{\mathrm{gem}} = 28{,}5\,\mathrm{cm/s}$.
(b) Für die Momentangeschwindigkeit gilt $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 4{,}5t^2$, was zur Zeit $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$ auf $v = (4{,}5)(2{,}00)^2 = 18{,}0\,\mathrm{cm/s}$ führt.

(c) Zur Zeit $t = 3{,}00$ s beträgt die Momentangeschwindigkeit $v = (4{,}5)(3{,}00)^2 = 40{,}5$ cm/s.
(d) Zur Zeit $t = 2{,}50$ s beträgt die Momentangeschwindigkeit $v = (4{,}5)(2{,}50)^2 = 28{,}1$ cm/s.
(e) Für den Zeitpunkt t_m, zu dem das Teilchen sich in der Mitte zwischen x_2 und x_3 befindet, also bei $x_\mathrm{m} = (x_2 + x_3)/2 = 36$ cm, gilt

$$x_\mathrm{m} = 9{,}75 + 1{,}5t_\mathrm{m}^3 \quad \Rightarrow \quad t_\mathrm{m} = 2{,}596\,\mathrm{s}\,.$$

Die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist $v = 4{,}5(2{,}596)^2 = 30{,}3$ cm/s.
(f) Die Antwort auf Teil (a) ergibt sich aus der Steigung der Geraden durch die Stellen $t = 2$ und $t = 3$ auf dem Graphen der Funktion $x(t)$. Die Antworten auf die Teile (b)–(e) ergeben sich aus den Steigungen der Tangenten (nicht gezeichnet) an die Kurve an den jeweiligen Punkten.



1.12 Aus $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ (Gl. Ü1.34) folgt $\Delta x = \int v\,\mathrm{d}t$, was der Fläche unter dem Graphen der Funktion $v(t)$ entspricht. Wenn wir die Gesamtfläche A in rechteckige (Fläche = Basis · Höhe) und dreieckige (Fläche = 1/2 Basis · Höhe) Flächen unterteilen, erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= A_{0<t<2} + A_{2<t<10} + A_{10<t<12} + A_{12<t<16} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8 + 8\cdot 8 + \left(2\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\right) + 4\cdot 4 \end{aligned}$$

(alles in SI-Einheiten). Daraus ergibt sich $\Delta x = 100$ m.

1.13 STARTPUNKT Bei dieser Aufgabe aus der eindimensionalen Kinematik bekommen wir die Geschwindigkeiten eines Teilchens zu zwei Zeitpunkten vorgegeben und sollen seine mittlere Beschleunigung im dazwischen liegenden Intervall berechnen.

ANSATZ Wir wählen die anfängliche Bewegungsrichtung des Teilchens als positive x-Richtung. Die mittlere Beschleunigung in einem Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ erhalten wir aus Gl. Ü1.32

$$a_\mathrm{gem} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}\,.$$

RECHNUNG Es gilt $v_1 = +18$ m/s zur Zeit $t_1 = 0$ und $v_2 = -30$ m/s zur Zeit $t_2 = 2{,}4$ s. Mithilfe von Gl. Ü1.32 erhalten wir

$$\begin{aligned} a_\mathrm{gem} &= \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(-30\,\mathrm{m/s}) - (+1\,\mathrm{m/s})}{2{,}4\,\mathrm{s} - 0} \\ &= -20\,\mathrm{m/s^2}\,. \end{aligned}$$

AUFGEPASST Die mittlere Beschleunigung besitzt den Betrag 20 m/s^2 und ist der anfänglichen Bewegungsrichtung des Teilchens entgegengerichtet. Das ist auch plausibel, weil die Geschwindigkeit des Teilchens sich im angegebenen Zeitintervall verringert. Mit $t_1 = 0$ können wir die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion der Zeit wie folgt schreiben

$$v = v_0 + at = (18\,\mathrm{m/s}) - (20\,\mathrm{m/s^2})t\,.$$

1.14 Wir verwenden Gl. Ü1.2 (mittlere Geschwindigkeit) und Gl. Ü1.32 (mittlere Beschleunigung). Wir wählen den Ursprung als anfängliche Position des Teilchens und seine Bewegungsrichtung im Intervall 5 min $\leq t \leq$ 10 min als die positive x-Richtung. Weiterhin verwenden wir die Tatsache, dass $\Delta x = v\Delta t'$ ist, sofern die Geschwindigkeit im Zeitintervall $\Delta t'$ konstant ist.

(a) Das gesamte betrachtete Zeitintervall ist $\Delta t = 8$ min $-$ 2 min = 6 min oder 360 s, wobei das Intervall, in dem der Mann sich *bewegt*, nur $\Delta t' = 8$ min $-$ 5 min = 3 min = 180 s dauert. Seine Position zur Zeit $t = 2$ min ist $x = 0$ und seine Position zur Zeit $t = 8$ min ist $x = v\Delta t' = (2{,}2\,\mathrm{m})(180\,\mathrm{m}) = 396$ m. Folglich ist

$$v_\mathrm{gem} = \frac{396\,\mathrm{m} - 0}{360\,\mathrm{s}} = 1{,}10\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b) Zur Zeit $t = 2$ min bewegt der Mann sich nicht; zur Zeit $t = 8$ min besitzt er die Geschwindigkeit $v = +2{,}2$ m/s. Also ist (wenn wir die Antwort auf drei signifikante Ziffern runden)

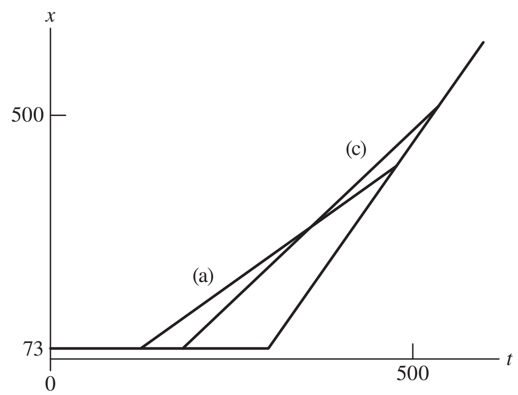
$$a_\mathrm{gem} = \frac{2{,}2\,\mathrm{m/s} - 0}{360\,\mathrm{s}} = 0{,}006\,11\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

(c) Das gesamte betrachtete Zeitintervall ist jetzt $\Delta t = 9$ min $-$ 3 min = 6 min(360 s), aber das Zeitintervall, in dem er sich bewegt, ist $\Delta t' = 9$ min $-$ 5 min = 4 min = 240 s. Seine Position zur Zeit $t = 3$ min ist $x = 0$; seine Position zur Zeit $t = 9$ min ist $x = v\Delta t' = (2{,}2\,\mathrm{m})(240\,\mathrm{m}) = 528$ m. Folglich ist

$$v_\mathrm{gem} = \frac{528\,\mathrm{m} - 0}{360\,\mathrm{s}} = 1{,}47\,\mathrm{m/s}\,.$$

(d) Zur Zeit $t = 3$ min bewegt der Mann sich nicht; zur Zeit $t = 9$ min besitzt er die Geschwindigkeit $v = +2{,}2$ m/s. Folglich ist $a_\mathrm{gem} = 2{,}2/360 = 0{,}006\,11$ m/s^2, genau wie in Teil (b).
(e) Die horizontale Linie in der Skizze beschreibt, wie der Mann für $0 \leq t < 300$ s bei $x = 0$ steht. Die linear ansteigenden Linien für $300 \leq t \leq 600$ s beschreiben seine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in den Fällen (a) und (c). Die Steigungen dieser Geraden liefern die gesuchten Geschwindigkeiten.
Die Auftragung von v gegen t ist hier nicht gezeigt; sie bestünde aus zwei horizontalen Plateaus (eines bei $v = 0$ für $0 \leq t < 300$ s und das zweite bei $v = 2{,}2$ m/s für $300 \leq t \leq 600$ s). Die mittleren Beschleunigungen

aus den Teilen (b) und (d) würden sich aus den Steigungen der Linien ergeben, welche die Geschwindigkeit bei $t = 0$ und bei $t = 600\,\mathrm{s}$ miteinander verbinden.



1.15 Wir verwenden die Bezeichnung $x(t)$ für den Wert von x zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Also ist $x(t) = 50t + 10t^2$ mit den passenden SI-Einheiten Meter und Sekunde immer im Hinterkopf.

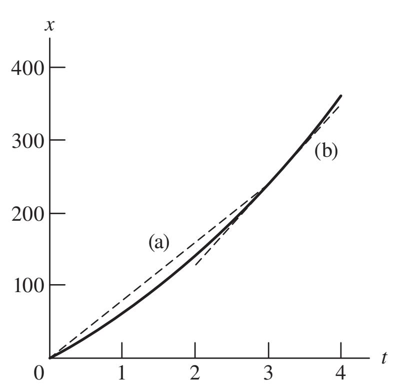
(a) Die Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 3 s ist gegeben durch

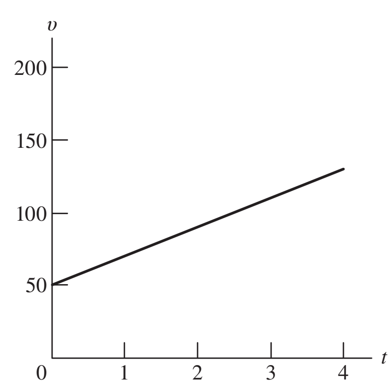
$$v_{\mathrm{gem}} = \frac{x(3) - x(0)}{\Delta t} = \frac{(50)(3) + (10)(3)^2 - 0}{3} = 80\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b) Die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t ist gegeben durch $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 50 + 20t$ in SI-Einheiten. Bei $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$ ist $v = 50 + (20)(3{,}0) = 110\,\mathrm{m/s}$.

(c) Die Momentanbeschleunigung zur Zeit t ist gegeben durch $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 20\,\mathrm{m/s^2}$. Sie ist konstant, also ist die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt $20\,\mathrm{m/s^2}$.

(d) und (e) Die untenstehenden Graphen zeigen die Koordinate x und die Geschwindigkeit v als Funktionen der Zeit, natürlich in SI-Einheiten. Die gestrichelte Linie mit der Bezeichnung (a) im ersten Graphen verläuft von $t = 0$, $x = 0$ nach $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$, $x = 240\,\mathrm{m}$. Ihre Steigung ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 3 s der Bewegung. Die gestrichelte Linie (b) verläuft tangential zur $x(t)$-Kurve bei $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$. Ihre Steigung ist die Momentangeschwindigkeit bei $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$.





1.16 Mithilfe der allgemeinen Beziehung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{bx} = b \cdot \mathrm{e}^{bx}$ erhalten wir

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}(16t)}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-t} + (16t) \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{d}t}\right)\,.$$

Um das Problem zu vermeiden, dass das Argument der Exponentialfunktion $(-t)$ hier offensichtlich dimensionsbehaftet ist, können wir einen expliziten Faktor $1/T$ mit $T = 1\,\mathrm{s}$ einführen und in der Rechnung mitführen (was keinen Einfluss auf die Antwort hat). Das Ergebnis der Differenziation ist

$$v = 16(1 - t)\mathrm{e}^{-t}\,,$$

wobei t und v in SI-Einheiten anzugeben sind (s bzw. m/s). Offensichtlich wird diese Funktion für $t = 1\,\mathrm{s}$ null. Nachdem wir nun wissen, *wann* die Bewegung endet, können wir herausfinden, *wo* dies geschieht, indem wir das Ergebnis $t = 1$ in die angegebene Funktion $x = 16t \cdot \mathrm{e}^{-t}$ einsetzen (x in m). So erhalten wir $x = 5{,}9\,\mathrm{m}$.

1.17 Wir verwenden die Bezeichnung $x(t)$ für den Wert von x zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Die Bezeichnungen $v(t)$ und $a(t)$ haben entsprechende Bedeutungen.

(a) Da die Einheit von ct^2 die einer Länge ist, muss die Einheit von c die Dimension Länge/Zeit^2 haben, also im SI $\mathrm{m/s^2}$ sein. Da bt^3 die Einheit einer Länge hat, muss die Einheit von b die Dimension Länge/Zeit^3 haben, also $\mathrm{m/s^3}$ sein.

(b) Wenn das Teilchen seine maximale (oder seine minimale) Koordinate erreicht, ist seine Geschwindigkeit null. Da die Geschwindigkeit durch $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 2ct - 3bt^2$ gegeben ist, tritt $v = 0$ ein für $t = 0$ und für

$$t = \frac{2c}{3b} = \frac{2(3{,}0\,\mathrm{m/s^2})}{3(2{,}0\,\mathrm{m/s^3})} = 1{,}0\,\mathrm{s}\,.$$

Für $t = 0$ ist $x = x_0 = 0$ und für $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ ist $x = 1{,}0\,\mathrm{m} > x_0$. Da wir das Maximum suchen, verwerfen wir die erste Nullstelle ($t = 0$) und akzeptieren die zweite ($t = 1\,\mathrm{s}$).

(c) In den ersten 4 s bewegt sich das Teilchen vom Ursprung zur Stelle $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$, kehrt um und bewegt sich zurück zu

$$x(4\,\mathrm{s}) = (3{,}0\,\mathrm{m/s^2})(4{,}0\,\mathrm{s})^2 - (2{,}0\,\mathrm{m/s^3})(4{,}0\,\mathrm{s})^3 = -80\,\mathrm{m}\,.$$

Die gesamte Weglänge, die es zurücklegt, ist $1{,}0\,\mathrm{m} + 1{,}0\,\mathrm{m} + 80\,\mathrm{m} = 82\,\mathrm{m}$.

(d) Seine Verschiebung ist gegeben durch $\Delta x = x_2 - x_1$, wobei $x_1 = 0$ und $x_2 = -80\,\mathrm{m}$ sind. Also erhalten wir $\Delta x = -80\,\mathrm{m}$.

(e) Die Geschwindigkeit ist gegeben durch $v = 2ct - 3bt^2 = (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})t - (6{,}0\,\mathrm{m/s^3})t^2$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} v(1\,\mathrm{s}) &= (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})(1{,}0\,\mathrm{s}) - (6{,}0\,\mathrm{m/s^3})(1{,}0\,\mathrm{s})^2 \\ &= 0\,, \\ v(2\,\mathrm{s}) &= (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})(2{,}0\,\mathrm{s}) - (6{,}0\,\mathrm{m/s^3})(2{,}0\,\mathrm{s})^2 \\ &= -12\,\mathrm{m/s}\,, \\ v(3\,\mathrm{s}) &= (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})(3{,}0\,\mathrm{s}) - (6{,}0\,\mathrm{m/s^3})(3{,}0\,\mathrm{s})^2 \\ &= -36{,}0\,\mathrm{m/s}\,, \\ v(4\,\mathrm{s}) &= (6{,}0\,\mathrm{m/s^2})(4{,}0\,\mathrm{s}) - (6{,}0\,\mathrm{m/s^3})(4{,}0\,\mathrm{s})^2 \\ &= -72\,\mathrm{m/s}\,. \end{aligned}$$

(f) Die Beschleunigung ist gegeben durch $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 2c - 6b = 6{,}0\,\mathrm{m/s^2} - (12{,}0\,\mathrm{m/s^3})t$. Also erhalten wir

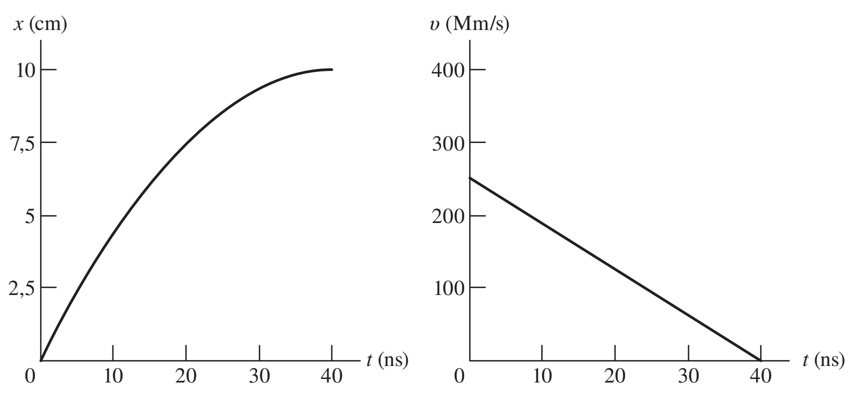
$$\begin{aligned} a(1\,\mathrm{s}) &= 6{,}0\,\mathrm{m/s^2} - (12{,}0\,\mathrm{m/s^3})(1{,}0\,\mathrm{s}) = -6{,}0\,\mathrm{m/s^2}\,, \\ a(2\,\mathrm{s}) &= 6{,}0\,\mathrm{m/s^2} - (12{,}0\,\mathrm{m/s^3})(2{,}0\,\mathrm{s}) = -18\,\mathrm{m/s^2}\,, \\ a(3\,\mathrm{s}) &= 6{,}0\,\mathrm{m/s^2} - (12{,}0\,\mathrm{m/s^3})(3{,}0\,\mathrm{s}) = -30\,\mathrm{m/s^2}\,, \\ a(4\,\mathrm{s}) &= 6{,}0\,\mathrm{m/s^2} - (12{,}0\,\mathrm{m/s^3})(4{,}0\,\mathrm{s}) = -42\,\mathrm{m/s^2}\,. \end{aligned}$$

1.18 Für das Auto ist $\Delta v = 55 - 25 = 30\,\mathrm{km/h}$, was wir wie folgt in SI-Einheiten umrechnen

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(30\,\mathrm{km/h})\left(\frac{1000\,\mathrm{m/km}}{3600\,\mathrm{s/h}}\right)}{(0{,}50\,\mathrm{min})(60\,\mathrm{s/min})} = 0{,}28\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Die Änderung der Geschwindigkeit des Fahrrads in derselben Zeit ist genauso groß wie die des Autos, somit ist seine Beschleunigung ebenfalls $0{,}28\,\mathrm{m/s^2}$.

1.19 Die Bedingung für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung erlaubt die Verwendung von Tab. 1.1 im Lehrbuch.



(a) Setzen wir $v = 0$ und $x_0 = 0$ in $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, so erhalten wir

$$x = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(5{,}00\cdot 10^6\,\mathrm{m/s})^2}{-1{,}25\cdot 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}100\,\mathrm{m}\,.$$

Da das Myon abgebremst wird, müssen die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigung umgekehrte Vorzeichen haben.

(b) Die Skizze zeigt die Position x (links) und die Geschwindigkeit v (rechts) des Myons von dem Augenblick, in dem es in das Feld tritt, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem es anhält. Bei der Berechnung in Teil (a) wurde kein Bezug auf t gemacht, sodass andere Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (wie $v = v_0 + at$ und $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$) verwendet wurden, um diese Graphen zu zeichnen.

1.20 Die benötigte Zeit erhalten wir aus Gl. Ü1.33 (oder, richtig angewandt, Gl. Ü1.32). Zuerst wandeln wir die Änderung der Geschwindigkeit in SI-Einheiten um

$$\Delta v = (100\,\mathrm{km/h})\left(\frac{1000\,\mathrm{m/km}}{3600\,\mathrm{s/h}}\right) = 27{,}8\,\mathrm{m/s}\,.$$

Folglich ist $\Delta t = \Delta v/a = (27{,}8\,\mathrm{m/s})/(50\,\mathrm{m/s^2}) = 0{,}556\,\mathrm{s}$.

1.21 Wir verwenden $v = v_0 + at$ mit $t = 0$ als den Zeitpunkt, wo die Geschwindigkeit gleich $+9{,}6\,\mathrm{m/s}$ beträgt.

(a) Da wir die Geschwindigkeit für eine Zeit *vor* $t = 0$ berechnen wollen, setzen wir $t = -2{,}5\,\mathrm{s}$. Also ergibt Gl. Ü1.33

$$v = (9{,}6\,\mathrm{m/s}) + (3{,}2\,\mathrm{m/s^2})(-2{,}5\,\mathrm{s}) = 1{,}6\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b) Nun ist $t = +2{,}5\,\mathrm{s}$, und wir erhalten

$$v = (9{,}6\,\mathrm{m/s}) + (3{,}2\,\mathrm{m/s^2})(2{,}5\,\mathrm{s}) = 18\,\mathrm{m/s}\,.$$

1.22 Die Kugel startet in Ruhe ($v_0 = 0$) und erreicht die angegebene Geschwindigkeit ($v = 640\,\mathrm{m/s}$), nachdem sie den Gewehrlauf mit einer Länge $\Delta x = 1{,}20\,\mathrm{m}$ durchlaufen hat; sie bewegt sich in die positive x-Richtung. Wir wenden die Gleichungen für konstante Beschleunigung aus Tab. 1.1 im Lehrbuch an, in diesem Fall $\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$. Damit erhalten wir $t = 0{,}003\,75\,\mathrm{s}$ oder $3{,}75\,\mathrm{ms}$.

1.23 Die laut Aufgabenstellung konstante Beschleunigung erlaubt die Verwendung der Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch.

(a) Wir lösen $v = v_0 + at$ nach der Zeit auf

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{\frac{1}{10}(3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = 3{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{s}\,.$$

Dies entspricht 1,2 Monaten.

(b) Wir werten $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ für $x_0 = 0$ aus. Das Ergebnis ist

$$x = \frac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(3{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{s})^2 = 4{,}7 \cdot 10^{13}\,\mathrm{m}\,.$$

1.24 Wir verwenden $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ aus Tab. 1.1 im Lehrbuch und lösen nach a auf. Der kleinste mögliche Wert von a ist dann

$$a_{\mathrm{min}} = \frac{v_2 - v_0^2}{2\Delta x_{\mathrm{max}}} = \frac{(360\,\mathrm{km/h})^2}{2(1{,}80\,\mathrm{km})} = 36\,000\,\mathrm{km/h^2}$$

oder umgerechnet $2{,}78\,\mathrm{m/s^2}$.

1.25 Die Annahme, dass die Beschleunigung konstant ist, erlaubt die Verwendung der Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch. Wir lösen $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ mit $x_0 = 0$ und $x = 0{,}010\,\mathrm{m}$ auf. Also gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(5{,}7 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s})^2 - (1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s})^2}{2(0{,}01\,\mathrm{m})} \\ &= 1{,}62 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m/s^2}\,. \end{aligned}$$

1.26 Die benötigte Beschleunigung erhalten wir aus Gl. Ü1.33 (oder, richtig angewandt, Gl. Ü1.32)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(1020\,\mathrm{km/h})\left(\frac{1000\,\mathrm{m/km}}{3600\,\mathrm{s/h}}\right)}{1{,}4\,\mathrm{s}} = 202{,}4\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Dieses Ergebnis können wir auch als Vielfaches der Erdbeschleunigung $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ ausdrücken

$$a = \left(\frac{202{,}4\,\mathrm{m/s^2}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}\right) g = 21\,g\,.$$

1.27 Als positive Richtung wählen wir die Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit des Autos (wobei wir voraussetzen, dass $a < 0$ ist, da das Auto abgebremst wird). Wir nehmen an, dass die Beschleunigung konstant ist, und verwenden Tab. 1.1 im Lehrbuch.

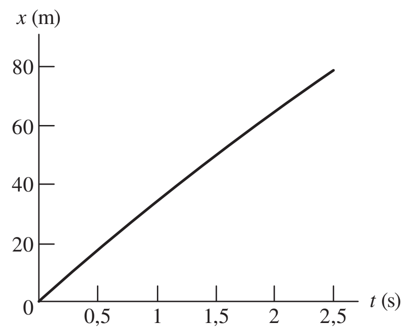
(a) Setzen wir $v_0 = 137\,\mathrm{km/h} = 38{,}1\,\mathrm{m/s}$, $v = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ und $a = -5{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ in $v = v_0 + at$ ein, so erhalten wir

$$t = \frac{25\,\mathrm{m/s} - 38\,\mathrm{m/s}}{-5{,}2\,\mathrm{m/s^2}} = 2{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

(b) Wir nehmen an, dass sich das Auto bei $x = 0$ befindet, wenn die Bremsen zum Zeitpunkt $t = 0$ betätigt werden. Also ist der Ort des Autos als Funktion der Zeit gegeben durch

$$x = (38)t + \frac{1}{2}(-5{,}2)t^2$$

(mit jeweils passenden SI-Einheiten). Der Graph dieser Funktion ist von $t = 0$ bis $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ aufgetragen. Der Graph von $v(t)$ ist hier nicht wiedergegeben; er ist eine abfallende gerade Linie von v_0 bis v.



1.28 Aus der Abbildung entnehmen wir $x_0 = -2{,}0\,\mathrm{m}$. Aus Tab. 1.1 im Lehrbuch kennen wir die Beziehung

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

in die wir einmal $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ und einmal $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$ einsetzen. So erhalten wir zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten v_0 und a

$$\begin{aligned} 0{,}0 - (-2{,}0\,\mathrm{m}) &= v_0(1{,}0\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}a(1{,}0\,\mathrm{s})^2\,, \\ 6{,}0\,\mathrm{m} - (-2{,}0\,\mathrm{m}) &= v_0(2{,}0\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}a(2{,}0\,\mathrm{s})^2\,. \end{aligned}$$

Diese lösen wir auf und erhalten $v_0 = 0$ und $a = 4{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. Die Tatsache, dass wir ein positives Resultat erhalten, zeigt uns, dass der Vektor der Beschleunigung in die positive x-Richtung zeigt.

1.29 Die Aufgabenstellung weist darauf hin, dass $a =$ konstant ist, weshalb wir Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden können.

(a) Wir setzen $x_0 = 0$, lösen Gl. Ü1.35

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(Ü1.35)}$$

nach der Beschleunigung auf und bekommen $a = 2(x - v_0 t)/t^2$. Setzen wir $x = 24{,}0\,\mathrm{m}$, $v_0 = 56{,}0\,\mathrm{km/h} = 15{,}55\,\mathrm{m/s}$ und $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$ ein, so erhalten wir

$$a = \frac{2[24{,}0\,\mathrm{m} - (15{,}55\,\mathrm{m/s})(2{,}00\,\mathrm{s})]}{(2{,}00\,\mathrm{s})^2} = -3{,}56\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Das negative Vorzeichen weist darauf hin, dass die Beschleunigung der Bewegung des Autos entgegengerichtet ist; das Auto bremst ab.

(b) Wir werten $v = v_0 + at$ folgendermaßen aus

$$v = 15{,}55\,\text{m/s} - (3{,}56\,\text{m/s}^2)(2{,}00\,\text{s}) = 8{,}43\,\text{m/s}\,,$$

was gleichbedeutend mit 30,3 km/h ist.

1.30 Wir legen den Zeitpunkt $t = 0$ auf den Moment, in dem die Bremsen ausgelöst werden. Die Beschleunigung (Verzögerung) ist konstant, sodass wir Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden können. Wir verwenden gestrichene Variablen (wie z. B. $v'_0 = 72\,\text{km/h} = 20\,\text{m/s}$) für den einen Zug (der sich in die positive x-Richtung bewegt und zur Zeit $t = 0$ am Ursprung ist) und ungestrichene Variablen für den anderen (der sich in die negative x-Richtung bewegt und sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $x_0 = +950\,\text{m}$ befindet). Wir halten fest, dass der Beschleunigungsvektor des ungestrichenen Zugs in die *positive* Richtung zeigt, obwohl der Zug abbremst. Seine anfängliche Geschwindigkeit ist $v_0 = -144\,\text{km/h} = -40\,\text{m/s}$. Da der gestrichene Zug eine geringere Anfangsgeschwindigkeit hat, würde er (wenn es nicht zur Kollision käme) früher als der andere Zug zum Stehen kommen. Nach

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \tag{Ü1.36}$$

würde das an der Position

$$x' = \frac{(v')^2 - \left(v'_0\right)^2}{2a'} = \frac{0 - (20\,\text{m/s})^2}{-2\,\text{m/s}^2} = 200\,\text{m}$$

geschehen. Die Geschwindigkeit des zweiten Zugs ist an diesem Punkt

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 + 2a\Delta x} \\ &= \sqrt{(-40\,\text{m/s})^2 + 2(1{,}0\,\text{m/s}^2)(200\,\text{m} - 950\,\text{m})} \\ &= 10\,\text{m/s}\,, \end{aligned}$$

wozu wir wiederum Gl. Ü1.36 verwendet haben. Präziser gesagt wäre seine Geschwindigkeit an diesem Punkt $-10\,\text{m/s}$, da er sich im Moment der Kollision immer noch in die negative x-Richtung bewegen würde. Wenn die Berechnung von v fehlgeschlagen wäre (was bedeuten würde, dass wir unter der Wurzel einen negativen Wert erhalten hätten), hätten wir die Möglichkeit untersuchen müssen, dass es nicht zur Kollision gekommen wäre und hätten stattdessen berechnen können, in welcher Entfernung voneinander die Züge zum Stehen gekommen wären. Man könnte sich nun noch die Frage stellen, ob der ungestrichene Zug möglicherweise kollidiert, bevor er zum Stehen kommt. Um das zu prüfen, können wir berechnen, zu welcher Zeit er zum Stehen kommt (Gl. Ü1.33 liefert hierfür $t = 20\,\text{s}$), und anschließend kontrollieren, an welcher Stelle sich der andere Zug zu diesem Zeitpunkt befindet (Gl. Ü1.6 liefert $x = 350\,\text{m}$, noch ein gutes Stück von der Stelle der Kollision entfernt).

1.31 Die Beschleunigung ist konstant und wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden.

(a) Wir legen den Koordinatenursprung in den ersten Punkt und setzen die Zeit, zu der sich das Auto dort befindet, als $t = 0$; dann wenden wir Gl. Ü1.4 (alles natürlich mit SI-Einheiten) an:

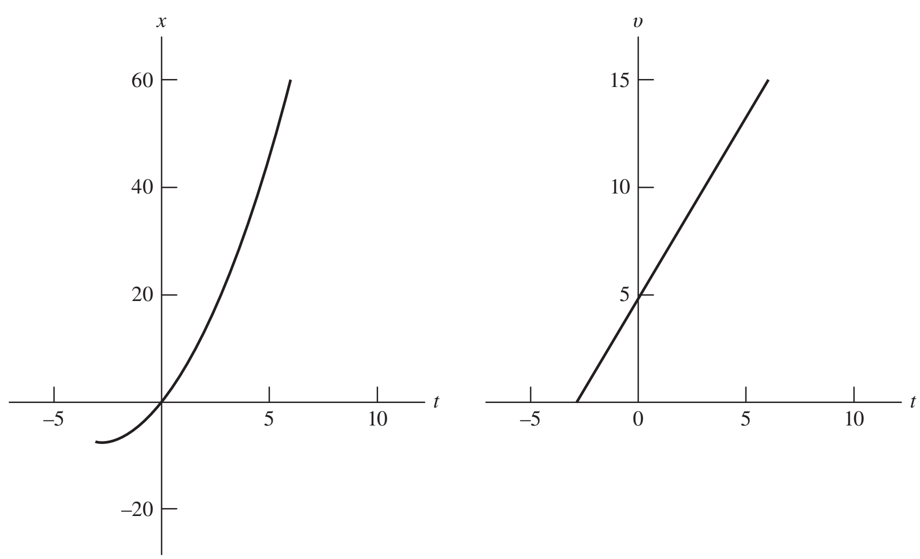
$$x = \frac{1}{2}(v + v_0)t = \frac{1}{2}(15 + v_0)(6)\,.$$

Mit $x = 60{,}0\,\text{m}$ (wodurch die Bewegungsrichtung als $+x$-Richtung festgelegt wird) lösen wir nach der Anfangsgeschwindigkeit auf: $v_0 = 5{,}00\,\text{m/s}$.

(b) Setzen wir $v = 15\,\text{m/s}$, $v_0 = 5\,\text{m/s}$ und $t = 6\,\text{s}$ in $a = (v - v_0)/t$ (Gl. Ü1.33) ein, erhalten wir $a = 1{,}67\,\text{m/s}^2$.

(c) Setzen wir $v = 0$ in $v^2 = v_0^2 + 2ax$ und lösen wir nach x auf, erhalten wir

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{5^2}{2(1{,}67)} = -7{,}50\,\text{m}\,.$$



(d) Für die Graphen müssen wir die Zeit berechnen, wenn $v = 0$ ist, wofür wir $v = v_0 + at' = 0$ verwenden

$$t' = \frac{-v_0}{a} = \frac{-5}{1{,}67} = -3{,}0\,\mathrm{s}$$

gibt den Zeitpunkt an, zu welchem das Auto hielt.

1.32 Wir bezeichnen die benötigte Zeit mit t und nehmen an, dass das Licht grün wird, wenn die Uhr null zeigt. Zu diesem Zeitpunkt müssen die von den beiden Fahrzeugen zurückgelegten Entfernungen gleich groß sein.

(a) Wenn wir die Beschleunigung des Autos mit a bezeichnen und die (konstante) Geschwindigkeit des Lastwagens mit v, dann gilt

$$\Delta x = \left(\frac{1}{2}at^2\right)_{\mathrm{Auto}} = (vt)_{\mathrm{LKW}}$$

und somit

$$t = \frac{2v}{a} = \frac{2(9{,}5\,\mathrm{m/s})}{2{,}2\,\mathrm{m/s^2}} = 8{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Folglich ist

$$\Delta x = vt = (9{,}5\,\mathrm{m/s})(8{,}6\,\mathrm{s}) = 82\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Die Geschwindigkeit des Autos ist in diesem Moment

$$v_{\mathrm{Auto}} = at = (2{,}2\,\mathrm{m/s^2})(8{,}6\,\mathrm{s}) = 19\,\mathrm{m/s}\,.$$

1.33 Wir bezeichnen die Reaktionszeit mit t_r und die Bremszeit mit t_b. Bei der Bewegung während t_r handelt es sich um eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (nennen wir sie v_0). Dann ist der Ort des Autos gegeben durch

$$x = v_0 t_\mathrm{r} + v_0 t_\mathrm{b} + \frac{1}{2}a t_\mathrm{b}^2\,,$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und a die Beschleunigung ist (von der wir erwarten, dass sie negativ ist, da wir die Geschwindigkeit in die positive Richtung legen und da wir wissen, dass das Auto abbremst). *Nachdem* die Bremsen betätigt wurden, ist die Geschwindigkeit des Autos gegeben durch $v = v_0 + at_\mathrm{b}$. Wir verwenden diese Gleichung mit $v = 0$, eliminieren t_b aus der ersten Gleichung und erhalten

$$x = v_0 t_\mathrm{r} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = v_0 t_\mathrm{r} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}\,.$$

Wir schreiben diese Gleichung für jede der Anfangsgeschwindigkeiten

$$x_1 = v_{01} t_\mathrm{r} - \frac{1}{2}\frac{v_{01}^2}{a}$$

und

$$x_2 = v_{02} t_\mathrm{r} - \frac{1}{2}\frac{v_{02}^2}{a}\,.$$

Wenn wir diese Gleichungen gleichzeitig nach t_r und a auflösen, erhalten wir

$$t_\mathrm{r} = \frac{v_{02}^2 x_1 - v_{01}^2 x_2}{v_{01} v_{02}(v_{02} - v_{01})}$$

und

$$a = -\frac{1}{2}\frac{v_{02}v_{01}^2 - v_{01}v_{02}^2}{v_{02}x_1 - v_{01}x_2}\,.$$

Setzen wir $x_1 = 56{,}7\,\mathrm{m}$, $v_{01} = 80{,}5\,\mathrm{km/h} = 22{,}4\,\mathrm{m/s}$, $x_2 = 24{,}4\,\mathrm{m}$ und $v_{02} = 48{,}3\,\mathrm{km/h} = 13{,}4\,\mathrm{m/s}$ ein, erhalten wir

$$t_\mathrm{r} = \frac{13{,}4^2(56{,}7) - 22{,}4^2(24{,}4)}{(22{,}4)(13{,}4)(13{,}4 - 22{,}4)} = 0{,}74\,\mathrm{s}$$

und

$$a = -\frac{1}{2}\frac{(13{,}4)22{,}4^2 - (22{,}4)13{,}4^2}{(13{,}4)(56{,}7) - (22{,}4)(24{,}4)} = -6{,}2\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Der *Betrag* der Beschleunigung ist daher $6{,}2\,\mathrm{m/s^2}$. Obwohl in den obigen Ersetzungen gerundete Werte angezeigt werden, sind die Werte, die wir in unsere Berechnungen eingesetzt haben, die „exakten" Werte (wie $v_{02} = \frac{161}{12}\,\mathrm{m/s}$).

1.34 Bei der Lösung dieser Aufgabe warten wir bis zum Schluss, bevor wir die Ergebnisse in SI-Einheiten umrechnen. Da eine konstante Beschleunigung vorliegt, können wir die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden. Wir beginnen mit Gl. Ü1.4 und bezeichnen die Anfangsgeschwindigkeit des Zugs mit v_Z und die Geschwindigkeit der Lokomotive mit v_L (das ist auch die Endgeschwindigkeit des Zugs, sofern die Kollision gerade noch vermieden werden kann). Die Entfernung Δx setzt sich aus dem anfänglichen Abstand D zwischen beiden und der während des Bremsmanövers von der Lokomotive zurückgelegten Entfernung $v_\mathrm{L} t$ zusammen. Folglich gilt

$$\frac{v_\mathrm{Z} + v_\mathrm{L}}{2} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{D + v_\mathrm{L} t}{t} = \frac{D}{t} + v_\mathrm{L}\,.$$

Nun verwenden wir Gl. Ü1.33, um aus dieser Beziehung die Zeit zu eliminieren. So erhalten wir

$$\frac{v_\mathrm{Z} + v_\mathrm{L}}{2} = \frac{D}{(v_\mathrm{L} - v_\mathrm{Z})/a} + v_\mathrm{L}$$

und daraus

$$a = \left(\frac{v_\mathrm{Z} + v_\mathrm{L}}{2} - v_\mathrm{L}\right)\left(\frac{v_\mathrm{L} - v_\mathrm{Z}}{D}\right) = -\frac{1}{2D}(v_\mathrm{L} - v_\mathrm{Z})^2\,.$$

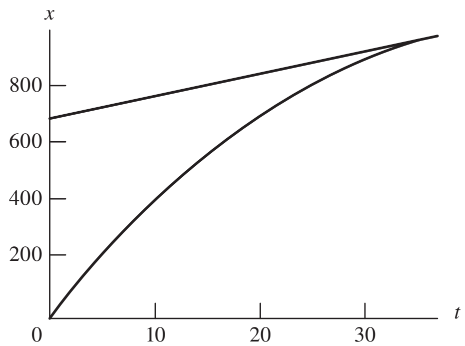
Somit folgt

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2(0{,}676\,\mathrm{km})}\left(29\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 161\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2 \\ &= -12\,888\,\mathrm{km/h^2} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a &= (-12\,888\,\mathrm{km/h^2})\left(\frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}}\right)^2 \\ &= -0{,}994\,\mathrm{m/s^2}\,. \end{aligned}$$

Der erforderliche *Betrag* der Beschleunigung ist also $|a| = 0{,}994\,\mathrm{m/s^2}$. Die Grafik zeigt den Graphen von $x(t)$ für den Fall einer gerade noch vermiedenen Kollision (x in m auf der vertikalen Achse, t in s auf der horizontalen Achse). Die obere (gerade) Linie zeigt die Bewegung der Lokomotive, die untere Kurve die Bewegung des Zugs.



Der alternative Fall (in dem die Kollision nicht vermieden wird) sieht ähnlich aus, nur dass die Steigung der unteren Kurve an dem Punkt, an dem sich beide Linien treffen, größer als die der oberen geraden Linie wäre.

1.35 Wir nehmen an, dass für die Zeitintervalle der Beschleunigung (Dauer t_1) bzw. Verzögerung (Dauer t_2) jeweils eine konstante Beschleunigung a gilt, sodass wir Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden können. Wenn wir die Bewegungsrichtung als $+x$-Richtung wählen, ist $a_1 = +1{,}22\,\mathrm{m/s^2}$ und $a_2 = -1{,}22\,\mathrm{m/s^2}$. Wir verwenden SI-Einheiten; die Geschwindigkeit zur Zeit $t = t_1$ ist daher $v = 305/60 = 5{,}08\,\mathrm{m/s}$.

(a) Wir bezeichnen die im Zeitintervall t_1 zurückgelegte Entfernung als Δx und verwenden Gl. Ü1.36

$$v^2 = v_0^2 + 2a_1\Delta x$$
$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(5{,}08\,\mathrm{m/s})^2}{2(1{,}22\,\mathrm{m/s^2})} = 10{,}59\,\mathrm{m} \approx 10{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Mithilfe von Gl. Ü1.33 erhalten wir

$$t_1 = \frac{v - v_0}{a_1} = \frac{5{,}08\,\mathrm{m/s}}{1{,}22\,\mathrm{m/s^2}} = 4{,}17\,\mathrm{s}\,.$$

Die Zeit t_2 für die Verzögerung erweist sich als gleich groß, sodass $t_1 + t_2 = 8{,}33\,\mathrm{s}$ ist. Auch die während t_1 bzw. t_2 zurückgelegten Entfernungen sind gleich, sodass ihre Summe $2(10{,}59\,\mathrm{m}) = 21{,}18\,\mathrm{m}$ beträgt. Mit anderen Worten, der Aufzug legt eine Entfernung von $190\,\mathrm{m} - 21{,}18\,\mathrm{m} = 168{,}82\,\mathrm{m}$ mit konstanter Geschwindigkeit zurück. Dafür benötigt er

$$t_3 = \frac{168{,}82\,\mathrm{m}}{5{,}08\,\mathrm{m/s}} = 33{,}21\,\mathrm{s}\,.$$

Die Gesamtzeit für die Fahrt ist folglich $8{,}33\,\mathrm{s} + 33{,}21\,\mathrm{s} \approx 41{,}5\,\mathrm{s}$.

1.36 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand, was rechtfertigt, dass wir für die Dauer des Falls $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ ansetzen (womit wir gleichzeitig *abwärts* als die $-y$-Richtung festsetzen). Dies ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung, was die Verwendung von Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) rechtfertigt.

(a) Wir verwenden Gl. Ü1.36 und nehmen die negative Wurzel (weil die Endgeschwindigkeit nach unten zeigt); damit folgt

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y} \\ &= -\sqrt{0 - 2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(-1700\,\mathrm{m})} \\ &= -183\,\mathrm{m/s}\,. \end{aligned}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist also $183\,\mathrm{m/s}$.

(b) Nein, aber ohne genauere Analyse ist das schwierig zu begründen. Die Masse eines Regentropfens beträgt sicherlich ein Gramm oder weniger, sodass sowohl seine Masse als auch – gemäß Teil (a) – seine Geschwindigkeit auf jeden Fall kleiner als die einer typischen Kugel sind, was zweifellos eine gute Nachricht ist. Allerdings haben wir es im Ernstfall immer mit *vielen* Regentropfen zu tun, was zu dem Schluss führen könnte, dass doch ein gewisses Risiko besteht. Zum Glück bessert sich die Situation entscheidend, wenn wir den Luftwiderstand berücksichtigen, der die Endgeschwindigkeit der Tropfen auf ein verträgliches Maß beschränkt – was sich ja auch mit unserer Erfahrung deckt.

1.37 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand, was rechtfertigt, dass wir für die Dauer des Falls $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ ansetzen (womit wir gleichzeitig *abwärts* als die $-y$-Richtung festsetzen). Dies ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung, was die Verwendung von Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) rechtfertigt.

(a) Starten wir die Uhr in dem Augenblick, in dem der Schraubenschlüssel fallen gelassen wird ($v_0 = 0$), dann führt $v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y$ zu

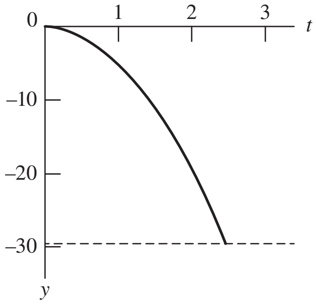
$$\Delta y = -\frac{(-24\,\mathrm{m/s})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})} = -29{,}4\,\mathrm{m}\,,$$

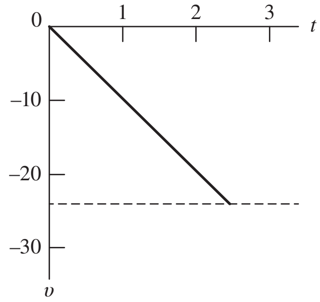
sodass er eine Höhe von 29,4 m fällt.

(b) Lösen wir $v = v_0 - gt$ nach der Zeit auf, erhalten wir

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{0 - (-24\,\mathrm{m/s})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = 2{,}45\,\mathrm{s}\,.$$

(c) In den Graphen wurden SI-Einheiten verwendet, und die Anfangsposition wurde in den Koordinatenursprung gelegt. Der (nicht gezeigte) Graph der Beschleunigung ist eine horizontale Linie bei $-9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.





1.38 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand, was rechtfertigt, dass wir für die Dauer des Falls $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ ansetzen (womit wir gleichzeitig *abwärts* als die $-y$-Richtung festsetzen). Dies ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung, was die Verwendung von Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) rechtfertigt.

(a) Es gilt $\Delta y = y - y_0 = -30\,\mathrm{m}$. Wir verwenden Gl. Ü1.35 und die „Mitternachtsformel" für die Lösung quadratischer Gleichungen aus Anhang D im Lehrbuch, um t zu berechnen

$$\Delta y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y}}{g} .$$

Dies führt (mit $v_0 = -12\,\mathrm{m/s}$, weil die Bewegung nach unten erfolgt) unter Verwendung der positiven Wurzel (damit $t > 0$ wird) zu dem Ergebnis

$$t = \frac{-12\,\mathrm{m/s} + \sqrt{(-12\,\mathrm{m/s})^2 - 2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(-30\,\mathrm{m})}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = 1{,}54\,\mathrm{s} .$$

(b) Wir haben jetzt so viele Informationen, dass wir eine beliebige Gleichung aus Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden können, um v zu bestimmen; die einzige Gleichung, die unser Ergebnis aus Teil (a) *nicht* benutzt, ist jedoch Gl. Ü1.36

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y} = 27{,}1\,\mathrm{m/s} .$$

Wir haben hier wieder die positive Wurzel gewählt, damit wir den Betrag der Geschwindigkeit erhalten.

1.39 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand für die Dauer der Bewegung (zwischen „Start" und „Landung"), also ist $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ („abwärts" legen wir in die $-y$-Richtung). Wir verwenden die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx), weil es sich um eine Bewegung mit $a = \text{const.}$ handelt.

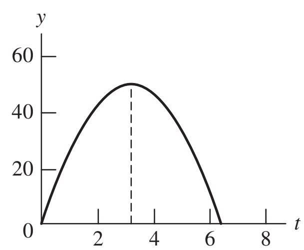
(a) Am höchsten Punkt verschwindet die Geschwindigkeit des Balls. Wir setzen $y_0 = 0$, setzen $v = 0$ in $v^2 = v_0^2 - 2gy$ ein und lösen nach der Anfangsgeschwindigkeit auf: $v_0 = \sqrt{2gy}$. Wegen $y = 50\,\mathrm{m}$ erhalten wir $v_0 = 31\,\mathrm{m/s}$.

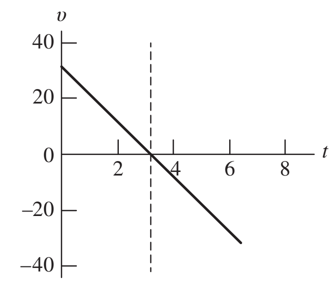
(b) Er befindet sich vom Zeitpunkt, in dem er den Boden verlässt, bis zu der Zeit, da er auf den Boden zurückkehrt ($y = 0$), in der Luft. Indem wir Gl. Ü1.35 auf die gesamte Bewegung (den Aufstieg und den Fall mit einer Gesamtzeit $t > 0$) anwenden, erhalten wir

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{g} ,$$

was unter Verwendung unseres Ergebnisses in Teil (a) auf $t = 6{,}4\,\mathrm{s}$ führt. Man kann dies auch erhalten, ohne das Ergebnis aus Teil (a) zu verwenden, indem man die Zeit nur für den Anstieg (vom Boden zum höchsten Punkt) aus Gl. Ü1.36 berechnet und sie dann verdoppelt.

(c) In den wiedergegebenen Graphen für x und v werden natürlich SI-Einheiten verwendet. Der nicht dargestellte Graph von a ist eine horizontale Linie bei $-9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.





1.40 Es gibt in diesem Fall keinen Luftwiderstand, sodass wir mit hoher Genauigkeit $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ setzen können („abwärts" legen wir in die $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch verwenden (mit Δy statt Δx), weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt; wir werden sogar dann, wenn die Beschleunigung sich verändert (während des Auffangens der Kapsel) wieder von einer konstanten Beschleunigung ausgehen, die wir dann als $a_2 = +25g = 245\,\mathrm{m/s^2}$ ansetzen.

(a) Die Falldauer ist durch Gl. Ü1.35 mit $v_0 = 0$ und $y = 0$ gegeben, also

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(145\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} = 5{,}44\,\mathrm{s} .$$

(b) Die Endgeschwindigkeit im freien Fall (die gleich der Anfangsgeschwindigkeit für das Auffangen ist) erhalten wir aus Gl. Ü1.36 (wir könnten auch andere Gleichungen verwenden, aber diese würden sich auf unser Ergebnis aus Teil (a) stützen)

$$v = -\sqrt{v_0^2 - 2g(y - y_0)} = -\sqrt{2gy_0} = -53{,}3\,\mathrm{m/s} .$$

Wir haben hier die negative Wurzel genommen, weil es sich um eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit handelt; ihr Betrag ist somit $|v| = 53{,}3\,\mathrm{m/s}$.

(c) Für den Vorgang des Auffangens übernimmt die in Teil (b) ermittelte Geschwindigkeit die Rolle der Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = -53{,}3\,\mathrm{m/s}$); die Endgeschwindigkeit muss null sein. Mithilfe von Gl. Ü1.36 erhalten wir

$$\Delta y_2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_2} = \frac{-(-53{,}3\,\mathrm{m/s})^2}{2(245\,\mathrm{m/s^2})} = -5{,}80\,\mathrm{m}$$

oder $|\Delta y_2| = 5{,}8\,\text{m}$. Der negative Wert zeigt, dass die Bewegung während des Auffangens weiterhin nach unten gerichtet ist.

1.41 Legen wir die $+y$-Richtung nach *unten* und setzen $y_0 = 0$, erhalten wir $y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, woraus (mit $v_0 = 0$) $t = \sqrt{2y/g}$ folgt.

(a) Für diesen Teil der Bewegung ist $y = 50\,\text{m}$, sodass folgt

$$t = \sqrt{\frac{2(50\,\text{m})}{9{,}8\,\text{m/s}^2}} = 3{,}2\,\text{s}\,.$$

(b) Für diesen Teil der Bewegung bemerken wir, dass die Gesamtverschiebung $y = 100\,\text{m}$ ist. Daher ist die Gesamtzeit

$$t = \sqrt{\frac{2(100\,\text{m})}{9{,}8\,\text{m/s}^2}} = 4{,}5\,\text{s}\,.$$

Der Unterschied zwischen diesem Wert und der Antwort zu Teil (a) ist die Zeit, die benötigt wird, um durch den zweiten 50-m-Abschnitt zu fallen: $4{,}5\,\text{s} - 3{,}2\,\text{s} = 1{,}3\,\text{s}$.

1.42 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand für die Dauer der Bewegung und setzen $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Wir wählen das Bodenniveau als $y = 0$.

(a) Mit $y_0 = h$ und $-v_0$ anstelle von v_0 liefert Gl. Ü1.36

$$v = \sqrt{(-v_0)^2 - 2g(y - y_0)} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

Hier verwenden wir die positive Wurzel, weil wir nur am Betrag der vektoriellen Geschwindigkeit interessiert sind.

(b) Mit der Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen lösen wir Gl. Ü1.35 nach t auf (wobei wieder $-v_0$ anstelle von v_0 zu verwenden ist)

$$\Delta y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{-v_0 + \sqrt{(-v_0)^2 - 2g\Delta y}}{g}\,.$$

Wir haben hier die positive Wurzel benutzt, um $t > 0$ zu erhalten. Mit $y = 0$ und $y_0 = h$ bekommen wir daraus

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g}\,.$$

(c) Wenn der Ball mit derselben Geschwindigkeit aus einer Höhe h nach oben geworfen würde, würde er (unter Vernachlässigung der Luftreibung) wieder mit derselben (jetzt nach unten gerichteten) Geschwindigkeit auf der Höhe h ankommen und folglich auch mit derselben Endgeschwindigkeit wie in Teil (a) den Boden erreichen. Eine sehr wichtige andere Blickweise auf diese Situation wird später im Buch diskutiert (im Zusammenhang mit der Erhaltung der Energie).

(d) Die Bewegung nach oben vor dem Fall erfordert mehr Zeit als in Teil (b). Der Rechnung ist sehr ähnlich, nur müssen wir jetzt $+v_0$ in die Gleichung einsetzen, wo wir in Teil (b) $-v_0$ eingesetzt hatten. So gelangen wir zu

$$\Delta y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y}}{g}\,,$$

wo wir wieder die positive Wurzel nehmen, um $t > 0$ zu erhalten. Mit $y = 0$ und $y_0 = h$ ergibt das

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} + v_0}{g}\,.$$

1.43 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand, was rechtfertigt, dass wir $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (womit wir *abwärts* als die $-y$-Richtung festsetzen) für die Dauer der Bewegung ansetzen. Wir dürfen Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Das Bodenniveau legen wir in den Ursprung der y-Achse.

(a) Verwenden wir $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ mit $y = 0{,}544\,\text{m}$ und $t = 0{,}200\,\text{s}$, so erhalten wir

$$v_0 = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{0{,}544\,\text{m} + \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)(0{,}200\,\text{s})^2}{0{,}200\,\text{s}}$$
$$= 3{,}70\,\text{m/s}\,.$$

(b) Die Geschwindigkeit bei $y = 0{,}544\,\text{m}$ ist

$$v = v_0 - gt = 3{,}70\,\text{m/s} - (9{,}8\,\text{m/s}^2)(0{,}200\,\text{s})$$
$$= 1{,}74\,\text{m/s}\,.$$

(c) Wir verwenden $v^2 = v_0^2 - 2gy$ (mit anderen Werten für y und v als vorher) und lösen nach dem Wert für y, der zur größten Höhe gehört (wo $v = 0$ ist), auf

$$y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(3{,}7\,\text{m/s})^2}{2(9{,}8\,\text{m/s}^2)} = 0{,}698\,\text{m}\,.$$

Also springt das Gürteltier $0{,}698 - 0{,}544 = 0{,}154\,\text{m}$ hoch.

1.44 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand für die Dauer der Bewegung und setzen $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy anstelle von Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Die Höhe des Bodens wählen wir als

Nullpunkt unserer y-Achse. Die gesamte Falldauer berechnen wir mithilfe von Gl. Ü1.35

$$\Delta y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y}}{g} \,,$$

wo wir die positive Wurzel wählen. Mit $y = 0$, $v_0 = 0$ und $y_0 = h = 60\,\mathrm{m}$ erhalten wir so

$$t = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}5\,\mathrm{s} \,.$$

Der Zeitpunkt 1,2 s vor Erreichen des Bodens bedeutet also, dass wir $t = 2{,}3\,\mathrm{s}$ setzen müssen. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich der Stein bei

$$y - h = v_0(2{,}3\,\mathrm{s}) - \frac{1}{2} g (2{,}3\,\mathrm{s})^2 \quad \Rightarrow \quad y = 34\,\mathrm{m} \,.$$

1.45 Die Geschwindigkeit des Boots ist konstant, gegeben durch $v_\mathrm{B} = d/t$. Dabei sind d der Abstand des Boots von der Brücke, wenn der Schlüssel fallen gelassen wird (12 m), und t die Zeit, die der Schlüssel für den Fall benötigt. Um t zu berechnen, legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt, wo der Schlüssel fallen gelassen wird, und die positive y-Achse in die *Abwärts*richtung. Wir setzen als Zeit null den Augenblick, wo der Schlüssel fallen gelassen wird, und berechnen die Zeit t, wenn $y = 45\,\mathrm{m}$ ist. Da die Anfangsgeschwindigkeit des Schlüssels null ist, ist die Koordinate des Schlüssels $y = \frac{1}{2} g t^2$. Also ist

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(45\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} = 3{,}03\,\mathrm{s} \,.$$

Die Geschwindigkeit des Boots beträgt also

$$v_\mathrm{B} = \frac{12\,\mathrm{m}}{3{,}03\,\mathrm{s}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s} \,.$$

1.46 Wir lassen $+y$ nach oben zeigen; somit sind $y_0 = 36{,}6\,\mathrm{m}$ und $y = 12{,}2\,\mathrm{m}$. Mithilfe von Gl. Ü1.6 erhalten wir dann für $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$

$$y - y_0 = vt + \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad v = -22{,}0\,\mathrm{m/s} \,.$$

Da wir uns nur für den Betrag der Geschwindigkeit interessieren, ist die Antwort $|v| = 22{,}0\,\mathrm{m/s}$.

1.47 Zuerst bestimmen wir die Geschwindigkeit der Kugel, kurz bevor sie den Boden berührt. Während des Kontakts mit dem Boden ist ihre Durchschnittsbeschleunigung gegeben durch

$$a_\mathrm{gem} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \,,$$

wobei Δv die Änderung ihrer Geschwindigkeit während des Kontakts mit dem Boden und $\Delta t = 20{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$ die Dauer des Kontakts bezeichnen. Nun bestimmen wir die Geschwindigkeit direkt *vor* dem Kontakt. Wir legen den Ursprung in den Punkt, wo die Kugel fallen gelassen wird (und lassen $+y$ nach oben weisen) und setzen $t = 0$, wenn sie fallen gelassen wird. Die Kugel trifft den Boden bei $y = -15{,}0\,\mathrm{m}$. Ihre dortige Geschwindigkeit wird aus Gl. Ü1.36 bestimmt: $v^2 = -2gy$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{-2gy} = -\sqrt{-2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(-15{,}0\,\mathrm{m})} \\ &= -17{,}1\,\mathrm{m/s} \,, \end{aligned}$$

wobei das negative Vorzeichen gewählt wurde, weil sich die Kugel im Moment des Kontakts nach unten bewegt. Folglich ist die Durchschnittsbeschleunigung während des Kontakts mit dem Boden

$$a_\mathrm{gem} = \frac{0 - (-17{,}1\,\mathrm{m/s})}{20{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 857\,\mathrm{m/s^2} \,.$$

Die Tatsache, dass das Ergebnis positiv ist, weist darauf hin, dass dieser Beschleunigungsvektor nach oben zeigt. In einem späteren Kapitel wird dies direkt mit dem Betrag und der Richtung der Kraft in Beziehung gesetzt werden, die der Boden während des Aufpralls auf die Kugel ausübt.

1.48 Die Durchschnittsbeschleunigung während des Kontakts mit dem Boden ist gegeben durch $a_\mathrm{gem} = (v_2 - v_1)/\Delta t$, wobei v_1 die Geschwindigkeit des Balls, direkt bevor er auf dem Boden aufprallt, v_2 seine Geschwindigkeit, gerade wenn er den Boden verlässt, und Δt die Dauer des Kontakts mit dem Boden bezeichnen ($12 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$). Wir lassen die y-Achse in die positive Richtung nach oben weisen und legen den Ursprung in den Punkt, wo der Tennisball fallen gelassen wird. Wir bestimmen zuerst die Geschwindigkeit, direkt bevor er auf dem Boden auftrifft, indem wir $v_1^2 = v_0^2 - 2gy$ verwenden. Mit $v_0 = 0$ und $y = -4{,}00\,\mathrm{m}$ ist das Ergebnis

$$\begin{aligned} v_1 &= -\sqrt{-2gy} = -\sqrt{-2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(-4{,}00\,\mathrm{m})} \\ &= -8{,}85\,\mathrm{m/s} \,, \end{aligned}$$

wobei die negative Wurzel gewählt wurde, weil sich der Ball nach unten bewegt. Für die Geschwindigkeit, direkt nachdem der Ball auf den Boden aufgeschlagen ist (wenn er ohne Luftreibung bis zu einer Höhe von 2,00 m abprallt), verwenden wir $v^2 = v_2^2 - 2g(y - y_0)$ mit $v = 0$, $y = -2{,}00\,\mathrm{m}$ (er bleibt zwei Meter *unterhalb* der Höhe, aus der er ursprünglich fallen gelassen wird) und $y_0 = -4{,}00\,\mathrm{m}$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2g(y - y_0)} \\ &= \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(-2{,}00\,\mathrm{m} + 4{,}00\,\mathrm{m})} \\ &= 6{,}26\,\mathrm{m/s} \,, \end{aligned}$$

Folglich beträgt die Durchschnittsbeschleunigung

$$\begin{aligned} a_\mathrm{gem} &= \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{6{,}26\,\mathrm{m/s} + 8{,}85\,\mathrm{m/s}}{12{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} \\ &= 1{,}26 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2} \,. \end{aligned}$$

Das positive Ergebnis deutet darauf hin, dass der Beschleunigungsvektor nach oben zeigt. In einem späteren Kapitel wird dies direkt mit dem Betrag und der Richtung der Kraft in Beziehung gesetzt werden, die der Boden während des Aufpralls auf die Kugel ausübt.

1.49 Der Spieler erreicht eine Höhe von $y = 0{,}76\,\mathrm{m}$ (wir legen den Nullpunkt der y-Achse auf den Boden und lassen die $+y$-Richtung nach oben zeigen).

(a) Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Spielers ist

$$v_0 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(0{,}76\,\mathrm{m})} = 3{,}86\,\mathrm{m/s}\,,$$

wie sich aus Gl. Ü1.36 mit verschwindender Geschwindigkeit v ergibt. In dem Moment, in dem der Spieler die Höhe $y_1 = 0{,}76\,\mathrm{m} - 0{,}15\,\mathrm{m} = 0{,}61\,\mathrm{m}$ erreicht, muss seine Geschwindigkeit v_1 die Bedingung $v_0^2 - v_1^2 = 2gy_1$ erfüllen. Damit folgt

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{v_0^2 - 2gy_1} \\ &= \sqrt{(3{,}86\,\mathrm{m/s})^2 - 2(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(0{,}61\,\mathrm{m})} \\ &= 1{,}71\,\mathrm{m/s}\,. \end{aligned}$$

Die Zeit t_1, in der sich der Spieler in den oberen $\Delta y_1 = 0{,}15\,\mathrm{m}$ seines Sprungs weiter nach oben bewegt, können wir jetzt aus Gl. Ü1.4 berechnen

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{1}{2}(v_1 + v)t_1 \\ \Rightarrow\quad t_1 &= \frac{2(0{,}15\,\mathrm{m})}{1{,}71\,\mathrm{m/s} + 0} = 0{,}175\,\mathrm{s}\,. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass er sich insgesamt für eine Dauer von $2(0{,}175\,\mathrm{s}) = 0{,}35\,\mathrm{s} = 350\,\mathrm{ms}$ innerhalb dieser obersten 15 cm aufhält (erst in der Aufwärts- und dann in der Abwärtsbewegung).

(b) Den Zeitpunkt t_2, an dem der Spieler eine Höhe von 0,15 m erreicht, erhalten wir aus Gl. Ü1.35

$$0{,}15\,\mathrm{m} = v_0 t_2 - \frac{1}{2}g t_2^2 = (3{,}86\,\mathrm{m/s})t_2 - \frac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})t_2^2\,.$$

Daraus folgt (mithilfe der Formel für quadratische Gleichungen, in der wir die kleinere der beiden positiven Wurzeln verwenden) $t_2 = 0{,}041\,\mathrm{s} = 41\,\mathrm{ms}$. Das bedeutet, dass er sich insgesamt für eine Dauer von $2(41\,\mathrm{ms}) = 82\,\mathrm{ms}$ innerhalb dieser untersten 15 cm aufhält (einmal in der Aufwärts- und einmal in der Abwärtsbewegung).

1.50 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand und setzen $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Wir wählen das Bodenniveau als Nullpunkt der y-Achse.

(a) Wir setzen den Moment, in dem der erste Tropfen den Duschkopf verlässt, als $t = 0$. Den Zeitpunkt t_1, an dem er den Boden erreicht, berechnen wir mit $v_0 = 0$ und $y_1 = -2{,}00\,\mathrm{m}$ aus Gl. Ü1.35

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}g t_1^2 \\ \Rightarrow\quad t_1 &= \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-2{,}00\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} = 0{,}639\,\mathrm{s}\,. \end{aligned}$$

In diesem Moment beginnt der vierte Tropfen zu fallen, und wegen der Regelmäßigkeit des Tropfvorgangs müssen Tropfen 2 den Duschkopf zum Zeitpunkt $t = 0{,}639/3 = 0{,}213\,\mathrm{s}$ und Tropfen 3 zum Zeitpunkt $t = 2(0{,}213\,\mathrm{s}) = 0{,}426\,\mathrm{s}$ verlassen haben. Die Dauer des freien Falls von Tropfen 2 bis zu dem Moment, in dem Tropfen 1 aufschlägt, ist folglich $t_2 = t_1 - 0{,}213\,\mathrm{s} = 0{,}426\,\mathrm{s}$. In dem Moment, in dem Tropfen 1 am Boden aufschlägt, befindet er sich bei

$$y_2 = -\frac{1}{2}g t_2^2 = -\frac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(0{,}426\,\mathrm{s})^2 = -0{,}889\,\mathrm{m}\,,$$

also etwa 89 cm unterhalb des Duschkopfs.

(b) Die Dauer des freien Falls von Tropfen 3 bis zu dem Moment, in dem Tropfen 1 aufschlägt, ist $t_3 = t_1 - 0{,}426\,\mathrm{s} = 0{,}213\,\mathrm{s}$. In dem Moment, in dem Tropfen 1 am Boden aufschlägt, befindet er sich bei

$$y_3 = -\frac{1}{2}g t_3^2 = -\frac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(0{,}213\,\mathrm{s})^2 = -0{,}222\,\mathrm{m}\,,$$

also etwa 22 cm unterhalb des Duschkopfs.

1.51 Die Grafik zeigt, dass der höchste Punkt der Flugkurve (an dem die Geschwindigkeit für einen Moment null wird) bei $y = 25\,\mathrm{m}$ liegt. Aufgrund der Symmetrie der Kurve ist es sicherlich zulässig, die Luftreibung (oder welche Reibung auch immer auf diesem Planeten vorliegen könnte) zu vernachlässigen.

(a) Um die Gravitationsbeschleunigung g_P auf diesem Planeten zu bestimmen, verwenden wir wieder Gl. Ü1.35 (mit $+y$ als Aufwärtsrichtung)

$$\begin{aligned} y - y_0 &= vt + \frac{1}{2}g_\mathrm{P} t^2 \\ \Rightarrow\quad 25\,\mathrm{m} - 0 &= (0)(2{,}5\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}g_\mathrm{P}(2{,}5\,\mathrm{s})^2\,. \end{aligned}$$

Folglich ist $g_\mathrm{P} = 8{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.

(b) Das Maximum der Flugkurve kann uns helfen, die Anfangsgeschwindigkeit des Balls zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{1}{2}(v_0 + v)t \\ \Rightarrow\quad 25\,\mathrm{m} - 0 &= \frac{1}{2}(v_0 + 0)(2{,}5\,\mathrm{s}) \end{aligned}$$

und folglich $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$.

1.52 Lassen wir $+y$ nach oben weisen und legen wir den Ursprung in den Punkt, von dem aus die Diamanten fallen gelassen werden, dann ist die Position von Diamant 1 gegeben durch $y_1 = -\frac{1}{2}gt^2$, und die Position von Diamant 2 ist gegeben durch $y_2 = -\frac{1}{2}g(t-1)^2$. Wir starten die Uhr, wenn der erste Diamant fallen gelassen wird. Gesucht ist die Zeit, zu der $y_2 - y_1 = 10$ m ist. Daher erhalten wir

$$-\frac{1}{2}g(t-1)^2 + \frac{1}{2}gt^2 = 10$$
$$\Rightarrow \quad t = (10\,\text{s}/g) + 0{,}5\,\text{s} = 1{,}5\,\text{s}\,.$$

1.53 STARTPUNKT In dieser Aufgabe untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der maximalen Flughöhe, die ein Gegenstand unter dem Einfluss der Schwerkraft erreicht, und der Gesamtdauer seines Flugs.
ANSATZ Wir vernachlässigen den Luftwiderstand und setzen $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt und setzen $y_0 = 0$.

Wenn der Ball seine maximale Höhe H erreicht, wird seine Geschwindigkeit für einen Moment null ($v = 0$). Daher hängt seine Anfangsgeschwindigkeit v_0 folgendermaßen mit H zusammen

$$0 = v^2 = v_0^2 - 2gH \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gH}\,.$$

Die Zeit, bis der Ball seine maximale Flughöhe erreicht, ist durch $v = v_0 - gt = 0$ oder $t = v_0/g = \sqrt{2H/g}$ gegeben.
RECHNUNG Wenn der Ball doppelt so lange wie zuvor in der Luft bleibt, also $t' = 2t$ gelten soll, muss die neue Maximalhöhe H' die Bedingung $t' = \sqrt{2H'/g}$ erfüllen. Dies lösen wir nach H' auf und erhalten

$$H' = \frac{1}{2}gt'^2 = \frac{1}{2}g(2t)^2 = 4\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = 4H\,.$$

AUFGEPASST Wegen $H \propto t^2$ bedeutet eine Verdopplung der Flugdauer t, dass die Flughöhe H sich vervierfachen muss. Außerdem muss die Anfangsgeschwindigkeit doppelt so groß sein wie zuvor: $v_0' = 2v_0$.

1.54 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand, was rechtfertigt, dass wir $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ für die Dauer der Bewegung ansetzen (womit wir *abwärts* als die $-y$-Richtung wählen). Wir dürfen Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Wir legen den Koordinatenursprung auf den Boden. Wir bemerken, dass die Anfangsgeschwindigkeit des Pakets die gleiche wie die des Heißluftballons ist, $v_0 = +12\,\text{m/s}$, und dass seine Anfangskoordinate $y_0 = +80\,\text{m}$ ist.

(a) Wir lösen $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ nach der Zeit auf mit $y = 0$, verwenden die Formel für die Lösung der quadratischen Gleichung (wobei wir die positive Wurzel verwenden, um einen positiven Wert für t zu erhalten). Dies ergibt dann

$$t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}$$
$$= \frac{12\,\text{m/s} + \sqrt{(12\,\text{m/s})^2 + 2(9{,}8\,\text{m/s}^2)(80\,\text{m})}}{9{,}8\,\text{m/s}^2}$$
$$= 5{,}4\,\text{s}\,.$$

(b) Wenn wir vermeiden wollen, das Ergebnis aus Teil (a) zu verwenden, können wir Gl. Ü1.36 verwenden, aber wenn dies nicht beabsichtigt ist, dann können auch andere Formeln aus Tab. 1.1 im Lehrbuch verwendet werden. Zum Beispiel führt Gl. Ü1.33 auf $v = v_0 - gt = 12\,\text{m/s} - (9{,}8\,\text{m/s}^2)(5{,}4\,\text{s}) = -41\,\text{m/s}$. Der *Geschwindigkeitsbetrag* des Pakets ist am Ende 41 m/s.

1.55

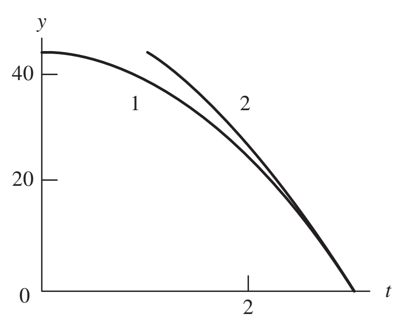
(a) Wir vernachlässigen den Luftwiderstand für die Dauer der Bewegung, setzen also $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Für den ersten Stein, dessen Anfangsgeschwindigkeit null ist, verwenden wir gestrichene Variablen (außer für t); für den zweiten Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $-v_0$ (also abwärtsgerichtet) verwenden wir ungestrichene Variablen. Wir benutzen ausschließlich SI-Einheiten. Es gilt

$$\Delta y' = 0(t) - \frac{1}{2}gt^2\,,$$
$$\Delta y = (-v_0)(t-1) - \frac{1}{2}g(t-1)^2\,.$$

Da die Aufgabenstellung $\Delta y' = \Delta y = -43{,}9\,\text{m}$ vorgibt, lösen wir die erste Gleichung nach t auf (was $t = 2{,}99\,\text{s}$ liefert) und verwenden dieses Ergebnis, um die zweite Gleichung nach der Anfangsgeschwindigkeit des zweiten Steins aufzulösen

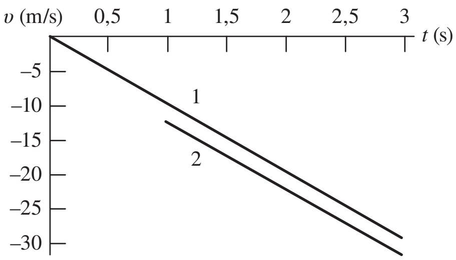
$$-43{,}9\,\text{m} = (-v_0)(1{,}99\,\text{s}) - \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)(1{,}99\,\text{s})^2\,.$$

Wir erhalten so $v_0 = 12{,}3\,\text{m/s}$.



(b) Die Geschwindigkeiten der Steine ergeben sich aus

$$v'_y = \frac{d(\Delta y')}{dt} = -gt\,,$$
$$v_y = \frac{d(\Delta y)}{dt} = -v_0 - g(t-1)\,.$$



1.56 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand, was rechtfertigt, dass wir $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ (womit wir *abwärts* als die $-y$-Richtung festlegen) für die Dauer der Bewegung des geworfenen Balls ansetzen. Wir dürfen Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy statt Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Wir verwenden gestrichene Variablen (außer t) für den Aufzug mit konstanter Geschwindigkeit (also ist $v' = 20\,\mathrm{m/s}$) und ungestrichene Variablen für den Ball (mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v' + 10 = 30\,\mathrm{m/s}$ relativ zum Erdboden). Wir verwenden durchweg SI-Einheiten.

(a) Wir setzen die Zeit in dem Augenblick null, wo der Ball geworfen wird, berechnen seine maximale Höhe y (relativ zum Boden) aus $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$, wobei der höchste Punkt durch $v = 0$ charakterisiert wird. Also ist

$$y = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 76\,\mathrm{m}\,,$$

wobei $y_0 = y_0' + 2 = 30\,\mathrm{m}$ (dabei ist $y_0' = 28\,\mathrm{m}$ in der Aufgabenstellung gegeben) und wie oben bemerkt $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$ relativ zum Boden ist.

(b) Es gibt eine Vielzahl von Vorgehensweisen für diese Frage. Eine besteht darin, weiter in dem in Teil (a) beschriebenen Bezugssystem zu arbeiten (welches den Boden als ruhend behandelt und darin den Ursprung des Koordinatensystems „festhält"); in diesem Fall beschreibt man die Bewegung des Fahrstuhls durch $y' = y_0' + v't$ und die Bewegung des Balls mit Gl. Ü1.35 und löst sie für den Fall, wo sie den gleichen Punkt zur gleichen Zeit erreichen. Eine andere Möglichkeit ist es, im Bezugssystem des Fahrstuhls zu arbeiten (der Junge im Fahrstuhl könnte die Tatsache, dass sich der Fahrstuhl bewegt, vergessen haben, da er nicht beschleunigt wird). Diese Vorgehensweise zeigen wir hier im Detail

$$\Delta y_\mathrm{F} = v_{0\mathrm{F}}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_{0\mathrm{F}} + \sqrt{v_{0\mathrm{F}}^2 - 2g\Delta y_\mathrm{F}}}{g}\,,$$

wobei $v_{0\mathrm{F}} = 20\,\mathrm{m/s}$ die Anfangsgeschwindigkeit des Balls relativ zum Fahrstuhl und $\Delta y_\mathrm{F} = -2{,}0\,\mathrm{m}$ die Verschiebung des Balls relativ zum Fahrstuhlboden bezeichnet. Die positive Wurzel wurde gewählt, um einen positiven Wert für t zu erhalten; das Ergebnis ist $t = 4{,}2\,\mathrm{s}$.

1.57 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand für die Dauer der Bewegung und setzen $a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Wir können die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (mit Δy anstelle von Δx) verwenden, weil es sich um eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung handelt. Außerdem wählen wir $y_0 = 0$.

(a) Wir wenden Gl. Ü1.36 auf beide Geschwindigkeitsmessungen an

$$v_\mathrm{B}^2 = v_0^2 - 2gy_\mathrm{B} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{2}v\right)^2 + 2g(y_\mathrm{A} + 3) = v_0^2\,,$$
$$v_\mathrm{A}^2 = v_0^2 - 2gy_\mathrm{A} \quad\Rightarrow\quad v^2 + 2gy_\mathrm{A} = v_0^2\,.$$

Nun setzen wir die beiden Ausdrücke, die jeder für sich gleich v_0^2 sind, einander gleich und erhalten so

$$\frac{1}{4}v^2 + 2gy_\mathrm{A} + 2g(3\,\mathrm{m}) = v^2 + 2gy_\mathrm{A}$$
$$\Rightarrow \quad 2g(3\,\mathrm{m}) = \frac{3}{4}v^2\,.$$

Folglich ist $v = \sqrt{2g(4\,\mathrm{m})} = 8{,}85\,\mathrm{m/s}$.

(b) Ein Gegenstand, der sich am Punkt A mit einer Geschwindigkeit $v = 8{,}85\,\mathrm{m/s}$ nach oben bewegt, wird eine maximale Höhe $y - y_\mathrm{A} = v^2/2g = 4{,}00\,\mathrm{m}$ über Punkt A erreichen (das ist wieder eine Folge von Gl. Ü1.36, in der wir jetzt die Endgeschwindigkeit am höchsten Punkt der Flugkurve auf null setzen müssen). Der Ball erreicht das Maximum seiner Flugkurve also 1,00 m oberhalb von Punkt B.

1.58 Nach dem Loslassen ($v_0 = 0$) befindet sich der Gegenstand im freien Fall ($a = -g = -9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, wenn wir „abwärts" als $-y$-Richtung wählen); wir verwenden mehrmals Gl. Ü1.35.

(a) Die (positive) Entfernung D von dem unteren Punkt bis zu der Markierung, die einer bestimmten Reaktionszeit t entspricht, ist durch $\Delta y = -D = -gt^2/2$ oder $D = gt^2/2$ gegeben. Für $t_1 = 50{,}0\,\mathrm{ms}$ ist daher

$$D_1 = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(50{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}0123\,\mathrm{m}$$
$$= 1{,}23\,\mathrm{cm}\,.$$

(b) Für $t_2 = 100\,\mathrm{ms}$ ist

$$D_2 = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(100\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}049\,\mathrm{m}$$
$$= 4D_1\,.$$

(c) Für $t_3 = 150\,\mathrm{ms}$ ist

$$D_3 = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(150\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}11\,\mathrm{m}$$
$$= 9D_1\,.$$

(d) Für $t_4 = 200\,\mathrm{ms}$ ist

$$D_4 = \frac{(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(200\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}196\,\mathrm{m}$$
$$= 16D_1\,.$$

(e) Für $t_5 = 250\,\text{ms}$ ist

$$D_5 = \frac{(9{,}8\,\text{m/s}^2)(250 \cdot 10^{-3}\,\text{s})^2}{2} = 0{,}306\,\text{m}$$
$$= 25 D_1\,.$$

1.59 Wir vernachlässigen den Luftwiderstand während des freien Falls, setzen also $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung). Die Anfangsgeschwindigkeit ist null, sodass Gl. Ü1.35 zu $\Delta y = -gt^2/2$ wird, worin Δy das Negative der durchfallenen Strecke d bedeutet. Damit können wir die Gleichung der Einfachheit halber als $d = gt^2/2$ schreiben.

(a) Die Zeit t_1, während der sich die Fallschirmspringerin im freien Fall befindet, ist nach Gl. Ü1.35

$$d_1 = 50\,\text{m} = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2) t_1^2\,.$$

Hieraus folgt $t_1 = 3{,}2\,\text{s}$. Die Geschwindigkeit der Fallschirmspringerin kurz vor dem Öffnen des Fallschirms ist durch die positive Wurzel von $v_1^2 = 2gd_1$ gegeben

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{(2)(9{,}80\,\text{m/s}^2)(50\,\text{m})} = 31\,\text{m/s}\,.$$

Wenn ihre Endgeschwindigkeit v_2 ist, dann ist das Zeitintervall t_2 zwischen dem Öffnen des Fallschirms und ihrer Ankunft am Boden

$$t_2 = \frac{v_1 - v_2}{a} = \frac{31\,\text{m/s} - 3{,}0\,\text{m/s}}{2\,\text{m/s}^2} = 14\,\text{s}\,.$$

Dieses Ergebnis folgt aus Gl. Ü1.33, wobei wir nur die *Beträge* der Geschwindigkeiten eingesetzt haben. Der Beschleunigungsvektor für diesen Teil der Bewegung ist positiv, zeigt also nach oben (entgegen der Richtung der Bewegung, es handelt sich folglich um eine Verzögerung). Die gesamte Falldauer beträgt daher $t_1 + t_2 = 17\,\text{s}$.

(b) Nach dem Öffnen des Fallschirms fällt die Fallschirmspringerin eine Strecke

$$d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a} = \frac{(31\,\text{m/s})^2 - (3{,}0\,\text{m/s})^2}{(2)(2{,}0\,\text{m/s}^2)} \approx 240\,\text{m}\,.$$

Hierfür haben wir Gl. Ü1.36 verwendet, bei der wir allerdings beide Seiten mit -1 multipliziert haben (was die negativen Werte von Δy in die positiven Werte von d auf der linken Seite verwandelt und auf der rechten Seite v_1 und v_2 vertauscht). Der Fall beginnt also auf einer Höhe $h = 50 + d \approx 290\,\text{m}$.

1.60 Die Zeit t, die der Blumentopf für den Vorbeiflug vor dem Fenster der Höhe $L = 2{,}0\,\text{m}$ benötigt, beträgt in beiden Richtungen jeweils 0,25 s. Wir bezeichnen seine Geschwindigkeit in der Aufwärtsbewegung am oberen Rand des Fensters mit v. Mit $a = -g = -9{,}8\,\text{m/s}^2$ (wir wählen „abwärts" als $-y$-Richtung) erhalten wir dann aus Gl. Ü1.6

$$L = vt - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L}{t} - \frac{1}{2}gt\,.$$

Die Höhe H, die der Blumentopf über die Oberkante des Fensters hinaus nach oben fliegt, ist demzufolge (hier verwenden wir Gl. Ü1.36, in der wir die Endgeschwindigkeit des Topfes an seinem Umkehrpunkt null setzen)

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{(L/t - gt/2)^2}{2g}$$
$$= \frac{(2{,}00\,\text{m}/0{,}25\,\text{s} - (9{,}80\,\text{m/s}^2)(0{,}25\,\text{s})/2)^2}{2(9{,}80\,\text{m/s}^2)}$$
$$= 2{,}34\,\text{m}\,.$$

1.61

(a) Nach der Gleichung

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \qquad \text{(Ü1.37)}$$

ist der Ortsvektor $\vec{r} = (-5{,}0\,\text{m})\vec{e}_x + (8{,}0\,\text{m})\vec{e}_y$.

(b) Der Betrag ist

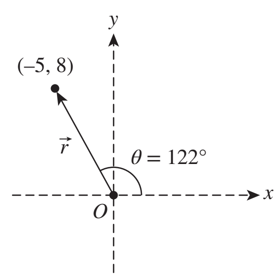
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{(-5{,}0\,\text{m})^2 + (8{,}0\,\text{m})^2 + (0\,\text{m})^2}$$
$$= 9{,}4\,\text{m}\,.$$

(c) Viele Taschenrechner haben eine Umrechnungsfunktion für Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten und umgekehrt; dieser Weg ist offensichtlich effizienter als die manuelle Umwandlung, die wir hier demonstrieren. Da der Vektor in der xy-Ebene liegt, erhalten wir mithilfe von Gl. Ü1.16

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8{,}0\,\text{m}}{-5{,}0\,\text{m}}\right) = -58^\circ \quad \text{oder} \quad 122^\circ\,,$$

wobei die zweite Alternative (122° im Gegenuhrzeigersinn von der positiven x-Achse) in unserem Fall die richtige ist, da die Vorzeichen seiner Komponenten zeigen, dass der Vektor im zweiten Quadranten liegt.

(d) Aus der Skizze ersieht man, dass der Vektor 122° im Gegenuhrzeigersinn von der $+x$-Richtung entfernt ist.



(e) Die Verschiebung ist $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$, wobei $\vec{r}$ in Teil (a) angegeben ist und $\vec{r}' = (3{,}0\,\text{m})\vec{e}_x$ ist. Folglich ist $\Delta\vec{r} = (8{,}0\,\text{m})\vec{e}_x - (8{,}0\,\text{m})\vec{e}_y$.

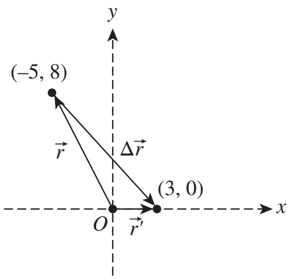
(f) Der Betrag der Verschiebung ist

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(8{,}0\,\text{m})^2 + (-8{,}0\,\text{m})^2} \approx 11{,}3\,\text{m}\,.$$

(g) Der Winkel der Verschiebung ist gemäß Gl. Ü1.16

$$\tan^{-1}\left(\frac{8{,}0\,\mathrm{m}}{-8{,}0\,\mathrm{m}}\right) = -45° \quad \text{oder} \quad 135°\,,$$

wovon wir die erste Alternative ($-45°$ im Gegenuhrzeigersinn bzw. 45° im Uhrzeigersinn von der $+x$-Achse) wählen, da die Vorzeichen seiner Komponenten zeigen, dass der Vektor im vierten Quadranten liegt (vgl. die Skizze).

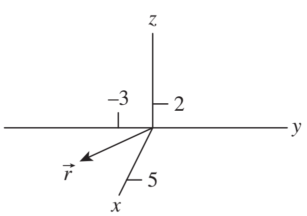


1.62

(a) Der Betrag von $\vec{r}$ ist

$$|\vec{r}| = \sqrt{(5{,}0\,\mathrm{m})^2 + (-3{,}0\,\mathrm{m})^2 + (2{,}0\,\mathrm{m})^2} = 6{,}2\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Siehe Skizze. Die Werte der Koordinaten sind in Metern angegeben.



1.63 Wir verwenden die Gleichungen

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \text{(Ü1.38)}$$

und

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z\,. \qquad \text{(Ü1.39)}$$

(a) Wir bezeichnen den anfänglichen Ortsvektor mit $\vec{r}_1$ und den späteren mit $\vec{r}_2$. Gleichung Ü1.39 liefert dann für den Verschiebungsvektor in Einheitsvektoren-Schreibweise

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= [(-2{,}0\,\mathrm{m}) - 5{,}0\,\mathrm{m}]\vec{e}_x \\ &\quad + [(6{,}0\,\mathrm{m}) - (-6{,}0\,\mathrm{m})]\vec{e}_y \\ &\quad + (2{,}0\,\mathrm{m} - 2{,}0\,\mathrm{m})\vec{e}_z \\ &= (-7{,}0\,\mathrm{m})\vec{e}_x + (12\,\mathrm{m})\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

(b) Weil die z-Komponente verschwindet (der Koeffizient von $\vec{e}_z$ ist null), liegt der Verschiebungsvektor in der xy-Ebene.

1.64 Wir legen die $+x$-Achse nach Osten und die $+y$-Achse nach oben. Die angegebenen 123° sind der Winkel zwischen der Anfangsposition und den späteren Positionen; der Winkel zwischen der $+x$-Achse und dem letzten Ortsvektor ist daher $40° + 123° = 163°$. In Einheitsvektoren-Schreibweise lauten die Ortsvektoren

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (360\,\mathrm{m})\cos(40°)\vec{e}_x + (360\,\mathrm{m})\sin(40°)\vec{e}_y \\ &= (276\,\mathrm{m})\vec{e}_x + (231\,\mathrm{m})\vec{e}_y\,, \\ \vec{r}_2 &= (790\,\mathrm{m})\cos(163°)\vec{e}_x + (790\,\mathrm{m})\sin(163°)\vec{e}_y \\ &= (-755\,\mathrm{m})\vec{e}_x + (231\,\mathrm{m})\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

Dies setzen wir in Gl. Ü1.39 ein

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= [(-755\,\mathrm{m}) - (276\,\mathrm{m})]\vec{e}_x + (231\,\mathrm{m} - 231\,\mathrm{m})\vec{e}_y \\ &= -(1031\,\mathrm{m})\vec{e}_x\,.\end{aligned}$$

Der Betrag der Verschiebung $\Delta\vec{r}$ ist $|\Delta\vec{r}| = 1031\,\mathrm{m}$. Die Richtung von $\Delta\vec{r}$ ist $-\vec{e}_x$, also nach Westen.

1.65 Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist durch

$$\vec{v}_{\mathrm{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(Ü1.40)}$$

gegeben. Die Gesamtverschiebung $\Delta\vec{r}$ ist die Summe der drei Verschiebungen, jede ist das Ergebnis einer (konstanten) Geschwindigkeit während einer gegebenen Zeit. Wir verwenden ein Koordinatensystem mit $+x$ nach Osten und $+y$ nach Norden. In Einheitsvektoren-Schreibweise ist die erste Verschiebung gegeben durch

$$\Delta\vec{r}_1 = \left(60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{40\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{min/h}}\right)\vec{e}_x = 40\vec{e}_x$$

in Kilometern. Die zweite Verschiebung hat einen Betrag von $60\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{20\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{min/h}} = 20\,\mathrm{km}$, und ihre Richtung ist 40° nördlich von Osten. Daher haben wir

$$\Delta\vec{r}_2 = 20\cos(40°)\vec{e}_x + 20\sin(40°)\vec{e}_y = 15{,}3\vec{e}_x + 12{,}9\vec{e}_y$$

in Kilometern. Und die dritte Verschiebung ist

$$\Delta\vec{r}_3 = -\left(60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)\left(\frac{50\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{min/h}}\right)\vec{e}_x = -50\vec{e}_x$$

in Kilometern. Die Gesamtverschiebung ist damit

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 \\ &= 40\vec{e}_x + 15{,}3\vec{e}_x + 12{,}9\vec{e}_y - 50\vec{e}_x \\ &= 5{,}3\vec{e}_x + 12{,}9\vec{e}_y(\mathrm{km})\,.\end{aligned}$$

Die Zeit für die Fahrt beträgt $40 + 20 + 50 = 110\,\mathrm{min}$, was 1,83 h entspricht. Gleichung Ü1.40 liefert dann

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{gem}} &= \left(\frac{5{,}3\,\mathrm{km}}{1{,}83\,\mathrm{h}}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{12{,}9\,\mathrm{km}}{1{,}83\,\mathrm{h}}\right)\vec{e}_y \\ &= 2{,}90\vec{e}_x + 7{,}01\vec{e}_y\end{aligned}$$

in Kilometer pro Stunde. Wenn man dies in Betrag und Winkel ausdrücken möchte, dann entspricht dies einem

Vektor vom Betrag $\sqrt{2{,}9^2+7{,}01^2} = 7{,}59\,\text{km/h}$, der um 67,5° nördlich von Osten geneigt ist (oder 22,5° östlich von Norden). Wenn die Einheitsvektoren-Schreibweise in dieser Aufgabe nicht im Vordergrund steht, dann kann die Berechnung auf eine Vielzahl von Wegen durchgeführt werden – insbesondere natürlich auch mit Taschenrechner oder Mathematik-Software.

1.66 Aus den Gln. Ü1.39 und Ü1.40 erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{gem}} &= \frac{(-2{,}0\,\text{m})\vec{e}_x + (8{,}0\,\text{m})\vec{e}_y - (2{,}0\,\text{m})\vec{e}_z}{10\,\text{s}} \\ &\quad + \frac{-(5{,}0\,\text{m})\vec{e}_x - (6{,}0\,\text{m})\vec{e}_y + (2{,}0\,\text{m})\vec{e}_z}{10\,\text{s}} \\ &= (-0{,}7\,\text{m/s})\vec{e}_x + (1{,}4\,\text{m/s})\vec{e}_y - (0{,}4\,\text{m/s})\vec{e}_z\,.\end{aligned}$$

1.67

(a) Gleichung Ü1.41

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Ü1.41)}$$

liefert

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(3{,}00t\vec{e}_x - 4{,}00t^2\vec{e}_y + 2{,}00\vec{e}_z\right) \\ &= (3{,}00\,\text{m/s})\vec{e}_x - (8{,}00\,\text{m/s}^2)t\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

(b) Durch Einsetzen von $t = 2{,}00\,\text{s}$ in dieses Ergebnis finden wir $\vec{v} = (3{,}00\,\text{m/s})\vec{e}_x - 16{,}0\,\text{m/s})\vec{e}_y$.

(c) Der Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 2{,}00\,\text{s}$ ist

$$\begin{aligned}v = |\vec{v}| &= \sqrt{(3{,}00\,\text{m/s})^2 + (-16{,}0\,\text{m/s})^2} \\ &= 16{,}3\,\text{m/s}\,.\end{aligned}$$

(d) Der Winkel von $\vec{v}$ ist zu diesem Zeitpunkt

$$\tan^{-1}\left(\frac{-16{,}0\,\text{m/s}}{3{,}00\,\text{m/s}}\right) = -79{,}4^\circ \quad \text{oder} \quad 101^\circ\,,$$

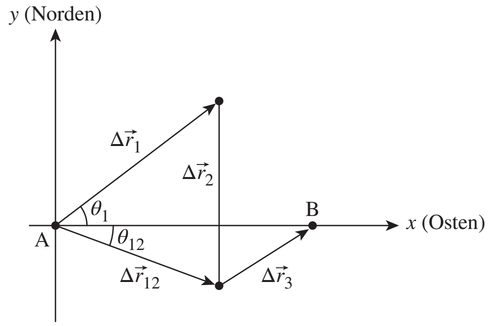
wobei wir in diesem Fall die erste Möglichkeit wählen (79,4° im Uhrzeigersinn von der $+x$-Richtung bzw. 281° im Gegenuhrzeigersinn), weil die Vorzeichen der Komponenten anzeigen, dass der Vektor im vierten Quadranten liegt.

1.68 STARTPUNKT Diese Aufgabe befasst sich mit der zweidimensionalen Kinematik eines Kamels, das sich in der Wüste von Oase A zu Oase B begibt.

ANSATZ Die Wanderung des Kamels ist in der Skizze veranschaulicht. Wir verwenden ein Standard-Koordinatensystem, in dem $+x$ nach Osten und $+y$ nach Norden zeigt. Entfernungen sind in Kilometern und Zeiten in Stunden angegeben. In Einheitsvektoren-Schreibweise lauten die Verschiebungen für die ersten beiden Abschnitte der Reise

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_1 &= (75\,\text{km})\cos(37^\circ)\vec{e}_x + (75\,\text{km})\sin(37^\circ)\vec{e}_y\,, \\ \Delta\vec{r}_2 &= (-65\,\text{km})\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

Die Gesamtverschiebung ist $\Delta\vec{r}_{12} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$. Wie aus der Skizze zu erkennen ist, braucht das Kamel noch eine dritte Verschiebung $\Delta\vec{r}_3$, um zu Oase B zu gelangen.



RECHNUNG

(a) Wir addieren die Vektoren der einzelnen Verschiebungen, um die Gesamtverschiebung des Kamels zu erhalten: $\Delta\vec{r}_{12} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 = (60\,\text{km})\vec{e}_x - (20\,\text{km})\vec{e}_y$. Ihr Betrag ist

$$|\Delta\vec{r}_{12}| = \sqrt{(60\,\text{km})^2 + (-20\,\text{km})^2} = 63\,\text{km}\,.$$

Die Richtung von $\Delta\vec{r}_{12}$ ist $\theta_{12} = \tan^{-1}(-20\,\text{km}/60\,\text{km}) = -18^\circ$ oder 18° südlich der Ostrichtung.

(b) Um die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ersten beiden Segmente der Reise zu berechnen (einschließlich der Pause), verwenden wir unser Ergebnis aus Teil (a) zusammen mit Gl. Ü1.40 und der Tatsache, dass

$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_{\text{Pause}} = 50\,\text{h} + 35\,\text{h} + 5{,}0\,\text{h} = 90\,\text{h}.$$

In Einheitsvektoren-Schreibweise ist

$$\begin{aligned}\vec{v}_{12,\text{gem}} &= \frac{(60\,\text{km})\vec{e}_x - (20\,\text{km})\vec{e}_y}{90\,\text{h}} \\ &= (0{,}67\,\text{km/h})\vec{e}_x - (0{,}22\,\text{km/h})\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

(c) Daraus folgt $|\vec{v}_{12,\text{gem}}| = 0{,}70\,\text{km/h}$.

(d) Die erforderliche Gesamtverschiebung, die das Kamel zurücklegen muss, um zu Oase B zu gelangen, ist 90 km nach Osten. Wenn wir die Verschiebung von seinem Rastplatz bis B mit $\Delta\vec{r}_3$ bezeichnen, muss also gelten

$$\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = (90\,\text{km})\vec{e}_x\,.$$

Daraus folgt in Einheitsvektoren-Schreibweise $\Delta\vec{r}_3 = (30\,\text{km})\vec{e}_x + (20\,\text{km})\vec{e}_y$ bzw. $(36, \angle 33^\circ)$ in Betrag-Winkel-Schreibweise (vgl. Anhang D im Lehrbuch). Aus Gl. Ü1.40 erhalten wir damit

$$|\vec{v}_{3,\text{gem}}| = \frac{36\,\text{km}}{120\,\text{h} - 90\,\text{h}} = 1{,}2\,\text{km/h}\,.$$

AUFGEPASST Mit einem vektorfähigen Taschenrechner können wir im Polarkoordinaten-Modus die Verschiebungen direkt addieren:

$$(75, \angle 37^\circ) + (65, \angle -90^\circ) = (63, \angle -18^\circ)\,.$$

1.69 Wir wenden die Gln. Ü1.41 und Ü1.42

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,. \qquad \text{(Ü1.42)}$$

(a) Leiten wir den Ortsvektor nach der Zeit ab, bekommen wir

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{e}_x + 4t^2\vec{e}_y + t\vec{e}_z\right) = 8t\vec{e}_y + \vec{e}_z$$

in SI-Einheiten (m/s).

(b) Nochmaliges Ableiten nach der Zeit führt auf

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(8t\vec{e}_y + \vec{e}_z) = 8\vec{e}_y$$

in SI-Einheiten (m/s^2).

1.70 Wir verwenden Gl. Ü1.43,

$$\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{(Ü1.43)}$$

wobei wir mit $\vec{v}_1$ die Anfangs- und mit $\vec{v}_2$ die Endgeschwindigkeit bezeichnen.

(a) Die mittlere Beschleunigung während $\Delta t = 4\,\mathrm{s}$ ist

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{gem}} &= \frac{(-2{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (2{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y + (5{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_z}{4\,\mathrm{s}}\\ &\quad + \frac{-(4{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (2{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y + (3{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_z}{4\,\mathrm{s}}\\ &= (-1{,}5\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_x + (0{,}5\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_z\,.\end{aligned}$$

(b) Der Betrag von $\vec{a}_{\text{gem}}$ ist

$$\sqrt{(-1{,}5\,\mathrm{m/s^2})^2 + (0{,}5\,\mathrm{m/s^2})^2} = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

(c) Der Winkel in der xz-Ebene (von der $+x$-Achse aus gemessen) ist

$$\tan^{-1}\left(\frac{0{,}5\,\mathrm{m/s^2}}{-1{,}5\,\mathrm{m/s^2}}\right) = -18^\circ \quad \text{oder} \quad 162^\circ\,,$$

wovon wir die zweite Möglichkeit wählen, weil das Vorzeichen seiner Komponenten anzeigt, dass der Vektor im zweiten Quadranten liegt.

1.71 In den Teilen (b) und (c) verwenden wir Gl. Ü1.41 sowie Gl. Ü1.42. Für Teil (d) müssen wir nur die Richtung der in Teil (b) berechneten Geschwindigkeit bestimmen, denn diese ist gerade die gesuchte Tangente. Alle Größen sind immer in den passenden SI-Einheiten gedacht.

(a) Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\vec{r}|_{t=2{,}00} &= [2{,}00(8) - 5{,}00(2)]\vec{e}_x\\ &\quad + [6{,}00 - 7{,}00(16)]\vec{e}_y\\ &= 6{,}00\vec{e}_x - 106\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

(b) Ableiten des angegebenen Ausdrucks liefert

$$\vec{v}(t) = (6{,}00t^2 - 5{,}00)\vec{e}_x - 28{,}0t^3\vec{e}_y\,,$$

wobei wir explizit $v(t)$ geschrieben haben, um die Zeitabhängigkeit zu betonen. Für $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$ wird daraus $\vec{v} = (19{,}0\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (224\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y$.

(c) Wir leiten den zuvor gefundenen Ausdruck für $\vec{v}(t)$ nach t ab und erhalten so $12{,}0t\vec{e}_x - 84{,}0t^2\vec{e}_y$ bzw. für $t = 2{,}00\,\mathrm{s}$ den Ausdruck $\vec{a} = (24{,}0\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_x - (336\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_y$.

(d) Der Winkel von $\vec{v}$ zur $+x$-Achse ist

$$\tan^{-1}\left(\frac{-224\,\mathrm{m/s}}{19{,}0\,\mathrm{m/s}}\right) = -85{,}2^\circ \quad \text{oder} \quad 94{,}8^\circ\,.$$

Wir wählen die erste Möglichkeit ($-85{,}2^\circ$ bzw. 275° im Gegenuhrzeigersinn von der $+x$-Achse aus gemessen), weil die Komponenten des Vektors anzeigen, dass er im vierten Quadranten liegt.

1.72 Für $\vec{v}_2 = 0$ erhalten wir aus Gl. Ü1.43 für die mittlere Beschleunigung

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{gem}} &= \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{0 - [(6{,}30\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (8{,}42\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y]}{3\,\mathrm{s}}\\ &= -(2{,}1\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_x + (2{,}8\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

1.73 Die konstante Beschleunigung in beide Richtungen (x und y) erlaubt uns, Tab. 1.1 im Lehrbuch für die Bewegung entlang jeder Richtung zu verwenden. Man kann dies einzeln (für Δx und Δy) oder zusammen in Einheitsvektoren-Schreibweise (für Δr) ausführen. Wo keine Einheiten angegeben sind, sind SI-Einheiten gemeint.

(a) Die Geschwindigkeit des Teilchens zu einem Zeitpunkt t ist gegeben durch $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, wobei $\vec{v}_0$ die Anfangsgeschwindigkeit und $\vec{a}$ die (konstante) Beschleunigung ist. Die x-Komponente ist $v_x = v_{0x} + a_xt = 3{,}00 - 1{,}00t$, und die y-Komponente ist $v_y = v_{0y} + a_yt = -0{,}500t$ wegen $v_{0y} = 0$. Wenn das Teilchen seine maximale x-Koordinate bei $t = t_\mathrm{m}$ erreicht, müssen wir $v_x = 0$ haben. Daher ist $3{,}00 - 1{,}00t_\mathrm{m} = 0$ oder $t_\mathrm{m} = 3{,}00\,\mathrm{s}$. Die y-Komponente der Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist $v_y = 0 - 0{,}500(3{,}00) = -1{,}50\,\mathrm{m/s}$; dies ist die einzige nichtverschwindende Komponente von $\vec{v}$ bei t_m.

(b) Weil es im Ursprung startet, sind die Koordinaten des Teilchens zu jeder Zeit t gegeben durch $\vec{r} = \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$. Bei $t = t_\mathrm{m}$ wird dies

$$\begin{aligned}&(3{,}00\vec{e}_x)(3{,}00) + \frac{1}{2}(-1{,}00\vec{e}_x - 0{,}50\vec{e}_y)(3{,}00)^2\\ &\quad = 4{,}50\vec{e}_x - 2{,}25\vec{e}_x\end{aligned}$$

in Metern.

1.74 Wir verwenden Gl. Ü1.42.

(a) In SI-Einheiten lautet die Beschleunigung als Funktion der Zeit

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(6{,}0t - 4{,}0t^2)\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y\right]\\ &= (6{,}0 - 8{,}0t)\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$ ist der Beschleunigungsvektor $[6{,}0 - 8{,}0(3{,}0)]\vec{e}_x = (-18\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_x$.

(b) Die Gleichung lautet $\vec{a} = (6{,}0-8{,}0t)\vec{e}_x = 0$; wir erhalten daher $t = 0{,}75$ s.

(c) Da die y-Komponente der Geschwindigkeit, $v_y = 8{,}0$ m/s, niemals null wird, kann auch die Geschwindigkeit als Ganzes niemals verschwinden.

(d) In SI-Einheiten ist der Betrag der Geschwindigkeit

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(6{,}0t - 4{,}0t^2)^2 + (8{,}0)^2} = 10\,.$$

Um das nach t aufzulösen, quadrieren wir zuerst beide Seiten der Gleichung und formen dann um

$$(6{,}0t-4{,}0t^2)^2+64 = 100 \quad \Rightarrow \quad (6{,}0t-4{,}0t^2)^2 = 36\,.$$

Nun ziehen wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel und erhalten eine quadratische Gleichung in t: $6{,}0t - 4{,}0t^2 = \pm 6{,}0 \quad \Rightarrow \quad 4{,}0t^2 - 6{,}0t \pm 6{,}0 = 0$, die wir nach der üblichen Methode lösen können (vgl. Anhang D im Lehrbuch): $t = \frac{6{,}0\pm\sqrt{36-4(4{,}0)(\pm 6{,}0)}}{2(8{,}0)}$. Die Anforderung, dass wir ein reelles, positives Resultat benötigen, führt zu der eindeutigen Lösung $t = 2{,}2$ s.

1.75 STARTPUNKT Wir untersuchen ein Teilchen, das sich unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung in der Ebene bewegt. Da die x- und y-Komponenten der Beschleunigung konstant sind, können wir die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch für die Bewegung entlang beider Achsen verwenden.

ANSATZ Mit $\vec{r}_0 = 0$ sind Ort und Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion der Zeit durch $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ bzw. $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ gegeben. Im Folgenden werden durchgängig SI-Einheiten angenommen.

RECHNUNG

(a) Mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (8{,}0\,\text{m/s})\vec{e}_y$ und der Beschleunigung $\vec{a} = (4{,}0\,\text{m/s}^2)\vec{e}_x + (2{,}0\,\text{m/s}^2)\vec{e}_y$ lautet der Ortsvektor des Teilchens als Funktion der Zeit

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2\\ &= (8{,}0\vec{e}_y)t + \frac{1}{2}(4{,}0\vec{e}_x + 2{,}0\vec{e}_y)t^2\\ &= (2{,}0t^2)\vec{e}_x + (8{,}0t + 1{,}0t^2)\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

Die Zeit, die der Position $x = 29$ m entspricht, finden wir folglich einfach durch Lösen der Gleichung $2{,}0t^2 = 29$, woraus $t = 3{,}8$ s folgt. Die y-Koordinate ist zu diesem Zeitpunkt

$$v = (8{,}0\,\text{m/s})(3{,}8\,\text{s}) + (1{,}0\,\text{m/s}^2)(3{,}8\,\text{s})^2 = 45\,\text{m}\,.$$

(b) Die Geschwindigkeit des Teilchens ist durch $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ gegeben. Folglich ist die Geschwindigkeit bei $t = 3{,}8$ s

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2\\ &= (8{,}0\vec{e}_y)t + \frac{1}{2}(4{,}0\vec{e}_x + 2{,}0\vec{e}_y)t^2\\ &= (2{,}0t^2)\vec{e}_x + (8{,}0t + 1{,}0t^2)\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

Ihr Betrag ist

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15{,}2\,\text{m/s})^2 + (15{,}6\,\text{m/s})^2}\\ &= 22\,\text{m/s}\,.\end{aligned}$$

AUFGEPASST Anstatt die Vektorschreibweise zu verwenden, können wir die x- und y-Komponenten auch einzeln behandeln.

1.76 Die Beschleunigung ist konstant, daher dürfen wir die Gleichungen aus Tab. 1.1 im Lehrbuch (für beide Komponenten) verwenden. SI-Einheiten sind durchgängig angenommen. Für einen Zusammenstoß der Teilchen müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: Erstens muss die y-Bewegung von B die Bedingung

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad 30\,\text{m} = \frac{1}{2}[(0{,}40\,\text{m/s}^2)\cos\theta]t^2$$

erfüllen (dabei haben wir Gl. Ü1.35 verwendet und berücksichtigt, dass θ von der y-Achse aus gemessen ist). Zweitens müssen die x-Bewegungen von A und B synchron erfolgen

$$\begin{aligned}vt &= \frac{1}{2}a_x t^2\\ \Rightarrow \quad (3{,}0\,\text{m/s})t &= \frac{1}{2}[(0{,}40\,\text{m/s}^2)\sin\theta]t^2\,.\end{aligned}$$

Einen Faktor t können wir hier direkt kürzen; danach lösen wir nach der Zeit auf

$$t = \frac{2v}{a_x} = \frac{2(3{,}0\,\text{m/s})}{(0{,}40\,\text{m/s}^2)\sin\theta}\,.$$

Dies setzen wir nun in den vorhergehenden Ausdruck ein und erhalten

$$30\,\text{m} = \frac{1}{2}[(0{,}40\,\text{m/s}^2)\cos\theta]\left(\frac{2(3{,}0\,\text{m/s})}{(0{,}40\,\text{m/s}^2)\sin\theta}\right)^2,$$

was wir mithilfe der Beziehung $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ noch vereinfachen können

$$\begin{aligned}30 &= \frac{9{,}0}{0{,}20}\cdot\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\\ \Rightarrow \quad 1-\cos^2\theta &= \frac{9{,}0}{(0{,}20)(30)}\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Formel für quadratische Gleichungen aus Anhang D im Lehrbuch (wobei wir die positive Wurzel wählen), um nach $\cos\theta$ aufzulösen

$$\cos\theta = \frac{-1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 - 4(1{,}0)(-1{,}0)}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Für den Winkel erhalten wir so $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 60°$.

In einigen der folgenden Aufgaben ist es nicht gerechtfertigt, den Luftwiderstand zu vernachlässigen; es hilft jedoch, die Berechnungen zu vereinfachen.

1.77 Wir verwenden die Wahl der positiven Richtung im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt angewendet werden können.

(a) Mit dem Ursprung am Abschusspunkt ist die y-Koordinate der Kugel gegeben durch $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Wenn t die Flugzeit angibt und $y = -0{,}019$ m ist, wo die Kugel die Zielscheibe trifft, dann haben wir

$$t = \sqrt{\frac{2(0{,}019\,\text{m})}{9{,}8\,\text{m/s}^2}} = 6{,}2 \cdot 10^{-2}\,\text{s}\,.$$

(b) Die Mündungsgeschwindigkeit ist die (horizontale) Anfangsgeschwindigkeit der Kugel. Da $x = 30$ m die horizontale Position der Zielscheibe ist, haben wir $x = v_0 t$. Damit ergibt sich

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{30\,\text{m}}{6{,}3 \cdot 10^{-2}\,\text{s}} = 4{,}8 \cdot 10^2\,\text{m/s}\,.$$

1.78 Wir verwenden die übliche Wahl der Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt angewendet werden können.

(a) Wir legen den Ursprung auf den Startpunkt (Tischkante). Die y-Koordinate des Balls ist dann $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Wenn wir die Falldauer mit t bezeichnen und $y = -1{,}20$ m das Bodenniveau ist, auf dem der Ball aufschlägt, dann gilt

$$t = \sqrt{\frac{2(-1{,}20\,\text{m})}{-9{,}80\,\text{m/s}^2}} = 0{,}495\,\text{s}\,.$$

(b) Die (horizontale) Anfangsgeschwindigkeit des Balls ist $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$. Da die horizontale Position seines Aufschlagpunkts auf dem Boden $x = 1{,}52$ m ist, muss $x = v_0 t$ gelten. Folglich ist

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{1{,}52\,\text{m}}{0{,}495\,\text{s}} = 3{,}07\,\text{m/s}\,.$$

1.79 Wir verwenden die übliche Wahl der Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt verwendbar sind. Die Anfangsgeschwindigkeit ist horizontal, sodass $v_{0y} = 0$ und $v_{0x} = v_0 = 161$ km/h gelten. In der SI-Basiseinheit bedeutet das $v_0 = 44{,}7$ m/s.

(a) Wenn wir den Ursprung auf den Startpunkt legen (den Ort, an dem der Ball die Hand des Werfers verlässt), ist die y-Koordinate des Balls durch $y = -\frac{1}{2}gt^2$ gegeben und seine x-Koordinate durch $x = v_0 t$. Diese Gleichung zeigt eine einfache Proportionalität zwischen der horizontalen Entfernung und der Zeit, also ist die Zeit, die der Ball für die halbe Entfernung benötigt, einfach die halbe Gesamtzeit. Für $x = 18{,}3$ m erhalten wir somit

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{18{,}3\,\text{m}}{44{,}7\,\text{m/s}} = 0{,}205\,\text{s}\,.$$

(b) Dasselbe gilt für die Zeit, die der Ball für die folgenden $(18{,}3\,\text{m})/2$ benötigt; es sind wieder 0,205 s. Eventuell ist es hilfreich, die horizontale Gleichung in der Form $\Delta x = v_0 \Delta t$ zu schreiben, damit dieses Ergebnis deutlicher erkennbar ist.

(c) Aus der Gleichung $y = -\frac{1}{2}gt^2$ erkennen wir, dass der Ball auf halbem Weg zum Schlagmann eine Höhe

$$\left|-\frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2)(0{,}205\,\text{s})^2\right| = 0{,}205\,\text{m}$$

erreicht.

(d) Der Ball erreicht den Schlagmann in einer Höhe

$$-\frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2)(0{,}409\,\text{s})^2 = -0{,}820\,\text{m}\,,$$

d. h., er ist auf der zweiten Hälfte der Strecke um weitere 0,615 m gefallen.

(e) Da y nicht einfach proportional zur Zeit ist, ist nicht zu erwarten, dass gleiche Zeitintervalle auch gleichen Höhenänderungen entsprechen; physikalisch ausgedrückt ist die anfängliche y-Geschwindigkeit auf der ersten Hälfte seines Flugs nicht gleich der „anfänglichen“ y-Geschwindigkeit auf der zweiten Hälfte der Bewegung.

1.80 Wir verwenden die übliche Wahl der Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt verwendbar sind. Die Anfangsgeschwindigkeit ist horizontal, sodass $v_{0y} = 0$ und $v_{0x} = v_0 = 10$ m/s sind.

(a) Wenn wir den Ursprung auf den Startpunkt legen (den Ort, an dem der Pfeil die Hand des Werfers verlässt), ist die y-Koordinate des Pfeils durch $y = -\frac{1}{2}gt^2$ gegeben, sodass wir mit $y = -\text{PQ}$ sofort

$$\text{PQ} = \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)(0{,}19\,\text{s})^2 = 0{,}18\,\text{m}$$

erhalten.

(b) Wegen $x = v_0 t$ ist $x = (10\,\text{m/s})(0{,}19\,\text{s}) = 1{,}9$ m.

1.81 Da in dieser Aufgabe eine nach unten gerichtete konstante Beschleunigung vom Betrag a auftritt, analog zur Situation beim Wurf, verwenden wir die Gleichungen aus Abschn. 1.9 im Lehrbuch, wobei wir a statt g setzen. Wir verwenden die Wahl der positiven Richtung im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt angewendet werden können. Die Anfangsgeschwindigkeit ist horizontal, sodass $v_{0y} = 0$ und $v_{0x} = v_0 = 1{,}0 \cdot 10^9$ cm/s gilt.

(a) Wenn ℓ die Länge einer Platte und t die Zeit eines Elektrons zwischen den Platten ist, dann haben wir $\ell = v_0 t$, wobei v_0 den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet. Also ergibt sich

$$t = \frac{\ell}{v_0} = \frac{2{,}0\,\text{cm}}{1{,}0 \cdot 10^9\,\text{cm/s}} = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{s}\,.$$

(b) Die vertikale Verschiebung des Elektrons ist

$$y = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}(1{,}0 \cdot 10^{17}\,\text{cm/s}^2)(2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{s})^2 = -0{,}20\,\text{cm}\,.$$

(c) und (d) Die x-Komponente der Geschwindigkeit ändert sich nicht: $v_x = v_0 = 1{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{cm/s}$, und die y-Komponente ist

$$v_y = a_y t = (1{,}0 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm/s^2})(2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}) = 2{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{cm/s}\,.$$

1.82 Für den Vergleich mit Powells Sprung benötigen wir nur die folgenden Gleichungen

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \qquad \text{(Ü1.44)}$$

$$R_{\max} = \left(\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0\right)_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(9{,}50\,\mathrm{m/s})^2}{9{,}80\,\mathrm{m/s^2}} = 9{,}209\,\mathrm{m} \approx 9{,}21\,\mathrm{m}\,.$$

Der Unterschied zwischen Powells Weite und der maximal möglichen Reichweite beträgt nur $\Delta R = (9{,}21\,\mathrm{m} - 8{,}95\,\mathrm{m}) = 0{,}259\,\mathrm{m}$.

1.83 Wir wählen die positive Richtung wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt angewendet werden können. Der Koordinatenursprung ist der Abwurfpunkt (der Anfangsort des Steins). Die x-Komponente seiner Anfangsgeschwindigkeit ist gegeben durch $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, und die y-Komponente ist gegeben durch $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, wobei $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit und $\theta_0 = 40{,}0°$ den Abschusswinkel bezeichnet.

(a) Bei $t = 1{,}10\,\mathrm{s}$ ist die x-Koordinate des Steins

$$x = v_0 t \cos\theta_0 = (20{,}0\,\mathrm{m/s})(1{,}10\,\mathrm{s}) \cos 40{,}0° = 16{,}9\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Seine y-Koordinate ist in diesem Augenblick

$$\begin{aligned} y &= v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \\ &= (20{,}0\,\mathrm{m/s})(1{,}10\,\mathrm{s}) \sin 40° \\ &\quad - \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(1{,}10\,\mathrm{s})^2 \\ &= 8{,}21\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

(c) Bei $t' = 1{,}80\,\mathrm{s}$ ist seine x-Koordinate

$$x = (20{,}0\,\mathrm{m/s})(1{,}80\,\mathrm{s}) \cos 40{,}0° = 27{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

(d) Seine y-Koordinate ist bei t'

$$\begin{aligned} y &= (20{,}0\,\mathrm{m/s})(1{,}80\,\mathrm{s}) \sin 40° \\ &\quad - \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})(1{,}80\,\mathrm{s})^2 \\ &= 7{,}26\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

(e) und (f) Der Stein trifft früher als $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$ auf dem Boden auf. Um die Zeit zu bestimmen, wann er auf den Boden trifft, lösen wir $y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 0$ nach t auf. Wir erhalten

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin\theta_0 = \frac{2(20{,}0\,\mathrm{m/s})}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} \sin 40° = 2{,}62\,\mathrm{s}\,.$$

Seine x-Koordinate beim Aufschlag ist

$$x = v_0 t \cos\theta_0 = (20{,}0\,\mathrm{m/s})(2{,}62\,\mathrm{s}) \cos 40° = 40{,}2\,\mathrm{m}$$

(oder man kann Gl. Ü1.44 anwenden). Wenn wir annehmen, dass er liegen bleibt, wo er auftrifft, hat er bei $t = 5{,}00\,\mathrm{s}$ die Koordinaten $x = 40{,}2\,\mathrm{m}$ und $y = 0$.

1.84 Bei dieser Analyse einer Flugbahn gilt $v_0 = v_x = \text{const.}$; die Grafik in der Aufgabenstellung zeigt den Graphen von $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Wir können daran ablesen, dass der Ball bei $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ seine maximale Höhe erreicht; hier gilt $v_y = 0$. Folglich lesen wir aus der Kurve auch $v_x = 19\,\mathrm{m/s}$ ab.

(a) Im Zeitintervall $t = 5\,\mathrm{s}$ legt der Ball eine horizontale Strecke von $x - x_0 = v_x t = 95\,\mathrm{m}$ zurück.

(b) Aus $\sqrt{(19\,\mathrm{m/s})^2 + v_{0y}^2} = 31\,\mathrm{m/s}$ (am Startpunkt der Kurve) erhalten wir $v_{0y} = 24{,}5\,\mathrm{m/s}$. Für den Zeitpunkt $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ können wir nun entweder $y_{\max} - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$ oder $v_y^2 = 0 = v_{0y}^2 - 2g(y_{\max} - y_0)$ oder $y_{\max} - y_0 = \frac{1}{2}(v_y + v_{0y})t$ verwenden. Wir wählen die letzte Variante

$$\begin{aligned} y_{\max} - y_0 &= \frac{1}{2}(v_y + v_{0y})t \\ \Rightarrow \quad y_{\max} &= \frac{1}{2}(0 + 24{,}5\,\mathrm{m/s})(2{,}5\,\mathrm{s}) = 31\,\mathrm{m}\,, \end{aligned}$$

wobei wir für die Höhe des Bodens $y_0 = 0$ gewählt haben.

1.85 Wir wählen die positive Richtung wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt angewendet werden können. Der Koordinatenursprung befindet sich am Ende des Gewehrs (der Anfangsort für die Kugel, wenn sie eine Wurfbewegung im Sinn von Abschn. 1.9 im Lehrbuch beginnt), und es bezeichne θ_0 den Abschusswinkel. Wenn sich das Ziel in einem Abstand d befindet, dann sind seine Koordinaten $x = d$ und $y = 0$. Die Bewegung des Projektils führt auf $d = v_0 t \cos\theta_0$ und $0 = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$. Elimination von t führt zu $2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 - gd = 0$. Verwenden wir nun noch $\sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{1}{2}\sin(2\theta_0)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} v_0^2 \sin(2\theta_0) &= gd \\ \Rightarrow \quad \sin(2\theta_0) &= \frac{gd}{v_0^2} = \frac{(9{,}8)(45{,}7)}{460^2}\,, \end{aligned}$$

woraus sich $\sin(2\theta_0) = 2{,}12 \cdot 10^{-3}$ ergibt, und folglich ist $\theta_0 = 0{,}0606°$. Wenn mit dem Gewehr auf einen Punkt in einem Abstand ℓ oberhalb des Ziels gezielt wird, dann ist $\tan\theta_0 = \ell/d$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\ell &= d\tan\theta_0 = 45{,}7\tan 0{,}0606° = 0{,}0484\,\text{m}\\ &= 4{,}84\,\text{cm}\,.\end{aligned}$$

1.86 Die Abbildung in der Aufgabenstellung enthält eine Vielzahl von interessanten Informationen, von denen einige offensichtlich sind (wie z. B. die maximale Flughöhe). Wir beginnen mit dem Endpunkt der Kurve (1,25 s nach dem Wurf), an dem der Ball wieder seine ursprüngliche Höhe erreicht.

(a) Aus $x - x_0 = v_x t$ erhalten wir $v_x = (40{,}0\,\text{m})/(1{,}25\,\text{s}) = 32{,}0\,\text{m/s}$. Weiterhin gibt uns $y - y_0 = 0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}g_M t^2$ die Vertikalgeschwindigkeit $v_{0y} = \frac{1}{2}(32{,}0\,\text{m/s}^2)\cdot(1{,}25\,\text{s}) = 20{,}0\,\text{m/s}$. Folglich gilt für den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}v_0 &= |\vec{v}_0| = \sqrt{(32{,}0\,\text{m/s})^2 + (20{,}0\,\text{m/s})^2}\\ &= 37{,}3\,\text{m/s}\,.\end{aligned}$$

(b) Weil am Maximum der Flugkurve $v_y = 0$ gilt und die horizontale Geschwindigkeit konstant ist, ist der Betrag der Gesamtgeschwindigkeit an dieser Stelle gleich der horizontalen Komponente $v_x = 32{,}0\,\text{m/s}$.

(c) Aus der Grafik können wir ablesen (oder aus $v_y = 0 = v_{0y} - gt$ berechnen), dass die Zeit bis zum Maximum der Kurve 0,625 s beträgt. Damit können wir nun $y - y_0 = 0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}g_M t^2$ verwenden, um das Ergebnis 9,25 m zu erhalten (wobei wir $y_0 = 3\,\text{m}$ eingesetzt haben). Alternativ hätten wir auch $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ verwenden können.

1.87 Wenn wir die y-Achse nach oben zeigen lassen und den Ursprung in den Abschusspunkt legen, gilt für die y-Koordinate $y = v_0 t\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$ und die y-Komponente der Geschwindigkeit ist $v_y = v_0\sin\theta_0 - gt$. Die maximale Höhe wird erreicht, wenn $v_y = 0$ ist. Also ist $t = (v_0/g)\sin\theta_0$ und

$$\begin{aligned}y &= v_0\left(\frac{v_0}{g}\right)\sin\theta_0\sin\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{g(v_0\sin\theta_0)^2}{g^2}\\ &= \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g}\,.\end{aligned}$$

1.88 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Den Koordinatenursprung legen wir auf die Abwurfstelle (den Punkt, an dem der Ball seine Flugbahn im Sinn von Abschn. 1.9 im Lehrbuch beginnt) und bezeichnen den Abwurfwinkel mit θ_0 (siehe Abbildung). Da die horizontale Komponente der Geschwindigkeit des Balls konstant $v_x = v_0\cos 40{,}0°$ ist, benötigt der Ball bis zur Wand die Zeit

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{22{,}0\,\text{m}}{(25{,}0\,\text{m/s})\cos 40{,}0°} = 1{,}15\,\text{s}\,.$$

(a) Die Höhe ist

$$\begin{aligned}\Delta y &= (v_0\sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2\\ &= (25{,}0\,\text{m/s})\sin 40{,}0°(1{,}15\,\text{s})\\ &\quad - \frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2)(1{,}15\,\text{s})^2\\ &= 12{,}0\,\text{m}\,.\end{aligned}$$

(b) Die horizontale Komponente der Geschwindigkeit ändert sich während des Flugs nicht, sie ist also auch beim Auftreffen auf die Wand immer noch $v_x = v_0\cos 40{,}0° = 19{,}2\,\text{m/s}$. Die vertikale Komponente ist nach Gl. Ü1.27

$$\begin{aligned}v_y &= v_0\sin\theta_0 - gt\\ &= (25{,}0\,\text{m/s})\sin 40{,}0° - (9{,}80\,\text{m/s}^2)(1{,}15\,\text{s})\\ &= 4{,}80\,\text{m/s}\,.\end{aligned}$$

(c) Da beim Auftreffen des Balls auf die Wand immer noch $v_y > 0$ ist, hat der Ball den höchsten Punkt seiner Flugkurve noch nicht erreicht.

1.89 Wir bezeichnen die angegebene Geschwindigkeit $\vec{v} = (7{,}6\,\text{m/s})\vec{e}_x + (6{,}1\,\text{m/s})\vec{e}_y$ mit $\vec{v}_1$, die Geschwindigkeit am Maximum der Flugkurve mit $\vec{v}_2$, die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf den Boden mit $\vec{v}_3$ und die Geschwindigkeit beim Abwurf wie üblich mit $\vec{v}_0$. Den Ursprung legen wir auf die Stelle des Wurfs auf den Boden.

(a) Wir können unterschiedlich vorgehen, aber aus verschiedenen Gründen ist es am zweckmäßigsten, wenn wir zuerst die y-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit bestimmen. Gleichung Ü1.36 gibt uns

$$\begin{aligned}v_{1y}^2 &= v_{0y}^2 - 2g\Delta y\\ \Rightarrow\quad (6{,}1\,\text{m/s})^2 &= v_{0y}^2 - 2(9{,}8\,\text{m/s}^2)(9{,}1\,\text{m})\end{aligned}$$

und somit $v_{0y} = 14{,}7\,\text{m/s}$. Da wir wissen, dass v_{2y} null sein muss, können wir erneut Gl. Ü1.36 verwenden, müssen nun aber $\Delta y = h$ für die maximale Flughöhe einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}&v_{2y}^2 = v_{0y}^2 - 2gh\\ \Rightarrow\quad &0 = (14{,}7\,\text{m/s})^2 - 2(9{,}8\,\text{m/s}^2)h\\ \Rightarrow\quad &h = 11\,\text{m}\,.\end{aligned}$$

(b) Wir erinnern uns an Gl. Ü1.44, verwenden jetzt aber v_{0y} anstelle von $v_0\sin\theta_0$ und v_{0x} anstelle von $v_0\cos\theta_0$. Das gibt

$$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad\text{und}\quad R = v_{0x}t$$

und somit $R = 2v_{0x}v_{0y}/g$. Wir setzen $v_{0x} = v_{1x} = 7{,}6\,\text{m/s}$ ein und erhalten

$$R = \frac{2(7{,}6\,\text{m/s})(14{,}7\,\text{m/s})}{9{,}8\,\text{m/s}^2} = 23\,\text{m}\,.$$

(c) Mit $v_{3x} = v_{1x} = 7{,}6\,\text{m/s}$ und $v_{3y} = -v_{0y} = -14{,}7\,\text{m/s}$ erhalten wir

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{(7{,}6\,\text{m/s})^2 + (-14{,}7\,\text{m/s})^2}$$
$$= 17\,\text{m/s}\,.$$

(d) Der Winkel von $\vec{v}_3$ ist (gegen die Horizontale gemessen)

$$\tan^{-1}\left(\frac{-14{,}7\,\text{m}}{7{,}6\,\text{m}}\right) = -63° \quad \text{oder} \quad 117°\,,$$

wovon wir die erste Alternative wählen (−63° entsprechend +297°), weil die Vorzeichen der Komponenten anzeigen, dass der Vektor im vierten Quadranten liegt.

1.90 Wir verwenden die Gln. Ü1.23, Ü1.25 und Ü1.27.

(a) Aus $\Delta x = v_{0x}t$ folgt $v_{0x} = 40\,\text{m}/2\,\text{s} = 20\,\text{m/s}$.

(b) Aus $\Delta y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ folgt

$$v_{0y} = \left(53\,\text{m} + \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)(2\,\text{s})^2\right)/2 = 36\,\text{m/s}\,.$$

(c) Aus $v_y = v_{0y} - gt'$ folgt mit $v_y = 0$ als Bedingung für die Maximalhöhe

$$t' = \frac{36\,\text{m/s}}{9{,}8\,\text{m/s}^2} = 3{,}7\,\text{s}\,.$$

Während dieser Zeit ist die x-Geschwindigkeit konstant, daher ist

$$x' - x_0 = (20\,\text{m/s})(3{,}7\,\text{s}) = 74\,\text{m}\,.$$

1.91 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Der Koordinatenursprung liegt im Startpunkt des Fußballs, wo er eine Wurfbewegung im Sinn von Abschn. 1.9 im Lehrbuch beginnt; weiter sei θ_0 der Winkel seiner Anfangsgeschwindigkeit, gemessen von der $+x$-Achse.

(a) Die Koordinaten für den Auftreffpunkt sind $x = 46\,\text{m}$ und $y = -1{,}5\,\text{m}$; der Ball landet zur Zeit $t = 4{,}5\,\text{s}$. Wegen $x = v_{0x}t$ haben wir

$$v_{0x} = \frac{x}{t} = \frac{46\,\text{m}}{4{,}5\,\text{s}} = 10{,}2\,\text{m/s}\,.$$

Wegen $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ haben wir

$$v_{0y} = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{(-1{,}5\,\text{m}) + \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2)(4{,}5\,\text{s})^2}{4{,}5\,\text{s}}$$
$$= 21{,}7\,\text{m/s}\,.$$

Der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit ist

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{(10{,}2\,\text{m/s})^2 + (21{,}7\,\text{m/s})^2}$$
$$= 24\,\text{m/s}\,.$$

(b) Der Anfangswinkel erfüllt $\tan\theta = v_{0y}/v_{0x}$. Also ist

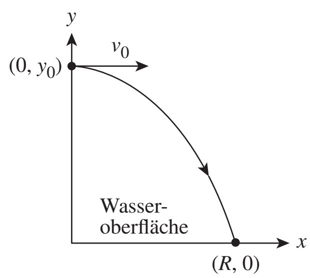
$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{21{,}7\,\text{m/s}}{10{,}2\,\text{m/s}}\right) = 64{,}8°\,.$$

1.92 STARTPUNKT Die Flugbahn des Springers entspricht einer Wurfbewegung. Uns interessieren die Verschiebungen des Springers zu verschiedenen Zeitpunkten nach dem Abspringen.

ANSATZ Die Anfangsgeschwindigkeit besitzt keine Vertikalkomponente ($y_0 = 0$), sondern nur eine x-Komponente. Die Gln. Ü1.23 und Ü1.25 vereinfachen sich daher zu

$$x - x_0 = v_{0x}t\,,$$
$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2\,,$$

wobei in unserem Fall $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 = +2{,}0\,\text{m/s}$ und $y_0 = +10{,}0\,\text{m}$ sind (wenn wir die Wasseroberfläche als $y = 0$ nehmen). Die Aufgabenstellung ist in der Skizze zusammengefasst.



RECHNUNG

(a) Zum Zeitpunkt $t = 0{,}80\,\text{s}$ befindet sich der Springer in einer horizontalen Entfernung

$$x = x_0 + v_{0x}t = 0 + (2{,}0\,\text{m/s})(0{,}80\,\text{s}) = 1{,}60\,\text{m}$$

von der Kante des Sprungturms.

(b) Entsprechend erhalten wir aus der zweiten Gleichung für die Vertikalbewegung

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 10{,}0\,\text{m} - \frac{1}{2}(9{,}80\,\text{m/s}^2)(0{,}80\,\text{s})^2$$
$$= 6{,}86\,\text{m}\,.$$

(c) Wenn der Springer die Wasseroberfläche berührt, ist $y = 0$. Wir lösen $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ nach t auf und erhalten so

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(10{,}0\,\text{m})}{9{,}80\,\text{m/s}^2}} = 1{,}43\,\text{s}\,.$$

Zu diesem Zeitpunkt ist die x-Verschiebung des Springers $R = x = (2{,}00\,\text{m/s})(1{,}43\,\text{s}) = 2{,}86\,\text{m}$.

AUFGEPASST Wenn wir Gl. Ü1.45

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} \qquad \text{(Ü1.45)}$$

mit $\theta_0 = 0$ verwenden, lässt sich für die Flugbahn des Springers auch

$$y = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

schreiben. Wir können Teil (c) der Aufgabe auch mit dieser Gleichung lösen

$$y = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = R = \sqrt{\frac{2v_0^2 y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(2{,}0\,\mathrm{m/s})^2(10{,}0\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m/s}^2}}$$
$$= 2{,}86\,\mathrm{m}\,.$$

1.93 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anzuwenden sind. Den Koordinatenursprung legen wir auf den Erdboden senkrecht unter den Abwurfpunkt. Es gilt $\theta_0 = -30{,}0°$, da der in der Abbildung aus der Aufgabenstellung markierte Winkel im Uhrzeigersinn von der Horizontalen aus gemessen ist. Die Anfangsgeschwindigkeit des Hilfspakets ist gleich der Geschwindigkeit des Flugzeugs zum Zeitpunkt des Abwurfs: $v_0 = 290\,\mathrm{km/h}$ oder $80{,}6\,\mathrm{m/s}$.

(a) Wir verwenden Gl. Ü1.17 und lösen nach der Zeit auf

$$\Delta x = (v_0 \cos\theta_0)t$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{700\,\mathrm{m}}{(80{,}6\,\mathrm{m/s})\cos(-30{,}0°)} = 10{,}0\,\mathrm{s}\,.$$

(b) Nun verwenden wir Gl. Ü1.25 und lösen nach der Anfangshöhe y_0 auf

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow \quad 0 - y_0 = (-40{,}3\,\mathrm{m/s})(10{,}0\,\mathrm{s}) - \frac{1}{2}(9{,}80\,\mathrm{m/s}^2)(10{,}0\,\mathrm{s})^2\,.$$

Wir erhalten so $y_0 = 897\,\mathrm{m}$.

1.94 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Den Koordinatenursprung legen wir auf den Startpunkt (die Abwurfposition). Am Punkt der maximalen Flughöhe ist $v_y = 0$ und wir schreiben $v_x = v = v_{0x}$. Nach Aufgabenstellung gilt $v_0 = 5v$. Dann berücksichtigen wir noch, dass $v_0 \cos\theta_0 = v_{0x} = v$ ist, sodass wir schließlich eine Gleichung erhalten, die wir nach θ_0 auflösen können

$$(5v)\cos\theta_0 = v \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}5°\,.$$

1.95 Mit h bezeichnen wir die Höhe einer Stufe und mit w ihre Tiefe. Damit der Ball Stufe n trifft, muss er eine Entfernung nh fallen und eine horizontale Entfernung zwischen $(n-1)w$ und nw zurücklegen. Wir lassen den Ursprung unseres Koordinatensystems in dem Punkt liegen, wo der Ball den Rand der oberen Stufe der Treppe verlässt, und wir lassen die positive y-Achse nach oben zeigen. Die Koordinaten des Balls zur Zeit t sind gegeben durch $x = v_{0x}t$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2$ (wegen $v_{0y} = 0$). Wir setzen $y = -nh$ und lösen nach der Zeit auf, um die Anzahl n der Stufen zu erhalten

$$t = \sqrt{\frac{2nh}{g}}\,.$$

Die x-Koordinate ist dann

$$x = v_{0x}\sqrt{\frac{2nh}{g}} = (1{,}52\,\mathrm{m/s})\sqrt{\frac{2n(0{,}203\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m/s}^2}}$$
$$= (0{,}309\,\mathrm{m})\sqrt{n}\,.$$

Die Methode besteht darin, Werte von n auszuprobieren, bis wir einen finden, für den x/w kleiner als n, aber größer als $n-1$ ist. Für $n = 1$ ist $x = 0{,}09\,\mathrm{m}$ und $x/w = 1{,}52$, was größer als n ist. Für $n = 2$ ist $x = 0{,}437\,\mathrm{m}$ und $x/w = 2{,}15$, was größer als n ist. Für $n = 3$ ist $x = 0{,}535\,\mathrm{m}$ und $x/w = 2{,}64$. Das ist nun kleiner als n und größer als $n-1$, also trifft der Ball die dritte Stufe.

1.96 Wir könnten Gl. Ü1.44 benutzen, um den Landepunkt des Balls zu berechnen. Stattdessen wollen wir aber die Gln. Ü1.23 und Ü1.25 verwenden, weil sie uns sowohl sagen, *wo* der Ball aufkommt, als auch *wann* dies geschieht (außerdem sind diese beiden Gleichungen grundlegender als Gl. Ü1.44). Mit $\Delta y = 0$ ist

$$\Delta y = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow \quad t = \frac{(19{,}5\,\mathrm{m/s})\sin 45{,}0°}{(9{,}80\,\mathrm{m/s}^2)/2} = 2{,}81\,\mathrm{s}\,.$$

Gleichung Ü1.23 liefert nun $\Delta x = (v_0 \cos\theta_0)t = 38{,}7\,\mathrm{m}$. Nach Gl. Ü1.40 muss der Spieler daher eine mittlere Geschwindigkeit von

$$\vec{v}_{\mathrm{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(38{,}7\,\mathrm{m})\vec{e}_x - (55\,\mathrm{m})\vec{e}_x}{2{,}81\,\mathrm{s}}$$
$$= (-5{,}8\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x$$

erreichen.

1.97 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Der Koordinatenursprung befindet sich auf der Höhe des Erdbodens direkt unter dem Punkt, wo das Paket losgelassen wird. Wir schreiben $\theta_0 = -37°$ für den von $+x$ gemessenen Winkel, weil der in der Aufgabe gegebene Winkel von der $(-y)$-Richtung gemessen wird. Wir beachten, dass die Anfangsgeschwindigkeit des Pakets die Geschwindigkeit des Flugzeugs ist, wenn das Paket fallen gelassen wird.

(a) Wir verwenden Gl. Ü1.25, um v_0 (natürlich in SI-Einheiten) zu bestimmen

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow \quad 0 - 730 = v_0 \sin(-37°)(5{,}00) - \frac{1}{2}(9{,}8)(5{,}00)^2\,,$$

was $v_0 = 202\,\mathrm{m/s}$ liefert.

(b) Die horizontal zurückgelegte Entfernung ist

$$x = v_0 t \cos\theta_0 = (202)(5{,}00)\cos -37{,}0° = 806\,\text{m}\,.$$

(c) Die x-Komponente der Geschwindigkeit (kurz vor dem Aufprall) ist

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (202)\cos -37{,}0° = 161\,\text{m/s}\,.$$

(d) Die y-Komponente der Geschwindigkeit (kurz vor dem Aufprall) ist

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt = (202)\sin(-37°) - (9{,}80)(5{,}00) \\ &= -171\,\text{m/s}\,. \end{aligned}$$

1.98 Wir nehmen an, dass die Anfangsgeschwindigkeit des Balls senkrecht zur Ebene des Netzes ist. Die Koordinaten wählen wir so, dass $(x_0, y_0) = (0\,\text{m}, 3{,}0\,\text{m})$ und $v_x > 0$ ist (es ist $v_{0y} = 0$).

(a) Um gerade so eben über das Netz zu kommen, muss der Ball folgende Bedingung erfüllen

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}24\,\text{m} - 3{,}0\,\text{m} = 0 - \frac{1}{2}(9{,}8\,\text{m/s}^2) t^2\,.$$

Das liefert uns $t = 0{,}39\,\text{s}$ für die Zeit, die der Ball bis zum Netz benötigt. Diesen Wert setzen wir nun in die x-Gleichung ein, um für die (minimale) Anfangsgeschwindigkeit $v_x = (8{,}0\,\text{m})/(0{,}39\,\text{s}) = 20{,}3\,\text{m/s}$ zu erhalten.

(b) Es muss $y = 0$ gelten; die zugehörige Zeit t erhalten wir aus der Gleichung $y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$. Wir bekommen so

$$t = \sqrt{\frac{2(3{,}0\,\text{m})}{9{,}8\,\text{m/s}^2}} = 0{,}78\,\text{s}\,,$$

was wir in die x-Gleichung einsetzen, um die (maximale) Anfangsgeschwindigkeit des Balls zu erhalten

$$v_x = \sqrt{\frac{17{,}0\,\text{m}}{0{,}78\,\text{s}}} = 21{,}7\,\text{m/s}\,.$$

1.99 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Der Koordinatenursprung befindet sich auf der Höhe des Bodens direkt unter dem Auftreffpunkt zwischen Schläger und Ball. Der in der Aufgabe gegebene *Hinweis* ist wichtig, weil er uns genügend Informationen liefert, um v_0 direkt aus Gl. Ü1.44 zu bestimmen.

(a) Wir möchten wissen, wie weit sich der Ball über dem Erdboden befindet, wenn er sich bei $x = 97{,}5\,\text{m}$ befindet, weshalb wir die Anfangsgeschwindigkeit kennen müssen. Wir verwenden die Information über die Entfernung sowie $\theta_0 = 45°$ und nutzen dann Gl. Ü1.44, um nach v_0 aufzulösen

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\sin 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{(9{,}8\,\text{m/s}^2)(107\,\text{m})}{1}} = 32{,}4\,\text{m/s}\,.$$

Also sagt uns Gl. Ü1.23 für die Zeit t, während der er sich über dem Zaun befindet,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{97{,}5}{(32{,}4)\cos 45°} = 4{,}26\,\text{s}\,.$$

In diesem Augenblick befindet sich der Ball in einer Höhe (über dem Erdboden) von

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 = 9{,}88\,\text{m}\,,$$

woraus folgt, dass er tatsächlich über den 7,32 m hohen Zaun fliegt.

(b) Bei $t = 4{,}26\,\text{s}$ befindet sich der Mittelpunkt des Balls $9{,}88 - 7{,}32 = 2{,}56\,\text{m}$ oberhalb des Zauns.

1.100 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Den Koordinatenursprung legen wir auf den Boden senkrecht unter der Stelle, an der der Ball vom Schläger getroffen wird.

(a) Wir wollen wissen, in welcher Höhe sich der Ball am Ort $x = 12{,}0\,\text{m}$ befindet. Dazu verwenden wir zuerst Gl. Ü1.23, um herauszufinden, wann er am Netz ankommt

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{12{,}0\,\text{m}}{(23{,}6\,\text{m/s})\cos 0°} = 0{,}508\,\text{s}\,.$$

Zu diesem Zeitpunkt hat er eine Höhe von

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 = 1{,}10\,\text{m}$$

über dem Boden, d. h., er fliegt tatsächlich über das nur 0,90 m hohe Netz.

(b) Zur Zeit $t = 0{,}508\,\text{s}$ befindet sich das Zentrum des Balls $(1{,}10\,\text{m} - 0{,}90\,\text{m}) = 0{,}20\,\text{m}$ oberhalb der Netzkante.

(c) Wir wiederholen die Rechnung aus Teil (a) mit $\theta_0 = -5{,}0°$; das ergibt $t = 0{,}510\,\text{s}$ und $y = 0{,}040\,\text{m}$, der Ball bleibt also eindeutig im Netz hängen.

(d) Zur Zeit $t = 0{,}510\,\text{s}$ befindet sich das Zentrum des Balls $0{,}040\,\text{m} - 0{,}90\,\text{m} = -0{,}86\,\text{m}$ unter der Netzkante.

1.101 Wir wählen die Richtungen wie im Lehrbuch, sodass Gleichungen wie Gl. Ü1.25 direkt anwendbar sind. Der Koordinatenursprung befindet sich an dem Punkt, wo der Ball abgestoßen wird. Wo keine Einheiten angegeben sind, sind SI-Einheiten gemeint. Wir verwenden x und y, um die Koordinaten des Balls am Torpfosten zu bezeichnen und um zu versuchen, den (die) Abstoßwinkel θ_0 so zu bestimmen, dass $y = 3{,}44\,\text{m}$ gilt, wenn $x = 50\,\text{m}$ ist. Indem wir die kinematischen Gleichungen für die Wurfbewegung $x = v_0 t \cos\theta_0$ und $y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$ schreiben, erkennen wir, dass die erste Gleichung $t = x / v_0 \cos\theta_0$ ergibt. Und wenn dies in die zweite eingesetzt wird, ist das Ergebnis

$$y = x \tan\theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0}\,.$$

Man kann dies durch Ausprobieren lösen: Probieren Sie systematisch Werte für θ_0, bis Sie die zwei Werte finden, die die Gleichung erfüllen. Eine kleine Umformung ergibt jedoch eine algebraische Lösung: Durch Verwenden der trigonometrischen Identität $1/\cos^2\theta_0 = 1+\tan^2\theta_0$ (die sich aus der in der Aufgabenstellung angegebenen, bekannteren Formel herleiten lässt) erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2}\tan^2\theta_0 - x\tan\theta_0 + y + \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2} = 0\,,$$

eine quadratische Gleichung für $\tan\theta_0$. Um das Aufschreiben der Lösung zu vereinfachen, bezeichnen wir $c = \frac{1}{2}gx^2/v_0^2 = (\frac{1}{2}(9{,}80)(50)^2)/(25)^2 = 19{,}6\,\text{m}$. Die Quadratische Gleichung wird dann zu $c\tan^2\theta_0 - x\cdot\tan\theta_0 + y + c = 0$. Verwenden wir die Formel für die Lösung der quadratischen Formel aus Anhang D im Lehrbuch, erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned}\tan\theta_0 &= \frac{x\pm\sqrt{x^2+4(y+c)c}}{2c}\\ &= \frac{50\pm\sqrt{50^2-4(3{,}44+19{,}6)(19{,}6)}}{2(19{,}6)}\,.\end{aligned}$$

Die beiden Lösungen sind gegeben durch $\tan\theta_0 = 1{,}95$ und $\tan\theta_0 = 0{,}605$. Die zugehörigen Winkel (im ersten Quadranten) sind $\theta_0 = 63°$ und $\theta_0 = 31°$. Wenn der Ball in einem Winkel zwischen diesen beiden Werten abgestoßen wird, wird er das Tor oberhalb der Querstange erreichen (was beim American Football durchaus erwünscht ist).

1.102 Der Betrag der Beschleunigung ist

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(10\,\text{m/s})^2}{25\,\text{m}} = 4{,}0\,\text{m/s}^2\,.$$

1.103 Wir wenden Gl. Ü1.46

$$\vec{v} = \left(-\frac{v}{r}y_\text{p}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{v}{r}x_\text{p}\right)\vec{e}_y \qquad \text{(Ü1.46)}$$

an, um nach dem Betrag der Geschwindigkeit v aufzulösen, und Gl. Ü1.47,

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y = (-v\sin\theta)\vec{e}_x + (v\cos\theta)\vec{e}_y \quad \text{(Ü1.47)}$$

um die Beschleunigung a zu bestimmen.

(a) Da der Erdradius $6{,}37\cdot10^6$ m ist, ist der Radius der Satellitenbahn $6{,}37\cdot10^6\,\text{m} + 640\cdot10^3\,\text{m} = 7{,}01\cdot10^6\,\text{m}$. Daher ist der Betrag der Geschwindigkeit des Satelliten

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(7{,}01\cdot10^6\,\text{m})}{(98{,}0\,\text{min})(60\,\text{s/min})} = 7{,}49\cdot10^3\,\text{m/s}\,.$$

(b) Der Betrag der Beschleunigung ist

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}49\cdot10^3\,\text{m/s})^2}{7{,}01\cdot10^6\,\text{m}} = 8{,}00\,\text{m/s}^2\,.$$

1.104

(a) Der Umfang beträgt $c = 2\pi r = 2\pi(0{,}15\,\text{m}) = 0{,}94\,\text{m}$.
(b) Mit $T = (60\,\text{s})/1200 = 0{,}050\,\text{s}$ erhalten wir für die Geschwindigkeit $v = c/T = (0{,}94\,\text{m})/(0{,}050\,\text{s}) = 19\,\text{m/s}$. Ebenso hätten wir die Gleichung

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\vec{e}_x + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\vec{e}_y \quad \text{(Ü1.48)}$$

verwenden können.
(c) Der Betrag der Beschleunigung ist $a = v^2/r = (19\,\text{m/s})^2/(0{,}15\,\text{m}) = 2{,}4\cdot10^3\,\text{m/s}^2$.
(d) Die Periode ist $(1200\,\text{min}^{-1})^{-1} = 8{,}3\cdot10^{-4}$ min oder in SI-Einheiten $T = 0{,}050\,\text{s} = 50\,\text{ms}$.

1.105 Wir wenden Gl. Ü1.47 an, um nach dem Betrag der Geschwindigkeit v aufzulösen, und Gl. Ü1.46, um die Periode T zu bestimmen.

(a) Wir erhalten

$$v = \sqrt{ra} = \sqrt{(5{,}0\,\text{m})(7{,}0)(9{,}8\,\text{m/s}^2)} = 19\,\text{m/s}\,.$$

(b) Die Rotationsperiode ist $T = 2\pi r/v = 1{,}7\,\text{s}$. Daher führt der Astronaut in einer Minute ($t = 60$ s)

$$\frac{t}{T} = \frac{60\,\text{s}}{1{,}7\,\text{s}} = 35$$

Umdrehungen aus. Also sind 35 U/min nötig, um eine Zentripetalbeschleunigung von $7g$ zu erreichen, wenn der Radius 5,0 m beträgt.
(c) Wie oben vermerkt, ist $t = 1{,}7$ s.

1.106 Diese Aufgabe befasst sich mit dem Betrag der Zentripetalbeschleunigung ($a = v^2/r$) und ihrer Richtung (in Richtung des Zentrums).

(a) Wenn ein Fahrgast an dieser Stelle eine Beschleunigung $\vec{a} = 1{,}83\,\text{m/s}^2$ in Richtung Osten spürt, dann befindet sich der Mittelpunkt östlich von ihm in einer Entfernung $r = v^2/a = (3{,}66\,\text{m/s})^2/(1{,}83\,\text{m/s}^2) = 7{,}32\,\text{m}$.
(b) Wenn für den Passagier die Beschleunigung $\vec{a}$ nach Süden zeigt, muss der Mittelpunkt des Karussells nun südlich von ihm liegen. Anders ausgedrückt: Der Passagier befindet sich jetzt 7,32 m nördlich des Mittelpunkts.

1.107

(a) Der Geschwindigkeitsbetrag eines Menschen am Äquator ist $v = 2\pi R/T$, wobei R den Erdradius ($6{,}37\cdot10^6$ m) und T die Dauer eines Tags ($8{,}64\cdot10^4$ s) bezeichnen: $v = 2\pi(6{,}37\cdot10^6\,\text{m})/(8{,}64\cdot10^4\,\text{s}) = 463\,\text{m/s}$. Der Betrag der Beschleunigung ist gegeben durch

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(463\,\text{m/s})^2}{6{,}37\cdot10^6\,\text{m}} = 0{,}034\,\text{m/s}^2\,.$$

(b) Wenn T die Periode ist, dann sind $v = 2\pi R/T$ der Geschwindigkeitsbetrag und $a = v^2/R = 4\pi^2R^2/T^2R =$

$4\pi^2 R/T^2$ der Betrag der Beschleunigung. Also haben wir

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} = 5{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 84\,\mathrm{min}\,.$$

1.108 Die Gleichung

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_y \qquad \text{(Ü1.49)}$$

beschreibt eine umgekehrte Proportionalität zwischen r und a, d. h., ein kleiner Kurvenradius führt zu einer großen Beschleunigung. Folglich führt eine Obergrenze für a zu einer Untergrenze für r.

(a) Der kleinste erlaubte Kurvenradius des Zugs ist

$$r_\mathrm{min} = \frac{v^2}{a_\mathrm{max}} = \frac{(216\,\mathrm{km/h})^2}{(0{,}050)(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})} = 7{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Der Zug muss auf eine Geschwindigkeit von nicht mehr als

$$v = \sqrt{a_\mathrm{max} r} = \sqrt{(0{,}050)(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})(1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{m})} = 22\,\mathrm{m/s}$$

oder rund 80 km/h abbremsen.

1.109

(a) Da das Rad 5 volle Umdrehungen pro Minute vollführt, ist seine Periode ein Fünftel einer Minute, oder 12 s.

(b) Der Betrag der Zentripetalbeschleunigung ist gegeben durch $a = v^2/R$, wobei R den Radius des Rads und v den Geschwindigkeitsbetrag des Fahrgasts bezeichnet. Da der Fahrgast bei jeder Umdrehung eine Entfernung von $2\pi R$ zurücklegt, ist sein Geschwindigkeitsbetrag

$$v = \frac{2\pi(15\,\mathrm{m})}{12\,\mathrm{s}} = 7{,}85\,\mathrm{m/s}$$

und seine Zentripetalbeschleunigung beträgt

$$a = \frac{(7{,}85\,\mathrm{m/s})^2}{15\,\mathrm{m}} = 4{,}1\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Wenn sich der Fahrgast am höchsten Punkt befindet, ist seine Zentripetalbeschleunigung nach unten, zum Mittelpunkt der Kreisbahn, gerichtet.

(c) Am tiefsten Punkt zeigt der Vektor der Zentripetalbeschleunigung nach oben zum Mittelpunkt der Kreisbahn. Er hat den gleichen Betrag wie in Teil (b).

1.110 Wir verwenden Gl. Ü1.48, um den Betrag v der Geschwindigkeit zu erhalten, und Gl. Ü1.49, um daraus die Zentripetalbeschleunigung a zu berechnen.

(a) $v = 2\pi r/T = 2\pi(20\,\mathrm{km})/1{,}0\,\mathrm{s} = 126\,\mathrm{km/s} = 1{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$.

(b) Der Betrag der Beschleunigung ist

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(126\,\mathrm{km/s})^2}{20\,\mathrm{km}} = 7{,}9 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

(c) Sowohl v als auch a nehmen zu, wenn T kleiner wird.

1.111 Um die Zentripetalbeschleunigung des Steins zu berechnen, müssen wir seinen Geschwindigkeitsbetrag während seiner Kreisbewegung (dies ist auch sein anfänglicher Geschwindigkeitsbetrag, wenn er wegfliegt) kennen. Wir verwenden die kinematischen Gleichungen der Wurfbewegung (in Abschn. 1.9 im Lehrbuch diskutiert), um diesen Geschwindigkeitsbetrag zu bestimmen. Wenn wir die $(+y)$-Richtung nach oben weisen lassen und den Ursprung in den Punkt legen, wo der Stein seine Kreisbahn verlässt, dann sind die Koordinaten des Steins während seiner Wurfbewegung gegeben durch $x = v_0 t$ und $y = \frac{1}{2}gt^2$ (wegen $v_{0y} = 0$). Er trifft den Boden bei $x = 10\,\mathrm{m}$ und $y = -2{,}0\,\mathrm{m}$. Lösen wir die zweite Gleichung formal nach der Zeit auf, erhalten wird $t = \sqrt{-2y/g}$, was wir in die erste Gleichung einsetzen

$$v_0 = x\sqrt{-\frac{g}{2y}} = (10\,\mathrm{m})\sqrt{-\frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{2(-2{,}0\,\mathrm{m})}} = 15{,}7\,\mathrm{m/s}\,.$$

Daher ist der Betrag der Zentripetalbeschleunigung

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(15{,}7\,\mathrm{m/s^2})}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 160\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

1.112 Wir schreiben unsere Ergebnisse in Betrag-Winkel-Schreibweise in der Form $(R, \angle\theta)$ und nehmen implizit SI-Einheiten für die Beträge an (m für Entfernungen, m/s für Geschwindigkeiten, m/s^2 für Beschleunigungen). Alle Winkel θ werden im Gegenuhrzeigersinn von der $+x$-Achse aus gemessen, allerdings werden wir gelegentlich auch Winkel φ verwenden, die im Gegenuhrzeigersinn von der vertikalen Linie zwischen dem Kreiszentrum und dem Koordinatenursprung bzw. von der Linie vom Koordinatenursprung zum Ort des Teilchens (siehe r in Abb. Ü1.A112) gemessen werden. Der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ist $v = 2\pi r/T$ mit $r = 3{,}00\,\mathrm{m}$ und $T = 20{,}0\,\mathrm{s}$, folglich ist $v = 0{,}942\,\mathrm{m/s}$. Das Teilchen bewegt sich in Abb. Ü1.A112 im Gegenuhrzeigersinn.

(a) Zur Zeit $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$ hat das Teilchen

$$\frac{t}{T} = \frac{5{,}00\,\mathrm{s}}{20{,}0\,\mathrm{s}} = \frac{1}{4}$$

eines vollen Umlaufs absolviert (am Ursprung beginnend). Relativ zum Mittelpunkt des Kreises befindet sich das Teilchen daher bei

$$\varphi = \frac{360°}{4} = 90°$$

(gemessen gegen die Vertikale). Mit einem Blick auf Abb. Ü1.A112 sehen wir, dass diese Position (die 3-Uhr-Position auf dem Kreis) den Koordinaten $x = 3{,}0\,\mathrm{m}$

und $y = 3{,}0\,\mathrm{m}$ relativ zum Mittelpunkt des Kreises entspricht. In Betrag-Winkel-Schreibweise drücken wir das als (4,2, ∠45°) aus. Obwohl diese Position auch ohne Rückgriff auf trigonometrische Beziehungen einfach zu verstehen ist, ist es (für die folgenden Berechnungen) hilfreich, sich zu verdeutlichen, dass die angegebenen Werte von x und y relativ zum Koordinatenursprung über den Winkel φ aus den Beziehungen

$$x = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad y = r - r\cos\varphi$$

bestimmt werden können.
Selbstverständlich gilt $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, und wir wählen θ aus den verschiedenen Möglichkeiten aus, die $\tan^{-1}(y/x)$ uns bietet (wen wir nicht die entsprechenden Funktionen eines vektorfähigen Taschenrechners nutzen).

(b) Zum Zeitpunkt $t = 7{,}5\,\mathrm{s}$ hat das Teilchen $7{,}5/20 = 3/8$ eines Umlaufs absolviert (am Ursprung beginnend). Relativ zum Mittelpunkt des Kreises befindet sich das Teilchen daher bei $\varphi = (3/8)\cdot(360°) = 135°$, wie zuvor gegen die Vertikale gemessen. Für die Situation in Abb. Ü1.A112 berechnen wir, dass diese Position den Koordinaten

$$x = (3{,}00\,\mathrm{m})\sin 135° = 2{,}1\,\mathrm{m}\,,$$
$$y = (3{,}0\,\mathrm{m}) - (3{,}0\,\mathrm{m})\cos 135° = 5{,}1\,\mathrm{m}$$

relativ zum Koordinatenursprung entspricht. In Betrag-Winkel-Schreibweise drücken wir das als (5,5, ∠68°) aus.

(c) Zum Zeitpunkt $t = 10{,}0\,\mathrm{s}$ hat das Teilchen $10/20 = 1/2$ eines Umlaufs absolviert (am Ursprung beginnend). Relativ zum Mittelpunkt des Kreises befindet sich das Teilchen daher bei $\varphi = 180°$, wie zuvor gegen die Vertikale gemessen. Für die Situation in Abb. Ü1.A112 berechnen wir, dass diese Position den Koordinaten $x = 0$ und $y = 6{,}0\,\mathrm{m}$ relativ zum Koordinatenursprung entspricht. In Betrag-Winkel-Schreibweise haben wir (6,0, ∠90°).

(d) Wir subtrahieren den Ortsvektor aus Teil (a) in Betrag-Winkel-Schreibweise (die vor allem vorteilhaft ist, wenn wir mit einem vektorfähigen Taschenrechner arbeiten) von dem Ortsvektor aus Teil (c)

$$(6{,}0, \angle 90°) - (4{,}2, \angle 45°) = (4{,}2, \angle 135°)\,.$$

Natürlich können wir das auch in Einheitsvektoren-Schreibweise machen; die Gleichung lautet dann

$$\Delta\vec{R} = (0 - 3{,}0\,\mathrm{m})\vec{e}_x + (6{,}0\,\mathrm{m} - 3{,}0\,\mathrm{m})\vec{e}_y$$
$$= (-3{,}0\,\mathrm{m})\vec{e}_x + (3{,}0\,\mathrm{m})\vec{e}_y\,,$$

was $|\Delta\vec{R}| = 4{,}2\,\mathrm{m}$ und $\theta = 135°$ ergibt.

(e) Aus Gl. Ü1.40 folgt $\vec{v}_{\mathrm{gem}} = \Delta\vec{R}/\Delta t$. Mit $\Delta t = 5{,}0\,\mathrm{s}$ ist dann

$$\vec{v}_{\mathrm{gem}} = (-0{,}60\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x + (0{,}60\,\mathrm{m/s})\vec{e}_y$$

in Einheitsvektoren-Schreibweise oder (0,85, ∠135°) in Betrag-Winkel-Schreibweise.

(f) Den Betrag der Geschwindigkeit hatten wir bereits ermittelt ($v = 0{,}94\,\mathrm{m/s}$); ihre Richtung entnehmen wir am einfachsten wieder Abb. Ü1.A112. Der Geschwindigkeitsvektor liegt – vgl. Teil (a) – an der 3-Uhr-Position tangential an dem Kreis an, d. h., $\vec{v}$ ist vertikal. Das Ergebnis ist demzufolge (0,94, ∠90°).

(g) Den Betrag der Geschwindigkeit hatten wir bereits ermittelt ($v = 0{,}94\,\mathrm{m/s}$); ihre Richtung entnehmen wir am einfachsten wieder Abb. Ü1.A112. Der Geschwindigkeitsvektor liegt an der 12-Uhr-Position tangential an dem Kreis an, d. h., $\vec{v}$ ist horizontal. Das Ergebnis ist demzufolge (0,94, ∠180°).

(h) Die Beschleunigung besitzt den Betrag $a = v^2/r = 0{,}30\,\mathrm{m/s^2}$ und zeigt in diesem Moment horizontal auf den Kreismittelpunkt, vgl. Teil (a). Das Ergebnis ist somit (0,30, ∠180°).

(i) Wieder ist $a = v^2/r = 0{,}30\,\mathrm{m/s^2}$, aber in diesem Moment, vgl. Teil (c), zeigt die Beschleunigung vertikal zum Kreismittelpunkt. Das Ergebnis ist also (0,30, ∠270°).

1.113 Wir verwenden Gl. Ü1.43 zuerst mit Geschwindigkeiten relativ zum Jeep (Index J) und anschließend mit Geschwindigkeiten relativ zu dem stationären Beobachter (Index B). Wir verwenden durchgehend SI-Einheiten und rechnen daher wie folgt um: $20\,\mathrm{km/h} \to 5{,}6\,\mathrm{m/s}$, $30\,\mathrm{km/h} \to 8{,}3\,\mathrm{m/s}$ und $45\,\mathrm{km/h} \to 12{,}5\,\mathrm{m/s}$. Wir legen die Richtung $\vec{e}_x$ nach Osten.

(a) Die Geschwindigkeit des Gepards relativ zum Jeep ist am Ende des 2 s-Intervalls gemäß Gl. Ü1.31

$$\vec{v}_{\mathrm{G,J}} = \vec{v}_{\mathrm{G,B}} - \vec{v}_{\mathrm{J,B}} = (12{,}5\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (-5{,}6\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x$$
$$= (18{,}1\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x\,.$$

Da die Geschwindigkeit des Gepards relativ zum Jeep zu Beginn des 2-s-Intervalls $(-8{,}3\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x$ war, ist sein mittlerer Beschleunigungsvektor relativ zum Kameramann im Jeep

$$\vec{a}_{\mathrm{gem}} = \frac{(18{,}1\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (-8{,}3\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x}{2{,}0\,\mathrm{s}} = (13\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_x$$

und sein Betrag ist $|\vec{a}_{\mathrm{gem}}| = 13\,\mathrm{m/s^2}$. Die Richtung von $\vec{a}_{\mathrm{gem}}$ ist $+\vec{e}_x$, die Beschleunigung zeigt also nach Osten.

(b) Die Geschwindigkeit des Gepards relativ zu dem stationären Beobachter ist zu Beginn des 2-s-Intervalls nach Gl. Ü1.31

$$\vec{v}_{\mathrm{0G,B}} = \vec{v}_{\mathrm{0G,J}} + \vec{v}_{\mathrm{0J,B}} = (-8{,}3\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x + (-5{,}6\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x$$
$$= (-13{,}9\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x\,.$$

Der mittlere Beschleunigungsvektor relativ zu dem stationären Beobachter ist demzufolge

$$\vec{a}_{\mathrm{gem}} = \frac{(12{,}5\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x - (-13{,}9\,\mathrm{m/s})\vec{e}_x}{2{,}0\,\mathrm{s}}$$
$$= (13\,\mathrm{m/s^2})\vec{e}_x\,,$$
$$|\vec{a}_{\mathrm{gem}}| = 13\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem aus Teil (a). Die Richtung von $\vec{a}_{\text{gem}}$ ist $+\vec{e}_x$, die Beschleunigung zeigt also nach Osten.

1.114 Wir verwenden Gl. Ü1.31 und wählen „stromaufwärts" als $+\vec{e}_x$-Richtung. Das Boot bezeichnen wir mit einem Index B, das Wasser mit W, das Ufer mit U und das Kind mit K.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{BU}} &= \vec{v}_{\text{BW}} + \vec{v}_{\text{WU}} = (14\,\text{km/h})\vec{e}_x + (-9\,\text{km/h})\vec{e}_x \\ &= (5\,\text{km/h})\vec{e}_x\,,\end{aligned}$$

folglich ist der Betrag $|\vec{v}_{\text{BU}}| = 5\,\text{km/h}$. Die Richtung von $\vec{v}_{\text{BU}}$ ist $+\vec{e}_x$, also flussaufwärts.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{KU}} &= \vec{v}_{\text{KB}} + \vec{v}_{\text{BU}} = (-6\,\text{km/h})\vec{e}_x + (5\,\text{km/h})\vec{e}_x \\ &= (-1\,\text{km/h})\vec{e}_x\,,\end{aligned}$$

folglich ist der Betrag $|\vec{v}_{\text{KU}}| = 1\,\text{km/h}$. Die Richtung von $\vec{v}_{\text{KU}}$ ist $-\vec{e}_x$, also flussabwärts.

1.115 Wenn die Rolltreppe steht, ist der Geschwindigkeitsbetrag der Person $v_{\text{P}} = \ell/t$, wobei ℓ die Länge der Rolltreppe und t die Zeit bezeichnet, die die Person benötigt, um sie hochzugehen. Damit ist $v_{\text{P}} = (15\,\text{m})/(90\,\text{s}) = 0{,}167\,\text{m/s}$. Die Rolltreppe bewegt sich mit $v_{\text{R}} = (15\,\text{m})/(60\,\text{s}) = 0{,}250\,\text{m/s}$. Der Geschwindigkeitsbetrag, mit dem die Person die sich bewegende Rolltreppe hinauf läuft, ist

$$v = v_{\text{P}} + v_{\text{R}} = 0{,}167\,\text{m/s} + 0{,}250\,\text{m/s} = 0{,}417\,\text{m/s}$$

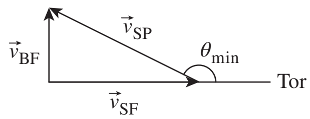
und die Zeit, die benötigt wird, um die Länge der Rolltreppe zu durchlaufen, ist

$$t = \ell/v = (15\,\text{m})/(0{,}417\,\text{m/s}) = 36\,\text{s}\,.$$

Wenn die verschiedenen gegebenen Zeiten unabhängig von der Länge der Rolltreppe sind, dann hängt die Antwort auch nicht von dieser Länge ab. Ausgedrückt in ℓ (in Meter) beträgt der Geschwindigkeitsbetrag (in Meter pro Sekunde) der Person, die die stehende Rolltreppe hinaufläuft, $\ell/9\ 0$, der Geschwindigkeitsbetrag der sich bewegenden Rolltreppe ist $\ell/60$, und der Geschwindigkeitsbetrag der Person auf der sich bewegenden Rolltreppe ist $v = \ell/90 + \ell/60 = 0{,}0278\,\ell$. Die benötigte Zeit ist $t = \ell/v = \ell/0{,}0278\,\ell = 36\,\text{s}$, und sie ist unabhängig von ℓ.

1.116 Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Spielers relativ zum Spielfeld mit $\vec{v}_{\text{SF}}$ und die Relativgeschwindigkeit zwischen Spieler und Ball mit $\vec{v}_{\text{SB}}$. Die Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{BF}}$ des Balls relativ zum Spielfeld ist dann $\vec{v}_{\text{BF}} = \vec{v}_{\text{SF}} + \vec{v}_{\text{SB}}$. Der kleinste erlaubte Winkel $\theta_{\min}$ entspricht der Situation $\vec{v}_{\text{BF}} \perp \vec{v}_{\text{SF}}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}\theta_{\min} &= 180° - \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{v}_{\text{SF}}|}{|\vec{v}_{\text{SB}}|}\right) \\ &= 180° - \cos^{-1}\left(\frac{4{,}0\,\text{m/s}}{6{,}0\,\text{m/s}}\right) = 130°\,.\end{aligned}$$



1.117 Relativ zum Auto hat die Geschwindigkeit der Schneeflocken eine vertikale Komponente von 8,0 m/s und eine horizontale Komponente von $50\,\text{km/h} = 13{,}9\,\text{m/s}$. Der Winkel θ zur Vertikalen wird bestimmt aus

$$\tan\theta = \frac{v_{\text{h}}}{v_{\text{v}}} = \frac{13{,}9\,\text{m/s}}{8{,}0\,\text{m/s}} = 1{,}74\,,$$

was $\theta = 60°$ liefert.

1.118 Wir bezeichnen den Polizeiwagen und den Mann im Auto mit den Indizes P bzw. M. Das verwendete Koordinatensystem ist in Abb. Ü1.A118 gekennzeichnet.

(a) Die Geschwindigkeit des Autofahrers relativ zur Polizei ist

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{MP}} &= \vec{v}_{\text{M}} - \vec{v}_{\text{P}} = (-60\,\text{km/h})\vec{e}_y - (-80\,\text{km/h})\vec{e}_x \\ &= (80\,\text{km/h})\vec{e}_x - (60\,\text{km/h})\vec{e}_y\,.\end{aligned}$$

(b) $\vec{v}_{\text{MP}}$ liegt genau in Richtung der Sichtlinie zwischen den beiden Autos. Wenn wir einen Blick auf Abb. Ü1.A118 werfen, erkennen wir, dass der Vektor von einem Auto zum anderen $\vec{r} = (800\,\text{m})\vec{e}_x - (600\,\text{m})\vec{e}_y$ ist (von M zu P). Da das Verhältnis der Komponenten von $\vec{r}$ dasselbe ist wie bei $\vec{v}_{\text{MP}}$, sind beide Vektoren kollinear.

(c) Nein, sie bleiben unverändert.

1.119 Da die Regentropfen relativ zum Zug vertikal fallen, ist die horizontale Komponente der Geschwindigkeit eines Regentropfens $v_{\text{h}} = 30\,\text{m/s}$, die gleiche wie die Geschwindigkeit des Zugs. Wenn v_{v} die vertikale Geschwindigkeitskomponente und θ den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Vertikalen bezeichnet, dann ist $\tan\theta = v_{\text{h}}/v_{\text{v}}$. Also ist $v_{\text{v}} = v_{\text{h}}/(\tan\theta) = (30\,\text{m/s})/(\tan 70°) = 10{,}9\,\text{m/s}$. Der Geschwindigkeitsbetrag eines Regentropfens ist

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_{\text{h}}^2 + v_{\text{v}}^2} = \sqrt{(30\,\text{m/s}^2) + (10{,}9\,\text{m/s})^2} \\ &= 32\,\text{m/s}\,.\end{aligned}$$

1.120 Zusätzlich zu den Indizes A und B verwenden wir noch W für Wasser. Unser Koordinatensystem wählen wir so, dass $+x$ nach Osten und $+y$ nach Norden zeigt; der Winkel für Osten ist demzufolge 0°, der für Süden −90° oder +270°. Wenn wir Längeneinheiten weglassen, sind immer km gemeint.

(a) Es gilt $\vec{v}_{\text{AW}} = \vec{v}_{\text{AB}} + \vec{v}_{\text{BW}}$ und daher in Betrag-Winkel-Schreibweise (die sich aus einem vektorfähigen Taschenrechner sehr bequem verwenden lässt)

$$\vec{v}_{\text{AB}} = (22, \angle -90°) - (40, \angle 37°) = (56, \angle -125°)\,.$$

In Einheitsvektoren-Schreibweise ist

$$\vec{v}_{AB} = (-32\,\text{km/h})\vec{e}_x - (46\,\text{km/h})\vec{e}_y\,.$$

Selbstverständlich hätten wir auch von Beginn an in Einheitsvektoren-Schreibweise arbeiten können.

(b) Da die Komponenten der Geschwindigkeit konstant sind, bereitet es keine weiteren Schwierigkeiten, sie zu integrieren ($\vec{r} - \vec{r}_0 = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t$), um die Positionen zu ermitteln. Wir erhalten

$$\vec{r} = (2{,}5 - 32t)\vec{e}_x + (4{,}0 - 46t)\vec{e}_y$$

(mit Entfernungen in km und Zeit in h).

(c) Der Betrag von $\vec{r}$ ist $r = \sqrt{(2{,}5 - 32t)^2 + (4{,}0 - 46t)^2}$. Um das Minimum zu finden, leiten wir diesen Ausdruck nach t ab und setzen das Ergebnis gleich null. So erhalten wir eine Gleichung für t

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{6286t - 528}{\sqrt{(2{,}5 - 32t)^2 + (4{,}0 - 46t)^2}} = 0\,;$$

sie liefert $t = 0{,}084\,\text{h}$.

(d) Wenn wir diesen Wert für t wieder in den Ausdruck für die Entfernung zwischen den Schiffen einsetzen, erhalten wir $r = 0{,}2\,\text{km}$. Natürlich wird ein Taschenrechner noch mehr Stellen anzeigen ($r = 0{,}225\ldots$), aber diese sind nicht signifikant; die in den angegebenen Daten enthaltenen Unsicherheiten würden in der Praxis den Kapitänen bereits genug Sorgen bereiten.

1.121 Die Geschwindigkeitsvektoren (relativ zur Küste) der Schiffe A und B sind gegeben durch

$$\vec{v}_A = -\left(v_A \cos 45°\right)\vec{e}_x + \left(v_A \sin 45°\right)\vec{e}_y$$

und

$$\vec{v}_B = -\left(v_B \sin 40°\right)\vec{e}_x - \left(v_B \cos 40°\right)\vec{e}_y$$

(mit $v_A = 24$ Knoten und $v_B = 28$ Knoten). Als Osten verwenden wir $+\vec{e}_x$ und als Norden $\vec{e}_y$.

(a) Ihre Relativgeschwindigkeit ist

$$\begin{aligned}\vec{v}_{AB} &= \vec{v}_A - \vec{v}_B\\ &= \left(v_B \sin 40° - v_A \cos 45°\right)\vec{e}_x\\ &\quad + \left(v_B \cos 40° + v_A \sin 45°\right)\vec{e}_y\,,\end{aligned}$$

der Betrag ist $|\vec{v}_{AB}| = \sqrt{1{,}0^2 + 38{,}4^2} \approx 38$ Knoten. Der Winkel θ, den $\vec{v}_{AB}$ nach Norden bildet, ist gegeben durch

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{AB,x}}{v_{AB,y}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}0}{38{,}4}\right) = 1{,}5°\,,$$

was bedeutet, dass $\vec{v}_{AB}$ 1,5° nach Osten von Norden zeigt.

(b) Da sie zur gleichen Zeit starten, beschreibt ihre Relativgeschwindigkeit, wie schnell sich der Abstand zwischen ihnen vergrößert. Weil die Rate konstant ist, haben wir

$$t = \frac{|\Delta r_{AB}|}{|\vec{v}_{AB}|} = \frac{160}{38} = 4{,}2\,\text{h}\,.$$

(c) Die Geschwindigkeit $\vec{v}_{AB}$ ändert sich in dieser Aufgabe nicht mit der Zeit, und $\vec{r}_{AB}$ ist die gleiche Richtung wie $\vec{v}_{AB}$, weil sie zur gleichen Zeit gestartet sind. Kehren wir den Beobachtungspunkt um, haben wir $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$, sodass $\vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$ (d. h., sie befinden sich 180° einander gegenüber) ist. Wir folgern also, dass B während der Fahrt bei einer Position von 1,5° westlich von Süden relativ zu A bleibt (wobei wir die Erdkrümmung vernachlässigen).

1.122 Der Güterwagen hat relativ zum Erdboden die Geschwindigkeit $\vec{v}_{G,B} = v_1\vec{e}_x$ und die Kugel hat entsprechend die Geschwindigkeit $\vec{v}_{0K,B} = (v_2\cos\theta)\vec{e}_x + (v_2\sin\theta)\vec{e}_y$ relativ zum Boden, bevor sie in den Wagen eintritt (wir vernachlässigen den Einfluss der Schwerkraft auf die Kugel). Innerhalb des Wagens ist ihre Geschwindigkeit relativ zum Erdboden $\vec{v}_{K,B} = (0{,}8v_2\cos\theta)\vec{e}_x + (0{,}8v_2\sin\theta)\vec{e}_y$ (wegen der erwähnten Reduktion um 20 %). Laut Aufgabenstellung ist die Geschwindigkeit der Kugel innerhalb des Wagens *relativ zum Wagen* $\vec{v}_{K,W} = v_3\vec{e}_y$ mit unbekanntem v_3. Mit Gl. Ü1.31 finden wir

$$\begin{aligned}\vec{v}_{K,B} &= \vec{v}_{K,W} + \vec{v}_{W,G}\,,\\ (0{,}8v_2\cos\theta)\vec{e}_x + (0{,}8v_2\sin\theta)\vec{e}_y &= v_1\vec{e}_x + v_3\vec{e}_y\,,\end{aligned}$$

sodass wir durch Gleichsetzen der x-Komponenten θ finden können. Wenn man v_3 bestimmen möchte, kann man die y-Komponenten gleichsetzen und daraus dann mit der Wagenbreite (so bekannt) berechnen, wie lange die Kugel sich im Wagen befindet, doch danach wird in der Aufgabenstellung nicht gefragt (weswegen die Wagenbreite in dieser Aufgabe auch irrelevant ist). Der Vergleich der x-Komponenten ergibt, unter Verwendung der passenden SI-Einheiten,

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{v_1}{0{,}8v_2}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{85\,\text{km/h}\left(\frac{1000\,\text{m/km}}{3600\,\text{s/h}}\right)}{0{,}8(650\,\text{m/s})}\right).\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir 87° für die Richtung von $\vec{v}_{K,B}$ (gemessen von der x-Achse aus, also der Bewegungsrichtung des Wagens). Gefragt ist die Richtung, aus welcher die Kugel abgeschossen wurde, was bedeutet, dass die Antwort auf diese Frage nicht 87°, sondern vielmehr 93° ist (von der Bewegungsrichtung aus gemessen). Etwas präziser ausgedrückt hat die Kugel in dem gewählten Koordinatensystem einen Geschwindigkeitsvektor im ersten Quadranten unter einem Winkel von 87° im Gegenuhrzeigersinn von der Bewegungsrichtung des Zugs entlang der x-Achse. Dies bedeutet, dass die Richtung, aus welcher die Kugel abgefeuert wurde, im dritten Quadranten bei einem Winkel von −93° liegt (d. h. 93° im Uhrzeigersinn von $+x$).

1.123 Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck, beginnend an der Lichtung am Südufer, von wo aus wir eine

200 m lange Linie genau nach Norden (in der Skizze nach oben) über den Fluss ziehen. Von dort aus ziehen wir eine weitere Linie mit der Länge 82 m + (1,1 m/s)t am Nordufer entlang nach Westen (stromaufwärts, nach links in der Skizze). Die Abhängigkeit von t beschreibt die Entfernung, über die der Fluss das Boot in der Zeit t flussabwärts treiben wird. Die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks (der Pfeil in der Skizze) hängt ebenfalls von t sowie von der Geschwindigkeit des Boots (relativ zum Wasser) ab; wir setzen sie gleich der pythagoreischen „Summe" der Dreiecksseiten

$$(4{,}0)t = \sqrt{200^2 + (82 + 1{,}1t)^2}\,.$$

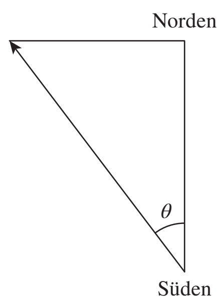
Das führt zu der folgenden quadratischen Gleichung für t

$$46\,724 + 180{,}4t - 14{,}8t^2 = 0\,.$$

(a) Wir lösen zuerst die Gleichung für t und erhalten $t = 62{,}6$ s.

(b) Der Winkel zwischen der nach Norden gerichteten Seite des Dreiecks und der Hypotenuse (von der wir die westliche Abweichung aus der Nordrichtung messen) ist dann

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{82 + 1{,}1t}{200}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{151}{200}\right) = 37°\,.$$



1.124 Wir berechnen die Koordinatenpaare (x, y) aus $x = (v_0 \cos\theta)t$ und $y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$ für $t = 20$ s und die in der Aufgabe angegebenen Geschwindigkeiten und Winkel.

(a) So erhalten wir

$$\begin{aligned}(x_A, y_A) &= (10{,}1\,\text{km}, 0{,}556\,\text{km})\,,\\ (x_B, y_B) &= (12{,}1\,\text{km}, 1{,}51\,\text{km})\,,\\ (x_C, y_C) &= (14{,}3\,\text{km}, 2{,}68\,\text{km})\,,\\ (x_D, y_D) &= (16{,}4\,\text{km}, 3{,}99\,\text{km})\,.\end{aligned}$$

Das letzte Paar, $(x_E, y_E) = (18{,}5\,\text{km}, 5{,}53\,\text{km})$, tragen wir im folgenden Teil auf.

(b) Vertikale und horizontale Achse sind in Kilometern angegeben. Die Kurve beginnt nicht am Ursprung (beachten Sie die Beschriftung!). Eine an die Datenpunkte angepasste Kurve ist nicht eingezeichnet, aber leicht vorstellbar.