



Bibliothek des technischen Wissens

Horst Herr

Falko Wieneke

Bernd Mattheus

Technische Mechanik

Statik ■ Dynamik ■ Festigkeit

11., überarbeitete Auflage 2016

mit sehr vielen

Musteraufgaben (Lehrbeispielen),

Übungsaufgaben (Aufgaben mit vollständigen Lösungswegen im Anhang)

und

Vertiefungsaufgaben (Aufgaben mit Ergebnissen im Anhang)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 5021X

Autor (Hrsg.) bis zur 10. Auflage:

Horst Herr VDI, Dipl.-Ing., Fachoberlehrer 65779 Kelkheim im Taunus

Mitautoren:

Falko Wieneke Dipl.-Ing., Studiendirektor 45257 Essen
Bernd Mattheus Dr.-Ing. 45130 Essen

Lektorat:

Falko Wieneke

Lektor der 1. Auflage:

Armin Steinmüller, Dipl. Ing., Verlagslektor, 20251 Hamburg

Umschlaggestaltung:

braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Umschlagfotos:

Falko Wieneke; Vektor-Illustration: © amgun, Fotos: © anekoho und © 06photo – shutterstock.com

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern
Wiekreativ Designstudio, Uwe Wiegand, 59939 Olsberg

11. Auflage 2016

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie
bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

Diesem Buch wurden die neuesten DIN-Normen zugrunde gelegt. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass nur die DIN-Normen selbst verbindlich sind. Diese können in den öffentlichen DIN-Normen-Auslegestellen eingesehen oder durch die Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstraße 6, 10787 Berlin, bezogen werden.

ISBN 978-3-8085-5035-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: rkt, 42799 Leichlingen, www.rktypo.com

Druck: Tutte Druckerei & Verlagsservice GmbH, 94121 Salzweg/Passau

Vorwort

Man teile jede einzelne der Schwierigkeiten, die man lösen will, in so viele Teile wie möglich, und so müsste es möglich sein, sie zu lösen.
Descartes

Wer Maschinen und Anlagen konstruiert, baut oder betreibt, benötigt Kenntnisse aus der Technischen Mechanik. Innerhalb dieser Ingenieurwissenschaft, kurz mit TM bezeichnet, unterscheidet man die Teilgebiete Statik, Dynamik und Festigkeitslehre. Als Grundlagenfächer sind sie die Basis für das Verständnis des Maschinen- und Anlagenbaus und des Bauwesens. Die Technische Mechanik, ein auf die Lösung technischer Probleme angewandtes Teilgebiet der Physik, gilt in ihrer Handhabung als besonders schwierig. Für viele Studenten ist sie neben der Mathematik das größte Hindernis für einen erfolgreichen Abschluss der Studien. Ziel dieses Buches ist es, dem Lernenden zu helfen, die unumgänglichen Schwierigkeiten zu bewältigen, indem er begreift, dass die vielen Einzelheiten durch einige wenige Prinzipien geordnet werden, deren wiederholte Anwendung vom Leichten zum Schweren fortschreitend ihn befähigen, selbständig Aufgaben zu lösen.

Umfang, Auswahl und Darbietung der Lerninhalte orientieren sich an den Lehrplänen der Fachschulen für Technik (**Technikerschulen**), Fachrichtung Maschinenbau der Kultusministerien der Bundesländer. Da es sich um das Grundlagenwissen der Technischen Mechanik handelt, ist dieses Lehrbuch auch im Unterricht der **Technischen Gymnasien**, der **Fachoberschulen Technik** und für die **berufliche Fortbildung** einsetzbar. Den Studenten der Fachhochschulen oder Technischen Universitäten erleichtert das Durcharbeiten dieses Buches das Verständnis ihrer Vorlesungen. Für sie und alle anderen, die im **Selbststudium** alte Kenntnisse erneuern oder neue erwerben wollen, sind die Lektionen nach einem einheitlichen, auf der folgenden Seite beschriebenen Schema aufgebaut.

Der Beruf des Technikers verlangt es, in einer technischen Aufgabe das physikalische Problem zu erkennen und diesem eine mathematische Form zu geben, mit der gerechnet werden kann. Die Aufteilung des gesamten Stoffes in kurze, überschaubare Lektionen ermöglicht es, jeweils ein Problem in den Vordergrund zu stellen. Wo es sich anbietet, werden dabei Beispiele aus der Praxis des Maschinenbaus herangezogen. Eine Zeichnung stellt das Problem dar und aus den erkennbaren Zusammenhängen werden dann Berechnungsgleichungen und Grundlagenformeln entwickelt. Entsprechend der Zielsetzung dieses Buches wird auf die Methoden der höheren Mathematik verzichtet. Die ausgewählten Aufgaben variieren die Problemlösungsmöglichkeiten und führen zur Festigung der erworbenen Fertigkeiten und Kenntnisse.

Die vorliegende **11. Auflage** des Buches wurde im Vergleich zur 10. Auflage überarbeitet und aktualisiert. Die Gliederung der Hauptkapitel mit den Buchstaben A (Statik), B (Dynamik) und C (Festigkeitslehre) spiegelt auch die Schwerpunktthemen der **Technischen Mechanik** wieder. Durch die im Buch vielfältig aufgeführten Verweise zu den verschiedenen Kapiteln wird für den Lernenden eine Querverbindung zwischen den Kapiteln geschaffen.

Die 11. Auflage des Buches enthält eine Vielzahl an farbig gestalteten Bildern, die dem Lernenden die theoretischen Zusammenhänge anschaulich näher bringen. Zusätzliche Bilder aus der Praxis führen zu einem besseren Realitätsbezug. Angegebene Merksätze fassen die theoretischen Inhalte in einer kurzen Form zusammen. Formeln werden, wenn erforderlich, auch hergeleitet, damit ein besseres Verständnis für den Lernenden entsteht. Die hierbei verwendeten Formelzeichen richten sich nach den DIN-, EN- und ISO-Normen sowie der einschlägigen Literatur.

Das vorliegende Buch bietet dem Lernenden eine Vielzahl an **Musteraufgaben**, **Übungsaufgaben** und **Vertiefungsaufgaben** mit entsprechenden Lösungen in unterschiedlicher Tiefe. Der Lernende wird somit zu einer guten Einübung des Gelernten geführt.

Wir wünschen unseren Leserinnen und Lesern viel Freude beim Einstieg in die Technische Mechanik und bei der Anwendung der speziellen Gesetze auf die moderne Technik.

Hinweise, die zur Verbesserung und Weiterentwicklung dieses Buches beitragen, nehmen wir gerne unter der Verlagsadresse oder per E-Mail (lektorat@europa-lehrmittel.de) entgegen.

Zur Arbeit mit diesem Buch

Soll es **unterrichtsbegleitend** verwendet werden, findet der Lernende hier die im Unterricht erläuterten Erkenntnisse und Zusammenhänge und die daraus resultierenden Formeln in den thematisch ausgerichteten Lektionen. Während die Übungsaufgaben mit dem Lösungsanhang je nach Kenntnisstand der häuslichen Nacharbeit dienen, wählt der Dozent aus den Vertiefungsaufgaben diejenigen aus die seinen Intentionen entsprechen.

Beim **Selbststudium** ist es möglich, einige Lektionen, die nicht weiterführend sind, auszulassen. Sinnvoll aber ist es, jede Lektion, deren Inhalt man sich aneignen will, vollständig und in der gegebenen Reihenfolge durcharbeiten.

Die **Informationen (I)** befinden sich meist am Beginn der Lektionen, oft sind sie aber auch innerhalb der Lektion aufgeteilt. Die Erläuterungen der physikalisch-technischen Zusammenhänge führen in der Regel zu einer oder mehreren Formeln oder Konstruktionsverfahren.

Die Anwendung der erworbenen Kenntnisse erfolgt in **Musteraufgaben (M)**. Hier werden exemplarisch Problemstellungen aufgezeigt und ausführliche Lösungen vorgestellt, die einen möglichen Weg aufzeigen. In vielen Fällen sind alternative Lösungswege möglich.

Gegebenfalls werden in den Musteraufgaben noch spezielle Kenntnisse vermittelt.

Die darauf folgenden **Übungsaufgaben (Ü)** dienen der Wiederholung und Vertiefung sowie der Überprüfung des Gelernten durch den Studierenden.

Deshalb befinden sich **am Schluss des Buches ausführliche Lösungsgänge**. Diese Buchseiten sind mit einem **gelben Randdruck** gekennzeichnet.

Möchte der Lernende sein Wissen weiter vertiefen oder sich auf Prüfungen vorbereiten, löst er zweckmäßig die **Vertiefungsaufgaben (V)**.

Am **Schluss des Buches befinden sich die Ergebnisse dieser Vertiefungsaufgaben**. Diese Buchseiten sind mit einem **grünen Randdruck** gekennzeichnet.

Der Zweck dieses pädagogischen Prinzips I, M, Ü, V innerhalb jeder Lektion besteht darin, dass der Lernende in mehreren Stufen, d.h. mit einem zunehmenden Grad an Selbständigkeit, zum Lehrziel geführt wird. Deshalb musste nach meinem pädagogischen Verständnis auch auf die Lösungsgänge der Vertiefungsaufgaben zwingend verzichtet werden.

Die **Kombination aus Unterricht und Selbststudium**, z.B. in Abendkursen, findet in der Methodik dieses Lehrbuches eine Unterstützung durch die Verlegung von Unterrichtssequenzen in die Hausarbeit.

Das Buch ist in die Abschnitte

- A (Statik)**
- B (Dynamik)**
- C (Festigkeitslehre)**

unterteilt, und die Bezeichnung der Lektionen besteht aus einem Buchstaben und einer Zahl, und zwar vor den Überschriften der Lektionen, z. B.:

B17 Lektion 17 im Abschnitt B

Diese Kennzeichnung ermöglicht die Verkettung der Sachverhalte in der Technischen Mechanik durch ein besonderes Hinweissystem, z. B.:

(→ **C13**): Weitere Informationen im Abschnitt C, Lektion 13

In das Buch ist also gewissermaßen ein „**Fahrplan durch die Technische Mechanik**“ eingebaut. Dieser ermöglicht eine optimale Lehrbuchnutzung und lässt den Lernenden eher begreifen, dass, die Physik und im Speziellen die Technische Mechanik – trotz der vielen Teilgebiete und Richtungen – eine „**zusammenhängende**“ **Wissenschaft** ist, und wir hoffen, dass der pädagogische Wert seine Anerkennung findet.

Wir gehen davon aus, dass die vielen über das gesamte Buch verteilten „**Praxisbilder**“ bei den Lernenden einen zusätzlichen Motivationsschub bewirkt.

A	STATIK	
A1	Die Verknüpfung von Physik und Technik	3
1.1	Bedeutung der klassischen Physik für die Technik	3
1.1.1	Zweige und Entwicklungszeiträume der klassischen Physik	3
1.2	Bedeutung der „Mechanik der festen Körper“ für technische Problemlösungen	4
1.2.1	Teilgebiete der Technischen Mechanik	4
	• Statik	4
	• Kinematik	5
	• Kinetik	6
	• Dynamik	6
	• Festigkeitslehre	6
1.3	Lösungsmethoden der Statik	7
1.4	Zustandsform der Werkstoffe und Werkstoffeigenschaften	8
A2	Kraft und Kraftmoment	10
2.1	Basisgrößen und abgeleitete Größen	10
2.2	Physikalische Größen der Statik	10
2.2.1	Kraft und Kraftmoment als physikalische Größen	10
	• Krafteinheit	10
	• Gewichtskraft und die alte Krafteinheit	11
	• Das Kraftmoment	11
2.2.2	Wirkungen der Kraft auf einen Körper	12
2.2.3	Kraft als Vektor und die Kraftmerkmale	13
	• Erweiterungssatz	13
	• Längsverschiebungssatz	14
	• Richtung einer Kraft im rechtwinkligen Koordinatensystem	14
A3	Freiheitsgrade eines Körpers	17
3.1	Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene	17
3.2	Freiheitsgrade eines Körpers im Raum	17
A4	Freimachen von Bauteilen	18
4.1	Wechselwirkungsgesetz	18
4.2	Freimachen	18
4.2.1	Regeln für das Freimachen von Bauteilen	20
A5	Kräfte auf derselben Wirkungslinie	24
5.1	Hauptaufgaben der Statik	24
5.1.1	Die erste Hauptaufgabe der Statik	24
5.1.2	Die zweite Hauptaufgabe der Statik	24
5.2	Die zwei Kräftesysteme der Statik	24
5.3	Sonderfall des zentralen Kräftesystems: gemeinsame Wirkungslinie	25
5.3.1	Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden	25
5.3.2	Rechnerische Ermittlung der Resultierenden	26
A6	Zusammensetzen von zwei Kräften, deren Wirkungslinien (WL) sich schneiden	28
6.1	Anwendung des Längsverschiebungssatzes	28
6.2	Der Parallelogrammsatz	28

A7	Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte	32
7.1	Die Richtungen beider Kraftkomponenten sind bekannt	32
7.1.1	Horizontal- und Vertikalkomponente	32
7.2	Größe und Richtung einer Kraftkomponente sind bekannt	33
7.3	Das Übertragen der Kraftrichtungen vom LP in den KP	33
A8	Zusammensetzen von mehr als zwei in einem Punkt angreifenden Kräften	38
8.1	Lösung der Aufgabe mit mehreren Kräfteparallelogrammen	38
8.2	Lösung mittels Krafteck	38
A9	Erste Gleichgewichtsbedingung der Statik	41
9.1	Das geschlossene Krafteck bei Kräftegleichgewicht	41
9.2	Rechnerische Ermittlung der Resultierenden aus den Horizontal- und Vertikalkomponenten	41
A10	Bestimmung unbekannter Kräfte im zentralen Kräftesystem	45
10.1	Kräftegleichgewicht im Zentralpunkt	45
10.1.1	Zeichnerische Ermittlung unbekannter Kräfte	45
10.1.2	Rechnerische Ermittlung unbekannter Kräfte	46
•	Die Vorzeichenregel	46
A11	Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem	49
11.1	Nochmalige Definition des allgemeinen Kräftesystems	49
11.2	Wiederholte Konstruktion des Kräfteparallelogrammes	50
11.3	Verwendung von Zwischenresultierenden	50
A12	Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden mit dem Seileckverfahren	52
12.1	Erforderlichkeit eines universellen Lösungsverfahrens zur zeichnerischen Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem	54
12.2	Zusammensetzen von zwei Kräften mit der Seileckkonstruktion	54
12.2.1	Lösungsverfahren	54
12.2.2	Konstruktionsbegründung	55
12.2.3	Begriffe	55
12.3	Zusammensetzen von mehr als zwei Kräften mit der Seileckkonstruktion	55
12.3.1	Lösungsschritte	55
12.3.2	Konstruktionsbegründung	56
A13	Kräfte als Ursache einer Drehbewegung	59
13.1	Kraftmoment der Resultierenden	59
13.2	Drehrichtung und wirksamer Hebelarm	59
13.2.1	Drehsinn und Vorzeichen des Drehmomentes	59
13.2.2	Das resultierende Drehmoment	60
13.2.3	Erzeugung von Drehmomenten durch Schrägkräfte	60
13.3	Die zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik	61
13.4	Kräftepaar und der Parallelverschiebungssatz	62
A14	Rechnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem	65
14.1	Der Momentensatz	65
14.2	Bestimmung der Resultierenden mit Hilfe des Momentensatzes	65

A15	Bestimmung der Auflagerkräfte beim Träger auf zwei Stützen	68
15.1	Rechnerische Bestimmung der Auflagerkräfte	68
15.2	Zeichnerische Bestimmung der Auflagerkräfte	70
A16	Bestimmung von Schwerpunkten mittels Momentensatz	73
16.1	Der Schwerpunkt als Massenmittelpunkt	73
16.2	Linien-schwerpunkte	74
16.2.1	Gerade Linie (Strecke)	74
16.2.2	Gerader Linienzug	74
16.2.3	Gekrümmte Linie	76
16.3	Flächenswerpunkte	76
16.3.1	Schwerpunktlage von Einzelflächen	76
16.3.2	Schwerpunktlage von zusammengesetzten Flächen	77
16.4	Körperschwerpunkte	79
A17	Bestimmung von Schwerpunkten mittels Seileckkonstruktion	83
17.1	Zeichnerische Bestimmung von Linien-schwerpunkten	83
17.2	Zeichnerische Bestimmung von Flächenswerpunkten	84
A18	Gleichgewicht und Kippen	85
18.1	Die Gleichgewichtsarten	85
18.2	Die Standfestigkeit der Körper	86
18.3	Kippsicherheit	86
A19	Regeln von Guldin	89
19.1	Volumenberechnung	89
19.2	Oberflächenberechnung (Mantelberechnung)	90
A20	Statisch bestimmtes ebenes Fachwerk	90
20.1	Fachwerkdefinition	92
20.2	Das ideale Fachwerk	92
20.3	Bedingung des statisch bestimmten Fachwerkes	93
20.4	Fachwerkformen	93
A21	Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Krafteck	95
A22	Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Cremonaplan	98
A23	Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Culmann'schem Schnittverfahren	100
A24	Rechnerische Stabkraftermittlung mittels Ritter'schem Schnittverfahren	102
A25	Die Reibungskräfte	105
25.1	Äußere und innere Reibung	105
25.2	Haft- und Gleitreibung	105
25.3	Das Reibungsgesetz nach Coulomb	106
25.3.1	Die Reibungszahl	106
•	Die Einflussparameter der Reibungszahl	107

A26	Reibung auf der schiefen (geneigten) Ebene	110
26.1	Bestimmung der Reibungszahlen	110
26.2	Selbsthemmung	111
26.2.1	Selbsthemmungskriterien	111
26.2.2	Reibungsdreieck und Reibungskegel	111
26.3	Wirkkräfte auf der schiefen Ebene	113
26.3.1	Kraft parallel zur schiefen Ebene	113
	• Zugkraft bei Aufwärtsbewegung	113
	• Haltekraft bei Abwärtsbewegung	114
26.3.2	Kraft parallel zur Grundfläche der schiefen Ebene	115
	• Aufwärtsbewegung	115
	• Abwärtsbewegung	116
A27	Reibung an Geradföhrungen	119
27.1	Flachföhrungen	119
27.2	Prismenföhrungen	119
27.2.1	Unsymmetrische Prismenföhrung	120
27.2.2	Symmetrische Prismenföhrung	120
27.3	Zylindurföhrungen	121
A28	Reibung in Gleitlagern	123
28.1	Tragzapfen (Querlager)	123
28.2	Spurzapfen (Längslager)	123
A29	Gewindereibung	125
29.1	Bewegungsgewinde	125
29.1.1	Schraube mit Flachgewinde	125
29.1.2	Schraube mit Spitzgewinde oder Trapezgewinde	126
29.2	Befestigungsgewinde	128
A30	Seilreibung	130
A31	Reibungsbremsen und Reibungskupplungen	133
31.1	Reibungsbremsen	133
31.1.1	Backenbremsen	133
31.1.2	Bandbremsen	134
	• Einfache Bandbremse	135
	• Die Summenbandbremse	135
	• Die Differentialbandbremse	135
31.1.3	Scheibenbremsen	135
31.2	Reibungskupplungen	136
A32	Rollreibung	138
32.1	Der Rollwiderstand	138
32.2	Der Fahrwiderstand	139
32.2.1	Die Rollbedingung	140

B	DYNAMIK	
B1	Gleichförmige geradlinige Bewegung	145
1.1	Bewegungskriterien und Geschwindigkeit	145
1.2	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	148
B2	Ungleichförmige geradlinige Bewegung	151
2.1	Merkmale einer ungleichförmigen Bewegung	151
2.1.1	Definition der Beschleunigung	151
2.2	Die ungleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung	152
2.3	Die gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung	152
2.3.1	Beschleunigung aus dem Ruhezustand	152
2.3.2	Gleichmäßige Beschleunigung bei vorhandener Anfangsgeschwindigkeit	154
2.4	Verzögerte Bewegungen	155
2.4.1	Die gleichmäßig verzögerte Bewegung	155
2.5	Freier Fall und senkrechter Wurf nach oben	157
2.5.1	Fallbeschleunigung	157
2.6	Weitere Formeln zur gleichmäßig beschleunigten (verzögerten) Bewegung	159
2.6.1	Gleichmäßige Beschleunigung mit $v_0 = 0$ und gleichmäßige Verzögerung mit $v_t = 0$	159
2.6.2	Gleichmäßige Beschleunigung mit $v_0 \neq 0$ und gleichmäßige Verzögerung mit $v_t \neq 0$	159
B3	Zusammensetzung von Geschwindigkeiten	162
3.1	Vektoren und Skalare	162
3.2	Das Überlagerungsprinzip bei geradlinigen Bewegungen	162
3.3	Das Überlagerungsprinzip bei kreisförmigen Bewegungen	163
3.4	Die vektorielle Addition von Geschwindigkeiten	164
3.5	Führungs-, Relativ- und Absolutgeschwindigkeit	166
B4	Freie Bewegungsbahnen	168
4.1	Der Grundsatz der Unabhängigkeit	168
4.2	Der schiefe Wurf	168
4.2.1	Zerlegen eines Vektors in seine Komponenten	170
4.3	Der waagerechte Wurf	171
B5	Trägheit der Körper	174
5.1	Das erste Newton'sche Axiom	174
5.2	Das zweite Newton'sche Axiom	175
5.2.1	Die Krafteinheit	176
5.2.2	Die Gewichtskraft	176
B6	Das Prinzip von d'Alembert	179
6.1	Erweitertes dynamisches Grundgesetz	179
6.1.1	Bewegung auf horizontaler Bahn	179
6.1.2	Bewegung auf vertikaler Bahn	180
6.1.3	Bewegung auf der schiefen Ebene	182
	• Die Steigung auf der schiefen Ebene	182
	• Kräfte bei beschleunigter Aufwärtsbewegung auf der schiefen Ebene	183
	• Kräfte bei beschleunigter Abwärtsbewegung auf der schiefen Ebene	183

B7	Kurzzeitig wirkende Kräfte	186
7.1	Die Bewegungsgröße (Impuls)	186
7.1.1	Die Impulsänderung eines Körpers	186
7.1.2	Die Impulserhaltung	187
7.2	Der Stoß	188
7.2.1	Der unelastische Stoß	189
7.2.2	Der elastische Stoß	189
7.2.3	Der halbelastische Stoß	192
7.2.4	Der schiefe Stoß	192
B8	Arbeit und Energie	193
8.1	Die mechanische Arbeit	193
8.1.1	Die zeichnerische Darstellung der mechanischen Arbeit	194
8.1.2	Die Arbeitskomponente der Kraft	194
8.1.3	Der physikalische Unterschied zwischen mechanischer Arbeit und Drehmoment ..	195
8.2	Energiearten und Energiespeicherung	195
8.3	Die Gleichwertigkeit der mechanischen Arbeit und der mechanischen Energie	196
8.3.1	Hubarbeit und potentielle Energie	196
	• Arbeit auf der schiefen Ebene und die goldene Regel der Mechanik	196
8.3.2	Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie	199
	• Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie	200
8.4	Der Energieerhaltungssatz und Beispiele der Energieerhaltung	200
8.4.1	Energieerhaltung bei der Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie	201
8.4.2	Energieerhaltung beim wirklichen Stoß	202
8.5	Weitere Formen der mechanischen Arbeit	203
8.5.1	Die Kolbenarbeit	203
8.5.2	Die Federspannarbeit als Formänderungsarbeit	204
	• Federspannarbeit bei der Verformung aus ungespanntem Zustand	204
	• Federspannarbeit bei der Verformung einer Feder mit Vorspannung	205
B9	Mechanische Leistung	207
9.1	Leistung als Funktion von Energie und Zeit	207
9.2	Leistung als Funktion von Kraft und Geschwindigkeit	208
B10	Reibungsarbeit und Wirkungsgrad, Reibungsleistung	210
10.1	Reibungsarbeit	210
10.2	Energieumwandlung bei der Reibung	211
10.2.1	Umwandlung von Reibungsarbeit in Wärmeenergie	211
10.2.2	Umwandlung von Reibungsarbeit in Schwingungsenergie	211
10.3	Der mechanische Wirkungsgrad	212
10.3.1	Der Gesamtwirkungsgrad einer Maschinenanlage	213
10.4	Die Reibungsleistung	214
B11	Wirkungsgrad wichtiger Maschinenelemente und Baugruppen	216
11.1	Gerade Führungen	216
11.1.1	Flachführungen	216
11.1.2	Symmetrische Prismenführung	217
11.1.3	Unsymmetrische Prismenführung	217
11.1.4	Zylinderführung	217

11.2	Schraubenwirkungsgrad	218
11.2.1	Flachgewinde	218
11.2.2	Spitz- und Trapezgewinde	219
B12	Drehleistung	222
12.1	Rotationsbewegung	222
12.2	Drehzahl und Umfangsgeschwindigkeit	223
12.3	Berechnung der Drehleistung bei gleichförmiger Drehbewegung	224
12.3.1	Berechnung der Drehleistung aus Drehmoment und Drehzahl	225
B13	Rotationskinematik	227
13.1	Bewegungszustände der Rotation	227
13.1.1	Die gleichförmige Drehbewegung	227
	• Winkelgeschwindigkeit	227
	• Die Umfangsgeschwindigkeit als Funktion der Winkelgeschwindigkeit	228
	• Die Drehleistung als Funktion der Winkelgeschwindigkeit	228
	• Der Drehwinkel bei gleichförmiger Rotation	228
13.1.2	Die gleichmäßig beschleunigte oder verzögerte Drehbewegung	229
	• Die Winkelbeschleunigung	229
13.2	Analogien zwischen Translation und Rotation	230
B14	Rotationsdynamik	234
14.1	Die Fliehkraft	234
14.1.1	Berechnung der Fliehkraft	234
14.2	Coriolisbeschleunigung und Corioliskraft	237
B15	Kinetische Energie rotierender Körper	240
15.1	Rotationsenergie als kinetische Energie	240
15.2	Das Trägheitsmoment	241
15.2.1	Das Trägheitsmoment einer Punktmasse	241
15.2.2	Das Trägheitsmoment einfacher Drehkörper	242
15.2.3	Trägheitsmomente weiterer wichtiger Drehkörper	243
15.2.4	Trägheitsmomente zusammengesetzter Körper	244
	• Verschiebungssatz von Steiner	245
15.2.5	Reduzierte Masse	246
15.2.6	Der Trägheitsradius	247
15.3	Dynamisches Grundgesetz der Drehbewegung	248
15.4	Dreharbeit in Abhängigkeit von Drehmoment und Drehwinkel	249
15.5	Drehimpuls und Drehstoß	250
15.5.1	Die Drehimpulserhaltung (Drallerhaltung)	250
B16	Übersetzungsverhältnis beim Riementrieb	253
16.1	Einfacher Riementrieb	253
16.2	Doppelter Riementrieb und Mehrfachriementrieb	255
B17	Übersetzungen beim Zahntrieb und in Getrieben	256
17.1	Einfacher Zahntrieb	256
17.2	Doppelter Zahntrieb und Mehrfachzahntrieb	256
17.2.1	Die Bedeutung des Zwischenrades	257

17.3	Drehzahlen bei gestuften Schaltgetrieben	258
17.4	Drehzahlen bei stufenlosen Antrieben	259
17.5	Getriebewirkungsgrad in Abhängigkeit von Drehmoment und Übersetzungsverhältnis	259
B18	Kurbeltrieb	261
18.1	Die Schubkurbel	261
18.1.1	Der Kolbenweg	261
	• Näherungsgleichung zur Berechnung des Kolbenweges	262
18.1.2	Die Kolbengeschwindigkeit	262
18.1.3	Die Kolbenbeschleunigung	262
18.2	Die Kurbelschleife	262
C	FESTIGKEITSLEHRE	
C1	Aufgabe der Festigkeitslehre	267
1.1	Die drei Hauptaufgaben der Festigkeitslehre	267
1.1.1	Ermittlung der Bauteilabmessungen	267
1.1.2	Ermittlung der übertragbaren Kräfte und Momente	267
1.1.3	Werkstoffwahl	267
1.2	Der idealisierte Körper	268
1.3	Gültigkeitsbereich der elementaren Festigkeitslehre	268
C2	Spannung und Beanspruchung	269
2.1	Äußere Kraft und die Beanspruchung durch innere Kräfte	269
2.2	Das Schneiden des Bauteiles zur Ermittlung der inneren Kraft und des inneren Moments... ..	269
2.3	Begriff und Ermittlung der Spannung	270
2.3.1	Normalspannungen	270
2.3.2	Schubspannungen	271
2.4	Elementarbeanspruchungen an stabförmigen Körpern	271
2.5	Zusammengesetzte Beanspruchungen	272
C3	Beanspruchung auf Zug oder Druck	273
3.1	Die statische Beanspruchung	273
3.2	Beanspruchung auf Zug	273
3.2.1	Begriff der zulässigen Spannung	274
3.3	Beanspruchung auf Druck und gefährdeter Querschnitt	275
3.4	Beispiele für das Erkennen des gefährdeten Querschnitts	276
3.4.1	Ketten	276
3.4.2	Die Reißlänge	277
3.4.3	Auf Zug und Druck beanspruchte Schrauben	278
C4	Flächenpressung und Lochleibung	281
4.1	Flächenpressung an ebenen Flächen	281
4.2	Flächenpressung an geneigten ebenen Flächen	281
4.3	Flächenpressung bei Gewinden	283
4.4	Flächenpressung an gewölbten Flächen und Lochleibung	284
4.5	Einflussgrößen auf die zulässige Flächenpressung	286

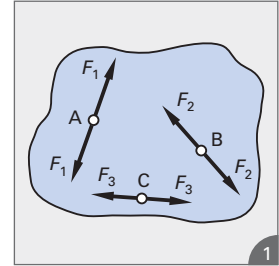
C5	Beanspruchung auf Abscherung	288
C6	Das Hooke'sche Gesetz für Zug und Druck	292
6.1	Die Kraft als Ursache von Verformungen	292
6.2	Arten der Formänderung eines Körpers	292
6.2.1	Die elastische Verformung	293
6.2.2	Die plastische Verformung	293
6.3	Das Gesetz von Hooke	294
6.4	Die Messung von Kräften	295
6.4.1	Kraftmessung aufgrund der beschleunigenden Wirkung	295
6.4.2	Kraftmessung aufgrund der verformenden Wirkung	295
6.5	Hooke'sches Gesetz und Bauteildimensionierung	296
6.5.1	Dehnung und Verlängerung	296
6.5.2	Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung	297
C7	Querkontraktion	301
7.1	Definition der Querkontraktion	301
7.2	Zusammenhang zwischen Längsdehnung und Querdehnung	301
C8	Belastungsgrenzen	303
8.1	Spannungs-Dehnungs-Diagramm	303
8.2	Die Grenzspannungen im σ, ε -Diagramm	304
8.3	Die drei verschiedenen Belastungsfälle	304
8.3.1	Belastungsfall I	304
8.3.2	Belastungsfall II	305
8.3.3	Belastungsfall III	305
8.4	Einfacher Sicherheitsbegriff und zulässige Spannungen	306
8.4.1	Die zulässige Spannung bei statischer Beanspruchung	306
8.4.2	Das Festlegen der Sicherheitszahl ν und Angaben über zulässige Spannungen	306
8.4.3	Einige wichtige Zusammenhänge zwischen verschiedenen Spannungen	307
C9	Wärmespannung und Formänderungsarbeit	310
9.1	Wärmespannung	310
9.1.1	Einfluss der Temperatur auf das Werkstoffverhalten	310
9.1.2	Wärmedehnung metallischer Werkstoffe	310
9.2	Formänderungsarbeit	312
C10	Verformung bei Scherung und Flächenpressung	314
10.1	Das Hooke'sche Gesetz für Scherbeanspruchung (Schub)	314
10.2	Die Hertz'schen Gleichungen	315
10.2.1	Pressung zwischen zwei Zylindern (Linienpressung)	315
10.2.2	Pressung zwischen zwei Kugeln (Punktpressung)	316
C11	Auf Biegung beanspruchte Bauteile	319
11.1	Beanspruchungen, die oftmals in Verbindung mit der Biegung auftreten	319
11.2	Der Träger	319
11.2.1	Lagerung der Träger	320
11.2.2	Trägerbezeichnungen	320
	• Trägerbezeichnungen nach der Trägerlagerung	320
	• Trägerbezeichnungen nach der Bauart	321
11.2.3	Trägerbelastungen und Belastungssymbole	321
11.2.4	Der statisch bestimmte oder statisch unbestimmte Träger	321

C12	Die Biegebeanspruchung	323
12.1	Abhängigkeit der Biegespannung vom Biegemoment	323
12.2	Abhängigkeit der Biegespannung von Form und Lage der Querschnittsfläche	324
12.3	Innere Kräfte und innere Momente bei Biegebeanspruchung	324
12.4	Vorzeichenregeln für Biegemomente und Querkkräfte	325
12.4.1	Biegemomente	325
12.4.2	Querkkräfte	325
12.5	Verteilung und Berechnung der Biegespannung	325
12.6	Zulässige Biegespannungen	327
12.7	Bedingungen für die Gültigkeit der Biegehauptgleichung	329
C13	Rechnerische Ermittlung von Trägheits- und Widerstandsmomenten	332
13.1	Äquatoriale Trägheitsmomente	332
13.2	Das polare Trägheitsmoment	332
13.3	Der Verschiebungssatz von Steiner	332
13.4	Trägheitsmomente und Widerstandsmomente einiger technischer Querschnitte	336
13.4.1	Rechteckquerschnitt	336
13.4.2	Kreisquerschnitt	336
13.4.3	Dreieckquerschnitt	336
13.5	Trägheits- und Widerstandsmomente zusammengesetzter Flächen	336
C14	Schiefe Biegung	343
14.1	Hauptachsen im biegebeanspruchten Querschnitt	343
14.1.1	Ermittlung der Hauptachsen und der Hauptträgheitsmomente	344
	• Rechnerische Ermittlung der Hauptträgheitsmomente	344
	• Zeichnerische Ermittlung der Hauptträgheitsmomente	346
14.2	Ermittlung der Biegespannung	347
14.2.1	Lastebene liegt in einer der Hauptachsen (einachsige Biegung)	347
14.2.2	Die Biegespannung bei zweiachsiger Biegung	348
	• Biegespannungen in symmetrischen Querschnitten	348
	• Biegespannungen in unsymmetrischen Querschnitten	349
C15	Biegemomenten- und Querkraftverlauf beim Freiträger	352
15.1	Freiträger mit Einzellasten	352
15.2	Freiträger mit gleichmäßig verteilter Streckenlast	356
15.3	Freiträger mit gemischter Belastung	358
C16	Biegemomenten- und Querkraftverlauf beim Träger auf zwei Stützen	361
16.1	Stützträger mit Einzellasten	361
16.2	Träger auf zwei Stützen mit vielen gleich großen Einzellasten	362
16.3	Träger auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Streckenlast	363
16.4	Träger auf zwei Stützen mit Mischbelastung	365
C17	Träger gleicher Biegespannung	368
17.1	Der Gedanke der wirtschaftlichen Konstruktion	368
17.2	Berechnung von Trägern gleicher Biegefestigkeit	368
17.2.1	Freiträger mit einer Einzellast am Trägerende	368
	• Rechteckquerschnitt mit konstanter Höhe und veränderlicher Breite	369
	• Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite und veränderlicher Höhe	369

C18	Verformung bei Biegebeanspruchung	372
18.1	Die Verformung im elastischen Bereich	372
18.2	Der Krümmungsradius der Biegelinie	372
18.3	Berechnung der Durchbiegung und des Neigungswinkels	373
18.3.1	Freitragler mit einer Einzellast am Trägerende	373
18.3.2	Träger auf zwei Stützen mit einer Einzellast in Trägermitte	373
18.3.3	Freitragler mit Streckenlast	374
18.4	Resultierende Durchbiegung	374
18.4.1	Resultierende Durchbiegung bei einachsiger Biegung	374
18.4.2	Resultierende Durchbiegung bei schiefer Biegung	375
C19	Torsionseanspruchung	378
19.1	Drehmoment als Ursache der Torsion	378
19.2	Ermittlung des Torsionsmomentes	378
19.3	Berechnung der Torsionsspannung	379
19.3.1	Polares Widerstandsmoment für den Kreisquerschnitt	380
19.3.2	Polares Widerstandsmoment für den Kreisringquerschnitt	380
C20	Verformung bei Torsion	384
20.1	Analogie zwischen Zug und Torsion	384
20.2	Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und Gleitmodul	384
20.3	Größe des Verdrehwinkels (Torsionswinkel)	385
C21	Knickfestigkeit	388
21.1	Unterscheidung von Druckbeanspruchung und Knickbeanspruchung	388
21.2	Schlankheitsgrad und Einspannungsfälle	388
C22	Knickspannung	390
22.1	Definition der Knickspannung	390
22.2	Ermittlung der Knickkraft bei elastischer Knickung	390
C23	Unelastische Knickung (Tetmajerknickung)	392
23.1	Grenzschlankheitsgrad	392
23.2	Knickspannung bei unelastischer Knickung	392
C24	Knickstäbe im Stahlbau	396
24.1	Normenwerk	396
24.2	Besonderheiten bei der Verwendung von Formelzeichen und Nebenzeichen	396
24.3	Arten der Knickung gemäß DIN 18800	396
24.4	Tragsicherheitsnachweis mit dem Kappa-Verfahren (κ -Verfahren)	397
C25	Beanspruchung auf Biegung und Zug oder Druck	398
C26	Beanspruchung auf Zug und Schub, Druck und Schub, Biegung und Schub	402
C27	Beanspruchung auf Biegung und Torsion	404
C28	Dauerfestigkeit, Schwellfestigkeit, Wechselfestigkeit	407
28.1	Dauerstandfestigkeit	407
28.2	Schwellfestigkeit	407
28.3	Wechselfestigkeit	407

C29	Ermittlung der Dauerfestigkeit	409
29.1	Gewalt- und Dauerbruch	409
29.2	Ermittlung von Schwell- und Wechselfestigkeit	409
29.3	Konstruktion des Dauerfestigkeitsschaubildes	411
29.4	Zulässige Spannungen, erweiterter Sicherheitsbegriff	413
C30	Gestaltfestigkeit	414
30.1	Dauerfestigkeit und Bauteilgröße	414
30.2	Dauerfestigkeit und Bauteiloberfläche	414
30.3	Dauerfestigkeit und Bauteilform	414
30.3.1	Kerbwirkung	414
30.3.2	Berechnung der Kerbwirkung	415
30.4	Gestaltfestigkeit in Abhängigkeit von Bauteilgröße, Bauteilform und Bauteiloberfläche	416
C31	Experimentelle Spannungsanalyse	419
31.1	Messung von Spannungen am fertigen Bauteil	419
31.2	Spannungsanalyse mittels Dehnungsmessstreifen	419
31.3	Spannungsanalyse mittels Spannungsoptik	420
31.4	Spannungsanalyse mittels Finite-Elemente-Methode	421
	Lösungsgänge und Lösungen zu den Übungsaufgaben	453
	Ergebnisse der Vertiefungsaufgaben	491
	Sachwortverzeichnis	511
	Griechisches Alphabet	520
	Römische Ziffern	520

- V 7 An welchen Gegenständen des täglichen Gebrauchs wird die Wirkung
a) durch ein Drehmoment,
b) durch ein Biegemoment sichtbar?
- V 8 Nach welchem Kriterium wird Ihrer Meinung nach der Kräftemaßstab KM festgelegt?
- V 9 Nehmen Sie zwei Kräfte Ihrer Wahl aus dem System des nebenstehenden **Bildes 1** heraus, und fügen Sie zwei andere Kräfte hinzu, ohne das Kräftegleichgewicht zu verändern.
- V 10 Es ist ein KM: $1 \text{ cm} \cong 250 \text{ N}$ vorgeschrieben. Welche Länge hat dann der Kraftpfeil einer Kraft $F = 1371 \text{ N}$?
- V 11 Zeichnen Sie eine Kraft $F = 1350 \text{ N}$ mit dem Winkel $\alpha = 28^\circ$ gegen die Horizontale, und zwar nach rechts oben ansteigend.
KM: $1 \text{ cm} \cong 200 \text{ N}$.
- V 12 Nennen Sie einige typische Teile von technischen Gerätschaften, die man von ihrer Konstruktion und von ihrem Verwendungszweck her gesehen als Kraftangriffspunkt bezeichnen kann.
- V 13 Erläutern Sie das Zustandekommen der Einheit Nm für das Kraftmoment.
- V 14 Ein Kraftmoment wird in einer Rechnung mit dem Formelzeichen M_t bezeichnet.
a) Wie heißt ein solches Kraftmoment und was bewirkt es?
b) Welches andere Formelzeichen lässt die **DIN 1304** „Formelzeichen“ noch zu?
c) Nennen Sie Maschinenteile oder Teile technischer Gerätschaften, die zwecks Aufnahme solcher Kraftmomente konstruiert sind.



Großkugellager
des Maschinenbauunternehmens
INA-Schaeffler

© Thomas Otto – Fotolia.com



A3 Freiheitsgrade eines Körpers

Verschiebt man mit Hilfe einer Kraft einen Körper, dann nimmt man Einfluss auf seine Lage, d. h. auf den Ort, an dem sich der Körper befindet. Dieser Sachverhalt wird im Teilgebiet Dynamik (\rightarrow B1 bis B4) eingehend betrachtet. Dort lernen Sie, dass bei den Bewegungen wie folgt unterschieden wird:

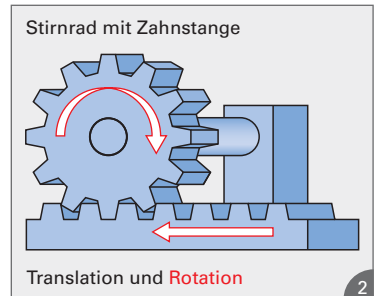
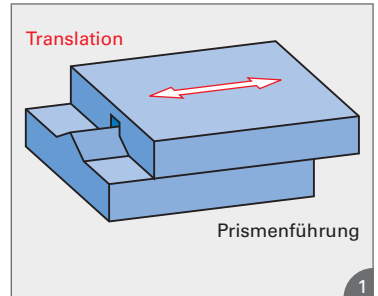
- Translation \longrightarrow geradlinige Bewegung
- Rotation \longrightarrow Drehbewegung

Voraussetzung für solche Bewegungen ist allerdings, dass es für den Körper Bewegungsmöglichkeiten gibt. Bei der im **Bild 1** dargestellten Prismenführung gibt es z. B. nur eine **Bewegungsmöglichkeit**, die Hin- und Herbewegung, also eine **Translationsbewegung**.

Nur eine Bewegungsmöglichkeit liegt auch bei dem im **Bild 2** dargestellten Stirnrad vor. Dieses führt eine **Rotationsbewegung** aus, verursacht durch ein **Drehmoment**.

Jede Bewegungsmöglichkeit eines Körpers wird als **Freiheitsgrad** bezeichnet.

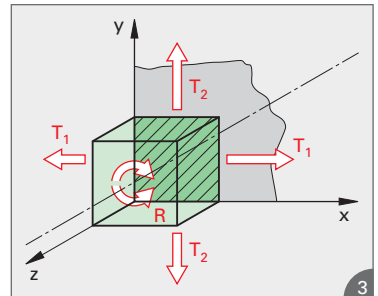
Ein Körper hat demzufolge ebensoviele Freiheitsgrade wie er Bewegungsmöglichkeiten hat. In den beiden **Bildern 1 und 2** liegt also jeweils nur ein Freiheitsgrad vor.



3.1 Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene

Wenn man voraussetzt, dass der im **Bild 3** dargestellte Körper die Ebene x-y (gerasterte Fläche) stets genau berührt, dann hat der Körper nur die Bewegungsmöglichkeiten T_1 und T_2 (Translationen) sowie R (Rotation). Man kann sich also jede beliebige Bewegung in der Ebene aus den Einzelbewegungen T_1 , T_2 und R , die in verschiedenen Zeiten oder gleichzeitig ablaufen können (\rightarrow B2) zusammengesetzt denken. Bewegungsmöglichkeiten bestehen also in x- und y-Richtung und um die z-Achse.

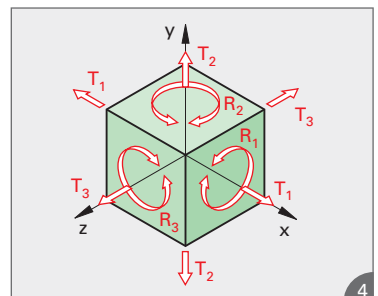
In der Ebene hat ein Körper drei Freiheitsgrade.



3.2 Freiheitsgrade eines Körpers im Raum

Jede beliebige Bewegung eines Körpers im Raum kann man sich aus den Einzelbewegungen T_1 , T_2 , T_3 und R_1 , R_2 , R_3 (**Bild 4**) zusammengesetzt denken. Somit:

Im Raum hat ein Körper sechs Freiheitsgrade.



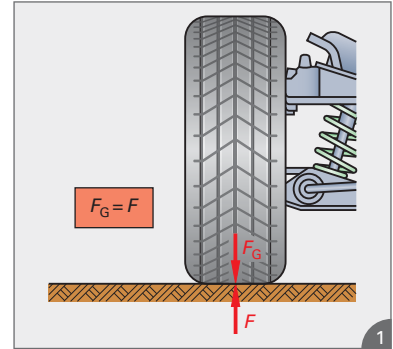
- Ü 1 Wie kann die Lage eines Körpers verändert werden? Was wird vorausgesetzt?
- Ü 2 Wie viele Freiheitsgrade hat der Planschlitten einer Spitzendrehmaschine, bezogen auf das Drehmaschinenbett?
- Ü 3 Nennen Sie die maximale Anzahl von Einzelbewegungen, auf die sich eine beliebige Bewegung zurückführen lässt.
Wie viele Freiheitsgrade können demzufolge vorliegen?

A4 Freimachen von Bauteilen

4.1 Wechselwirkungsgesetz

Viele Erfahrungen des täglichen und beruflichen Lebens zeigen, dass beim Wirken einer Kraft auf einen Körper von diesem eine gleich große Kraft in entgegengesetzter Richtung auf den Körper zurückwirkt.

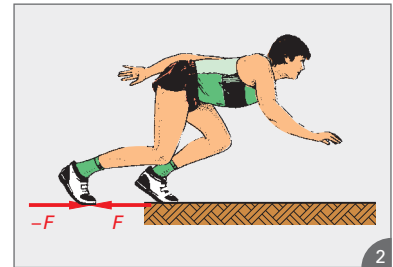
Beim Stehen auf dem Fußboden oder beim Sitzen auf einem Stuhl wirkt das Körpergewicht, also die **Gewichtskraft** F_G auf eine Unterlage. Von dieser wirkt aber, gewissermaßen als Reaktion, eine gleich große **Gegenkraft** auf den Körper zurück. Dieser Sachverhalt ist im **dritten Newton'schen Axiom** formuliert und wird auch als **Wechselwirkungsgesetz** bezeichnet. Begründet wird dies dadurch, dass zwischen der wirkenden Kraft (**Aktionskraft**) und der zurückwirkenden Kraft (**Reaktionskraft** oder **Gegenkraft**) eine Wechselwirkung besteht. Dies ist am Beispiel eines Pkw-Vorderrades (**Bild 1**) gezeigt. Es ist zu erkennen:



Wirkung = Gegenwirkung
Kraft = Gegenkraft
Aktion = Reaktion
Aktionskraft = Reaktionskraft

Kraft und Gegenkraft wirken an verschiedenen Körpern.

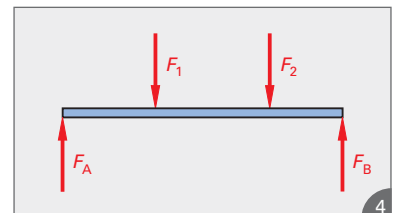
Das dritte Newton'sche Axiom wird auch als **Prinzip von actio und reactio** bezeichnet. Es ist ein grundlegendes Prinzip der Statik und soll deshalb an einem weiteren Beispiel (**Bild 2**) erläutert werden. Dieses Bild zeigt einen Läufer beim Tiefstart. Er wirkt mit einer Kraft F auf den Boden der Laufbahn, und der Boden wirkt mit der gleich großen Kraft $-F$ auf den Läufer zurück. Dabei ist $-F$ eine **Reibungskraft** (→ A25 bis A32), die z. B. auf einer Eisfläche kaum entstehen könnte. Der Vorgang im **Bild 2** ließe sich dann nur mit Hilfe von Spikes realisieren. Das Wechselwirkungsgesetz lautet also wie folgt:



Wirkt von einem Körper eine Kraft F auf einen zweiten Körper, dann wirkt gleichzeitig eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft vom zweiten Körper auf den ersten Körper zurück.

4.2 Freimachen

Das Wechselwirkungsgesetz ist auf alle sich berührenden Körper – bei technischen Gerätschaften und Maschinen werden Körper meist als **Bauteile** bezeichnet – anwendbar, und es ist bereits bekannt, dass der Konstrukteur die wirkenden Kräfte als **Belastungskräfte** und die Reaktionskräfte als **Stützkräfte** bezeichnet. Dies wurde bereits im **Bild 4/7** gezeigt, und dieses Beispiel einer belasteten Brücke ist nochmals im **Bild 3** dargestellt. Ausgehend von den bekannten Belastungskräften werden mit Hilfe der **Gesetze der Statik** die Stützkräfte (**Bild 4**) ermittelt, so wie dies bereits beschrieben wurde (→ A1.3). Am Beispiel der Brücke ist zu erkennen:



Sowohl die Aktionskräfte (Belastungskräfte) als auch die Reaktionskräfte (Stützkräfte) greifen am Bauteil an und belasten dieses.

Um eine Aussage über die Bauteilabmessungen machen zu können, müssen alle auf das Bauteil wirkenden Kräfte, also neben den Aktionskräften auch die Reaktionskräfte, bekannt sein.

Bild 1 soll nochmals den Unterschied zwischen Belastungskräften und Stützkraften verdeutlichen. Manchmal ist auch eine begrifflich eindeutige Zuordnung schwer möglich. Dies ist deutlich an der zweiten Stütze von rechts zu erkennen: Die Fahrbahn erzeugt oben an der Stütze eine Belastungskraft, die Stütze reagiert mit einer Stützkraft von unten auf die Fahrbahn zurück. Das von der Stütze aufgenommene Fahrbahngewicht plus dem Stützengewicht wirken als Belastungskraft auf den Bogen und der Bogen wirkt mit einer entsprechenden Stützkraft zurück auf die Stütze.

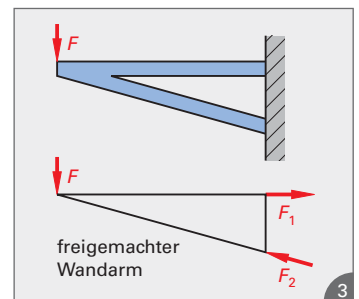
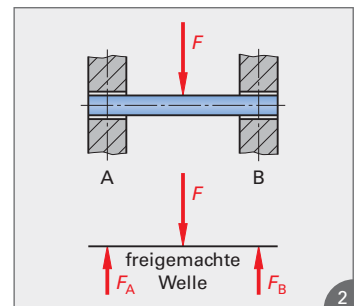
Sankt-Gallen Fürstenlandbrücke

© Schlierner – Fotolia.com



Im Maschinen- und Anlagenbau sind die Belastungs- und Stützkraften meist einfacher zu erkennen. Dies wird am Beispiel einer Wellenlagerung (**Bild 2**) deutlich. Die Belastungskraft F (Aaktionskraft) ruft die Lagerkräfte F_A und F_B (Reaktionskräfte) hervor. Ein weiteres Beispiel zeigen die **Bilder 3/18 und 4/18**. Es ist zu erkennen, dass für die Berechnung des Bauteils nur alle angreifenden Kräfte, nicht aber die tragenden Bauteile erforderlich sind. Man ersetzt also die tragenden Bauteile durch die dort wirkenden Kräfte und bezeichnet dies als das **Freimachen der Bauteile**.

Freimachen bedeutet, dass man alle das Bauteil tragenden Teile, wie Lager, Stützen, Einspannungen etc. durch die von diesen auf das Bauteil wirkenden Reaktionskräfte ersetzt.



Dies wird im **Bild 3** durch ein weiteres Beispiel verdeutlicht.

Bild 4 zeigt, dass man beim Freimachen am besten in mehreren Schritten vorgeht. Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge dies geschieht, z. B. könnte es wie folgt geschehen:

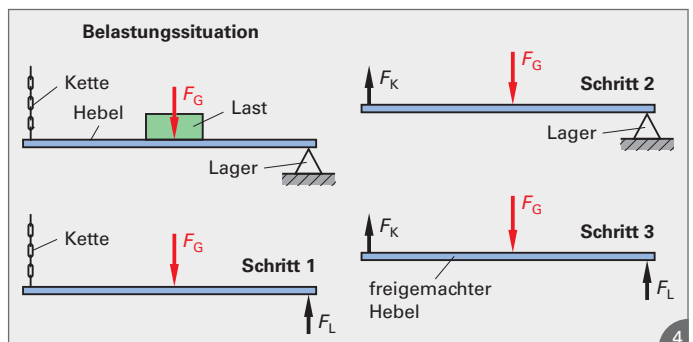
Schritt 1: Hebel wird vom Lager freigemacht

Schritt 2: Hebel wird von der Kette freigemacht

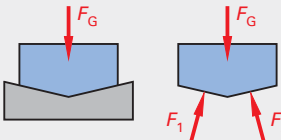
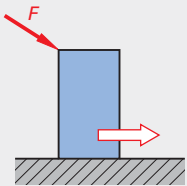
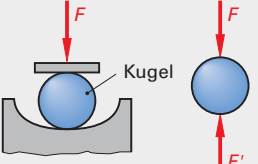
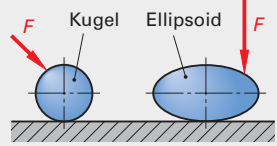
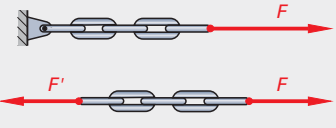
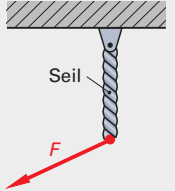
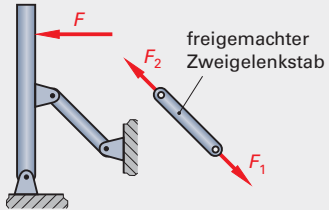
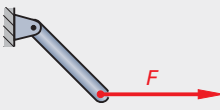
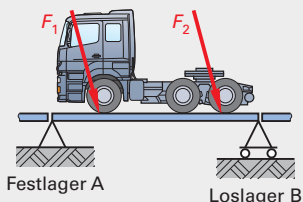
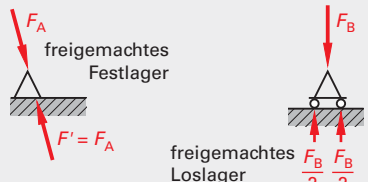
Schritt 3: Zusammenfassung der Schritte 1 und 2, d. h. dass der Hebel vollkommen freigemacht ist.

F_G ist eine Aktionskraft, F_K und F_L sind Reaktionskräfte. Es ist zu erkennen, dass Reaktionskräfte nur an den Stellen des freizumachenden Bauteils angreifen können, wo sich dieses mit anderen Bauteilen berührt. Dabei gilt als vereinbart:

Beim Freimachen wird der Angriffspunkt, die (ungefähre) Richtung der Wirkungslinie WL und der Richtungssinn (z. B. nach oben oder unten) der Reaktionskräfte, **nicht (!!!)** aber die Größe (Betrag) der Kraft ermittelt. Wichtige **Regeln für das Freimachen** von Bauteilen sind auf der nächsten Seite zusammengefasst.



4.2.1 Regeln für das Freimachen von Bauteilen

Form des Bauteils und Regeln für das Freimachen:	Kraftübertragung in Wirkrichtung der Kraft möglich:	Kraftübertragung ist so nicht möglich:
Ebene Flächen Ebene Flächen können nur senkrechte Reaktionskräfte erzeugen, d.h. es können nur senkrecht zu ihnen gerichtete Kräfte übertragen werden.	 <p>freigemachter Körper</p> <p>1</p>	 <p>2</p>
Gewölbte Flächen Gewölbte Flächen erzeugen im Berührungspunkt mit anderen Körpern senkrechte Reaktionskräfte. Diese wirken in Richtung des Krümmungsradius (Radialkräfte)	 <p>freigemachte Kugel</p> <p>3</p>	 <p>4</p>
Ketten und Seile Ketten und Seile können Kräfte nur in Spannrichtung übertragen. Die übertragenen Kräfte können nur Zugkräfte sein.	 <p>freigemachte Kette (Seil)</p> <p>5</p>	 <p>6</p>
Zweigelenkstäbe (Pendelstützen) Zweigelenkstäbe (Pendelstützen) nehmen nur Zug- oder Druckkräfte in Richtung der Verbindungslinie der beiden Gelenkpunkte auf.	 <p>freigemachter Zweigelenkstab</p> <p>7</p>	 <p>8</p>
Loslager und Festlager Bild 9 zeigt eine belastete Brücke. Horizontal- oder Schrägkräfte entstehen z.B. beim Anfahren. Damit sich die Brücke in waagerechter Richtung frei ausdehnen kann (z.B. auch bei Erwärmung) muss auf einer Seite ein Loslager sein. Dieses ist horizontal verschiebbar. Auf der anderen Seite lagert die Brücke auf einem Festlager . Dieses verhindert die Bewegung der gesamten Brücke in waagerechter Richtung. Aus der Konstruktion beider Lager (unbeweglich und in waagerechter Richtung beweglich) ergibt sich entsprechend Bild 10 : Loslager nehmen nur Kräfte in senkrechter Richtung zum Lager auf. Festlager können Kräfte in jeder beliebigen Richtung aufnehmen.	 <p>9</p>	
	 <p>freigemachtes Festlager</p> <p>freigemachtes Loslager</p> <p>10</p>	

- M 2 Ein Prägwerkzeug wird gemäß **Bild 1/128** zwecks Funktionsprüfung provisorisch in einer Handpresse mit zwei Maschinenschrauben M 12 kraftschlüssig eingespannt. Prägekraft $F = 8 \text{ kN}$. Berechnen Sie
- die erforderliche axiale Schraubenkraft F_S , wenn mit einer 1,5-fachen Sicherheit gegen Rutschen gearbeitet werden soll,
 - das Gewindereibungsmoment,
 - das Auflagereibungsmoment zwischen Mutter und der Berührungsfläche,
 - das gesamte Anzugsmoment für die Mutter (μ und μ_G aus **Bild 1/128**).

Lösung:

- a) Als Gesamtreibungskraft muss $F_R = 1,5 \cdot F$ erzeugt werden. Davon hat jede Schraube die Hälfte zwischen den beiden Platten zu bewirken. Somit:

$$\frac{F_R}{2} = \frac{1,5 \cdot F}{2} = \mu \cdot F_S \longrightarrow F_S = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot \mu} = \frac{1,5 \cdot 8 \text{ kN}}{2 \cdot 0,12} = 50 \text{ kN}$$

- b) $M_{RG} = F_S \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \tan(\alpha + \rho')$; Gewindetabelle: $d_2 = 10,863 \text{ mm}$; $\beta = 60^\circ$; $P = 1,75 \text{ mm}$.

$$\mu' = \tan \rho' = \frac{\mu_G}{\cos \beta/2} = \frac{0,12}{\cos 30^\circ} = \frac{0,12}{0,866} = 0,1386 \longrightarrow \rho' = 7,89^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{P}{\pi \cdot d_2} = \frac{1,75 \text{ mm}}{\pi \cdot 10,863 \text{ mm}} = 0,0513 \longrightarrow \alpha = 2,94^\circ$$

$$M_{RG} = 50 \text{ kN} \cdot \frac{10,863 \text{ mm}}{2} \cdot \tan(2,94^\circ + 7,89^\circ) = 50 \text{ kN} \cdot \frac{10,863 \text{ mm}}{2} \cdot \tan 10,83^\circ$$

$$M_{RG} = 50 \text{ kN} \cdot \frac{10,863 \text{ mm}}{2} \cdot 0,1913 = 51,95 \text{ KNmm} = 51,95 \text{ Nm}$$

- c) $M_{Ra} = F_S \cdot \mu \cdot r_a$ Sechskantmutter: $r_a = 0,7 \cdot d = 0,7 \cdot 12 \text{ mm} = 8,4 \text{ mm}$

$$M_{Ra} = 50 \text{ kN} \cdot 0,12 \cdot 8,4 \text{ mm} = 50,4 \text{ kNmm} = 50,4 \text{ Nm}$$

- d) $M_{Rges} = M_{RG} + M_{Ra} = 51,95 \text{ Nm} + 50,4 \text{ Nm} = 102,35 \text{ Nm}$

- Ü 1 In einer Stellschraube mit dem metrischen ISO-Feingewinde M 20 x 1 (Nenndurchmesser $d = 20 \text{ mm}$, Steigung $P = 1 \text{ mm}$) wirkt eine Kraft $F = 5 \text{ kN}$ in axialer Richtung. Berechnen Sie das Gewindereibungsmoment beim Anziehen, wenn für geschliffene Gewinde mit $\mu = 0,08$ gerechnet werden kann.

- Ü 2 Rein festigkeitsmäßig wird bei einer Transportspindel ein Kernquerschnitt von 80 cm^2 benötigt.

- Ermitteln Sie aus der Gewindetabelle das erforderliche eingängige Trapezgewinde.
- Liegt bei $\mu = 0,08$ Selbsthemmung vor?
- Welches Gewindereibungsmoment ist beim Senken vorhanden, wenn die axiale Spindelkraft $F = 800 \text{ kN}$ beträgt?

- Ü 3 Wie unterscheidet sich Gewindereibung von Auflagereibung?

- Ü 4 Wie kann das Auflagereibungsmoment bei gegebener axialer Schraubenkraft beeinflusst werden?

- V 1 a) Übungsaufgabe Ü 1 ist für ein metrisches ISO-Gewinde M 20 bei sonst gleichen Werten durchzurechnen.

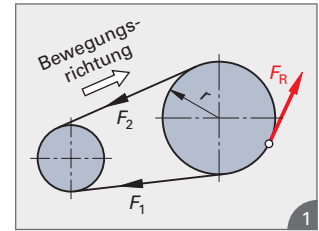
- b) Wie groß ist für diesen Fall das Auflagereibungsmoment M_{Ra} , wenn für die Auflagefläche ebenfalls mit $\mu = 0,08$ gerechnet wird, und zwar bei Verwendung einer Innensechskantschraube mit $r_a = 0,5 \cdot \text{Gewindenennendurchmesser}$.

- V 2 Welche Handkraft ist bei Vertiefungsaufgabe V 1 erforderlich, wenn ein Schraubenschlüssel mit einer wirksamen Hebellänge von 300 mm zur Verfügung steht?

A30 Seilreibung

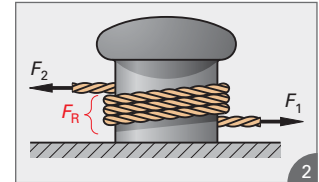
In **Bild 1** ist ein einfacher **Riementrieb** dargestellt. Die Übertragung des Drehmomentes erfolgt durch das Wirken der Reibungskraft F_R zwischen den Riemenscheiben und dem Treibriemen. Stets dann, wenn ein Seil (Schnur), ein Band oder auch ein Riemen um einen Zylinder gespannt ist und so auf diesen Zylinder eine Kraft übertragen wird, spricht man von der **Seilreibung**, und aus **Bild 1** ist zu ersehen:

Die Seilreibungskraft tritt tangential am Zylinder auf und bewirkt die Übertragung eines Drehmomentes.



Als weiteres Beispiel der Seilreibung betrachten wir einen Poller (**Bild 2**). Hierrunter versteht man einen kurzen Stahlzylinder, der üblicherweise an der Anlegestelle von Schiffen befestigt ist.

Legt man ein Seil mit einigen Windungen um einen solchen Poller, so ist es mit dieser Anordnung einer Person möglich, sehr große Zugkräfte – vom angelegten Schiff erzeugt – zu halten.



Sowohl in **Bild 1** als auch in **Bild 2** herrscht Kräftegleichgewicht, und zwar ist:

$$F_1 = F_2 + F_R$$

Das Beispiel des Pollers zeigt, dass die **übertragbare Seilkraft** F_1 von der Anzahl der um den Poller gelegten Windungen abhängt. Dabei ist F_2 die **Haltekraft**. Man kann also sagen:

Die übertragbare Seilkraft ist umso größer, je größer der Seilumschlingungswinkel um den Zylinder ist.

Eine Versuchsanordnung wie im **Bild 3** dargestellt, soll dies verdeutlichen. Um die jeweils gleiche Scheibe ist ein Seil mit verschieden großem **Umschlingungswinkel** α gelegt. Unter der Voraussetzung, dass F_2 die Haltekraft ist, und somit im Falle eines Rutschens eine Bewegung des Riemens in die Richtung von F_1 erfolgt, kann das Folgende vorausgesetzt werden:

Da F_R immer der Gleitrichtung entgegen gerichtet ist, muss F_R in die gleiche Richtung wie F_2 wirken.

Somit gilt auch hier:

$$F_1 = F_2 + F_R \quad \text{d.h. } F_1 > F_2$$

Dabei wird festgestellt, dass die zu haltende Kraft F_1 von der Haltekraft F_2 und vom Umschlingungswinkel α abhängt.

Da die übertragbare Kraft auch von der Materialpaarung, d.h. von der Reibungszahl μ abhängt, muss sein:

übertragbare Seilkraft in N

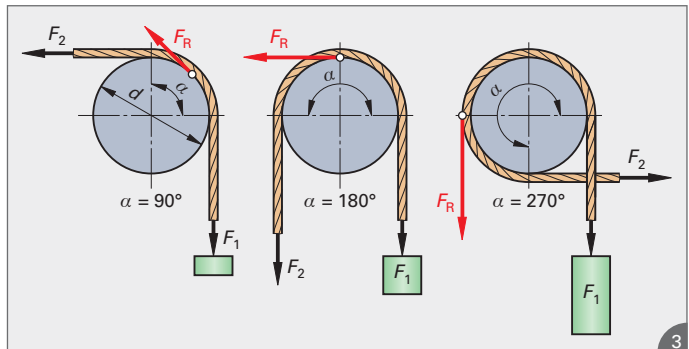
$$F_1 = f(F_2, \mu, \alpha)$$

1

übertragbare Seilkraft in N

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu \alpha}$$

2



Aus diesem gedanklichen Ansatz hat der deutsche Physiker und Ingenieur J. A. **Eytelwein** (1765 bis 1849) eine Gleichung entwickelt, die **Eytelwein'sche Gleichung** (Gleichung 2).

Der von ihr beschriebene Sachverhalt ist das **Seilreibungsgesetz**. Darin ist:

e Basis des natürlichen Logarithmus = 2,718...

(**Euler'sche Zahl**)

μ Reibungskoeffizient zwischen Seil und Zylinder (Scheibe)

α Umschlingungswinkel im Bogenmaß

Im **Hebezeugbau** ist es üblich, mit Tabellen zu arbeiten, die **$e^{\mu\alpha}$ -Werte** enthalten. Man kann diese Werte aber auch sehr leicht mit einem Taschenrechner ermitteln.

Mit $F_1 = F_2 + F_R$ ergibt sich $F_R = F_1 - F_2 = F_2 \cdot e^{\mu\alpha} - F_2$. Somit ergibt sich durch Ausklammern von F_2 :

Seilreibungskraft in N

$$F_R = F_2 \cdot (e^{\mu\alpha} - 1)$$

1

Aus Gleichung 2/130 ergibt sich $F_2 = F_1/e^{\mu\alpha}$. Setzt man dies in Gleichung 1 ein, dann ergibt sich eine weitere Gleichung 2 für die Berechnung der Seilreibungskraft.

Seilreibungskraft in N

$$F_R = F_1 \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}}$$

2

Multipliziert man noch die Seilreibungskraft F_R mit dem Zylinder- bzw. Scheibenradius $r = d/2$, dann hat man eine Berechnungsgleichung 3 für das Seilreibungsmoment.

Seilreibungsmoment in Nm

$$M_R = F_R \cdot \frac{d}{2}$$

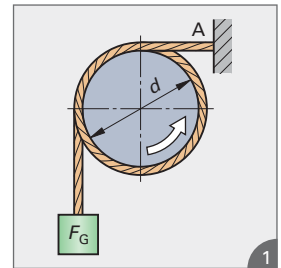
3

F_R	d
N	m

M 1

Gemäß **Bild 1** ist um einen Zylinder ein Seil geschlungen. Die Anzahl der Seilwindungen beträgt $n = 2,25$, und die Reibungszahl ist $\mu = 0,35$.

- Welche Kraft wird vom Seil in die Verankerung A übertragen, wenn sich der Zylinder in die angegebene Richtung dreht und wenn $F_G = 2 \text{ kN}$ ist?
- Wie groß ist das Seilreibungsmoment M_R bei einem Zylinderdurchmesser $d = 500 \text{ mm}$?



Lösung:

- Bezogen auf die obigen Gleichungen ist: Ankerkraft F_1
Gewichtskraft $F_G = F_2 = 2 \text{ kN}$

Somit:

$$F_1 = F_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

$$F_1 = 2 \text{ kN} \cdot 140,82$$

$$F_1 = \mathbf{281,64 \text{ kN}}$$

Bei $\mu = 0,35$ und $\alpha = 2,25 \cdot 2 \pi \text{ rad} = 14,1372 \text{ rad}$ ergibt sich für

$$e^{\mu\alpha} = 2,718^{0,35 \cdot 14,1372} = 2,718^{4,948} = \mathbf{140,82}$$

$$b) M_R = F_R \cdot \frac{d}{2} = (F_1 - F_2) \cdot \frac{d}{2} = (281,64 \text{ kN} - 2 \text{ kN}) \cdot \frac{0,5 \text{ m}}{2} = 279,64 \text{ kN} \cdot 0,25 \text{ m}$$

$$\mathbf{M_R = 69,91 \text{ Nm}}$$

Ü 1

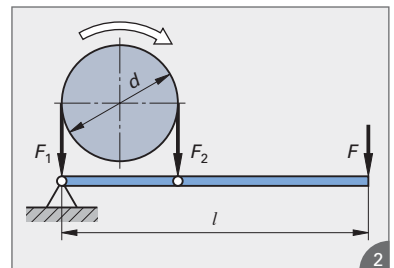
In der Anordnung der Musteraufgabe M 1 soll nun die Scheibe stillstehen, und es ist $\mu = 0,45$ und $F_G = 15,8 \text{ kN}$. Wie viele volle Windungen muss das Seil um die Scheibe gelegt sein, wenn die Ankerkraft höchstens 100 N sein soll?

Ü 2

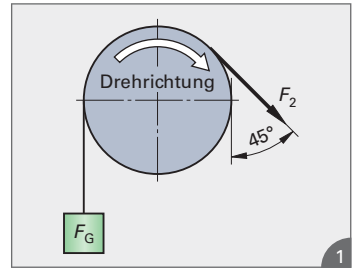
Bild 2 zeigt eine einfache Bandbremse (\rightarrow A31) mit dem Brems Scheibendurchmesser $d = 250 \text{ mm}$.

Es wirkt die Kraft $F = 200 \text{ N}$, der Reibungskoeffizient beträgt $\mu = 0,3$ und die Länge des Bremshebels ist $l = 600 \text{ mm}$. Zu berechnen sind

- die Seilkraft F_2
- die Seilreibungskraft F_R
- das Bremsmoment M_R



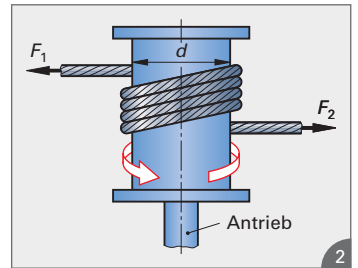
- V 1 Ein Gewicht $F_G = 981 \text{ N}$ wird mit einem Lederriemen ($\mu = 0,26$), der über eine sich drehende Scheibe gelegt worden ist, angehoben (**Bild 1**). Welche Kraft F_2 ist dabei aufzuwenden?



- V 2 Die im **Bild 2** dargestellte **Spillanlage** funktioniert dergestalt, dass ein Seil um eine von einem Motor angetriebene und sich andauernd drehende Trommel gelegt wird. Soll die Kraft F_2 erzeugt werden, so ist mit der Handkraft F_1 zu ziehen. Dadurch spannt sich das vorher lose um die Trommel gelegte Seil, und nach Gleichung 2/131 wird die Kraft F_2 erzeugt.

Im speziellen Fall beträgt die Windungszahl 4.

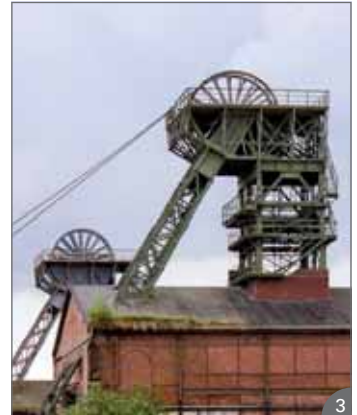
- a) Wie groß ist die erzeugte Zugkraft F_2 bei einer Handkraft $F_1 = 250 \text{ N}$ und dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,25$?
b) Welches Drehmoment wird bei einem Trommeldurchmesser $d = 600 \text{ mm}$ erzeugt?



Schachtanlage

Deutlich ist die Seilumschlingung, ca. 130° , zu erkennen.

© reeel – Fotolia.com



Maschinenhaus einer Schachtanlage

Die große Seilscheibe ist vom Seil mit etwa 2 Windungen umschlungen.

© ullsteinbild – imageBROKER / T. Frey



A31 Reibungsbremsen und Reibungskupplungen

Die Bremswirkung der Reibungsbremsen beruht auf Reibungskräften zwischen festen Körpern und den speziellen Hebelverhältnissen an und in der Bremse.

31.1 Reibungsbremsen

Reibungsbremsen werden in mehreren, völlig unterschiedlichen Bauarten hergestellt und in Abhängigkeit vom Verwendungszweck eingesetzt. Insbesondere unterscheidet man wie folgt:

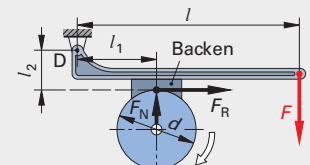
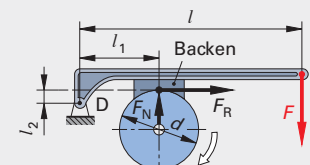
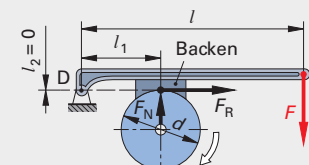
Backenbremse → **Außenbackenbremse** (Klotzbremse), **Innenbackenbremse** (Trommelbremse)

Bandbremse → **Einfache Bandbremse**, **Summenbandbremse**, **Differentialbandbremse**

Scheibenbremse → Verwendung vor allem in der Kfz-Technik

31.1.1 Backenbremsen

Bei den Außenbackenbremsen wird zwischen der **einfachen Bandbremse** und der **Doppelbackenbremse** (s. M 2/134) unterschieden. Die **Bilder 1, 2 und 3** zeigen einfache Backenbremsen mit unterschiedlicher Lage des Hebellagers. Wie aus den folgenden Ableitungen zu ersehen ist, hängt die erforderliche **Betätigungskraft** F sehr von dieser Lage des Hebellagers ab:

überhöhtes Hebellager D	unterzogenes Hebellager D	tangentiales Hebellager D
 <p>1</p>	 <p>2</p>	 <p>3</p>
F_R bei Rechtslauf am Backen $\Sigma M_{d(D)} = 0$ liefert mit $F_R = \mu \cdot F_N$: $F_N \cdot l_1 + \mu \cdot F_N \cdot l_2 - F \cdot l = 0$	F_R bei Rechtslauf am Backen $\Sigma M_{d(D)} = 0$ liefert mit $F_R = \mu \cdot F_N$: $F_N \cdot l_1 - \mu \cdot F_N \cdot l_2 - F \cdot l = 0$	F_R bei Rechtslauf am Backen $\Sigma M_{d(D)} = 0$ liefert mit $F_R = \mu \cdot F_N$: $F_N \cdot l_1 - F \cdot l = 0$
Hebelkraft in N $F = F_N \cdot \frac{l_1 \pm \mu \cdot l_2}{l}$ <p>1</p>	Hebelkraft in N $F = F_N \cdot \frac{l_1 \mp \mu \cdot l_2}{l}$ <p>2</p>	Hebelkraft in N $F = F_N \cdot \frac{l_1}{l}$ <p>3</p>
\oplus bei Rechtslauf; \ominus bei Linkslauf Selbsthemmung tritt bei Linkslauf ein mit $l_1 - \mu \cdot l_2 = 0$ Selbsthemmungskriterium: $l_1 \leq \mu \cdot l_2$	Selbsthemmung tritt bei Rechtslauf ein mit $l_1 - \mu \cdot l_2 = 0$ Selbsthemmungskriterium: $l_1 \leq \mu \cdot l_2$	unabhängig von Rechts- oder Linkslauf, d. h.: keine Selbsthemmung

Bremsmoment der Außenbackenbremse in Nm

$$M_{Br} = F_R \cdot \frac{d}{2} = \mu \cdot F_N \cdot \frac{d}{2}$$

4

M 1

An einer einfachen Backenbremse mit überhöhtem Hebellager D gemäß **Bild 1** mit den Abmessungen $d = 300$ mm, $l = 600$ mm, $l_1 = 250$ mm, $l_2 = 100$ mm wirkt eine Betätigungskraft $F = 580$ N. Berechnen Sie bei einem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,3$

a) die Normalkraft F_N bei Rechtslauf und Linkslauf,

b) das Bremsmoment M_{Br} bei Rechtslauf und Linkslauf.

Damit ergibt sich:

Drehimpulserhaltung (Drallerhaltung) in kgm^2/s^2

$$J_0 \cdot \omega_0 = J_t \cdot \omega_t$$

J_0, J_t	ω_0, ω_t
kgm^2/s^2	$\text{rad/s} = \text{s}^{-1}$

1

Ist der Drehstoß (Momentenstoß) $M \cdot t = 0$, dann ist der Drehimpuls am Anfang der Drehbewegung ebenso groß wie am Ende, d. h. $L = \text{konstant}$.

Daraus folgt unmittelbar, und man beachte bei dieser Überlegung die Versuchsanordnung des **Bildes 1/250**:

Verkleinert sich bei einem rotierenden Körper das Trägheitsmoment, dann vergrößert sich, **ohne Energiezufuhr von außen**, die Winkelgeschwindigkeit und damit die Drehzahl.

Dies bedeutet konkret am Beispiel des **Bildes 1/250**: Wird die Gleithülse nach oben verschoben, dann verkleinert sich die Drehzahl, wird hingegen die Gleithülse nach unten geschoben, dann vergrößert sich die Drehzahl, und zwar ohne Energiezufuhr von außen. Den gleichen Effekt erzielen z. B. Eiskunstläufer, die durch das möglichst nahe Heranziehen ihrer Gliedmaßen an ihre „Drehachse“ eine enorme Drehzahlsteigerung in der **Pirouette** erzielen, ein Sachverhalt, der auch jederzeit auf einem Drehstuhl nachvollzogen werden kann.

M 7 Ein Fliehkraftpendel gemäß **Bild 1/250** dreht mit $n_1 = 500 \text{ min}^{-1}$ und hat dabei ein Massenträgheitsmoment von $J_1 = 3 \text{ kgm}^2$. Nach Trennung von einem Antrieb wird mit einer Verstellvorrichtung der „wirksame Radius“ verkleinert. Dabei ändert sich das Massenträgheitsmoment auf $J_2 = 0,8 \text{ kgm}^2$.

Wie groß ist dann die Drehzahl n_2 ? Vergleichen Sie vor der Lösung nochmals die Bilder 1/240 und 2/240.

Lösung:

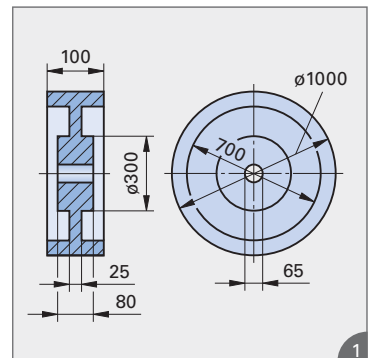
$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2 \longrightarrow J_1 \cdot \frac{\pi \cdot n_1}{30} = J_2 \cdot \frac{\pi \cdot n_2}{30}$$

$$J_1 \cdot n_1 = J_2 \cdot n_2$$

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{J_1}{J_2} = 500 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{3 \text{ kgm}^2}{0,8 \text{ kgm}^2} = 1875 \text{ min}^{-1}$$

Ü 2 Ein Schwungrad (**Bild 1**) verrichtet an einer Exzenterpresse durch Energieabgabe mechanische Arbeit (Stanzkraft mal Stanzweg im Pressenwerkzeug). Die Schwungradrehzahl verkleinert sich dabei von der Leerlaufdrehzahl $n_0 = 110 \text{ min}^{-1}$ auf die Drehzahl n_1 . Umgekehrt wird die Drehzahl während der Energiezufuhr durch einen Elektromotor wieder von n_1 auf n_0 vergrößert. Das Schwungrad besteht aus Gusseisen mit der Dichte $\rho = 7,25 \text{ kg/dm}^3$. Berechnen Sie

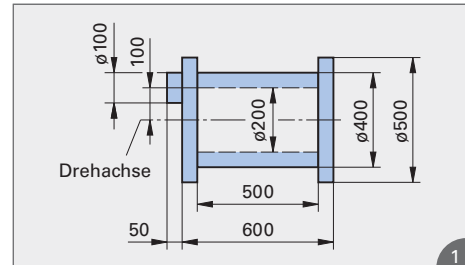
- das Trägheitsmoment des Schwungrades. Bei der Berechnung der Trägheitsmomente der drei Hohlzylinder, aus denen sich das Schwungrad zusammensetzt, muss mit Gleichung 4/243 (dickwandiger Hohlzylinder) gearbeitet werden.
- das Gesamtarbeitsvermögen W_{rot} des Schwungrades bei der Drehzahl n_0 ,
- die Drehzahl n_1 , wenn das Schwungrad die Energie für die Nutzarbeit $W_n = 1200 \text{ Nm}$ liefert,
- die Beschleunigungszeit,
- die Winkelbeschleunigung α , wenn der Elektromotor das Schwungrad im Drehwinkel $\varphi = 1,5 \text{ rad}$ von n_1 auf n_0 beschleunigt,
- die für die Beschleunigung erforderliche Motorleistung,
- die auf den Schwungraddurchmesser bezogene reduzierte Masse (Ersatzmasse) m_{red} ,
- den Trägheitsradius i ,
- die Auslaufzeit des Schwungrades, wenn es bei n_0 vom Antrieb getrennt wird und in Lagern mit dem Durchmesser $D = 150 \text{ mm}$ gelagert ist ($\mu = 0,05$).



- V 2 Eine Kreisscheibe mit der Dichte $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$ (Stahlguss) hat einen Durchmesser von 500 mm und eine Dicke von 100 mm. Welche Beschleunigungsleistung ist erforderlich, wenn die Scheibe aus dem Zustand der Ruhe in $t = 2 \text{ s}$ auf die Drehzahl $n = 300 \text{ min}^{-1}$ gebracht wird?
Welches Arbeitsvermögen (Rotationsenergie) besitzt dann die Scheibe?

- V 2 **Bild 1** zeigt eine Trommel mit angesetztem Exzenterzapfen. Werkstoff ist Gusseisen mit der Dichte $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$. Berechnen Sie

- das Trägheitsmoment der Trommel mit angesetztem Exzenterzapfen,
- die reduzierte Masse m_{red} bezogen auf den Durchmesser 400 mm,
- die erforderliche Umfangskraft F_u am Durchmesser 400 mm, wenn dort mit $a_t = 5 \text{ m/s}^2$ beschleunigt werden soll,
- das für diesen Fall erforderliche Drehmoment,
- den Trägheitsradius i .



Betonmischer als Beispiel für eine exzentrische Anordnung einer Masse Beton (im Mischer)

© Equatore – Fotolia.com

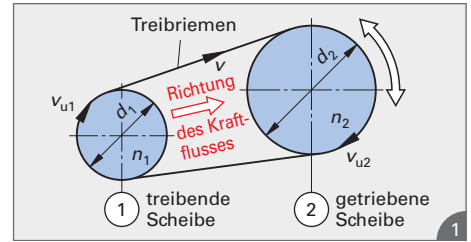


B16 Übersetzungsverhältnis beim Riementrieb

16.1 Einfacher Riementrieb

Beim **einfachen Riementrieb** (Bild 1) wird die getriebene Scheibe ② von der treibenden Scheibe mit Hilfe eines Treibriemens oder einer Kette (Kettentrieb) angetrieben. Aus Bild 1 erkennt man:

treibende Scheibe:	ungerade Indizes
getriebene Scheibe:	gerade Indizes



Erfolgt der Antrieb mit einem Flach- oder Keilriemen, dann muss mit einem **Schlupf** des Riemens – insbesondere in der Anlaufphase – gerechnet werden. Beim Anlauf mit Zahnriemen oder Ketten ist ein **schlupffreier Antrieb** gewährleistet, d. h., dass ein Durchrutschen nicht möglich ist. Setzt man einen solchen schlupffreien Antrieb voraus, dann ist beim **Kraftfluss von der treibenden Scheibe zur getriebenen Scheibe** sichergestellt, dass die Riemengeschwindigkeit v mit den Umfangsgeschwindigkeiten der Scheiben v_{u1} und v_{u2} identisch ist. Somit:

$$v_{u1} = v_{u2} \longrightarrow \pi \cdot d_1 \cdot n_1 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2$$

Daraus ergibt sich die **Grundgleichung für den einfachen Riementrieb**:

Grundgleichung für den einfachen Riementrieb

$$d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2$$

Index 1 \longrightarrow treibende Scheibe
Index 2 \longrightarrow getriebene Scheibe

Das Produkt aus Durchmesser d_1 und Drehzahl n_1 der treibenden Scheibe ist also gleich dem Produkt aus Durchmesser d_2 und Drehzahl n_2 der getriebenen Scheibe. Somit gilt auch:

Drehzahlverhältnis = reziprokes Durchmesser Verhältnis

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Beim einfachen Riementrieb verhalten sich die Drehzahlen der Riemen- oder Kettenscheiben umgekehrt wie deren Durchmesser.

Daraus ergibt sich, dass die kleinere Scheibe stets die größere Drehzahl hat. Eine wichtige Rechengröße bei den Übersetzungen ist das **Übersetzungsverhältnis**:

Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{n_1}{n_2}$$

n_1 Drehzahl der treibenden Scheibe
 n_2 Drehzahl der getriebenen Scheibe

Das Verhältnis der Drehzahlen in Richtung des Kraftflusses heißt Übersetzungsverhältnis i .

Da $\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$ (**Gleichung 2**) und da nach **Gleichung 2/227** die Winkelgeschwindigkeiten ω den

Drehzahlen n proportional sind, gelten auch die beiden folgenden Gleichungen:

Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{d_2}{d_1}$$

Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Beim Riementrieb verhalten sich die Drehzahlen wie die Winkelgeschwindigkeiten der Scheiben und umgekehrt wie die Scheibendurchmesser.

Zusammenfassend kann somit geschrieben werden:

Übersetzungsverhältnis beim einfachen Riementrieb

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

M 1

Die Riemenscheibe auf der Arbeitsspindel einer Maschine hat einen Durchmesser von 200 mm und ihre Drehzahl beträgt 652 min^{-1} . Der Durchmesser der Scheibe am Antriebsmotor beträgt 90 mm.

- Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit der Scheiben in m/min?
- Wie groß ist die Motordrehzahl?
- Welches Übersetzungsverhältnis liegt vor?
- Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der treibenden Scheibe?

Lösung: Die Motorriemenscheibe ist die treibende Scheibe mit den Indizes 1, die Riemenscheibe auf der Arbeitsspindel ist die getriebene Scheibe mit den Indizes 2.

$$\text{a) } v_{u1} = v_{u2} \longrightarrow \pi \cdot d_2 \cdot n_2 = \pi \cdot 0,2 \text{ m} \cdot 0,652 \text{ min}^{-1} = \mathbf{409,66 \text{ m/min}}$$

$$\text{b) } \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} \longrightarrow n_1 = n_2 \cdot \frac{d_2}{d_1} = 652 \text{ min}^{-1} \cdot \frac{200 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} = \mathbf{1448,89 \text{ min}^{-1}}$$

$$\text{c) } i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1448,89 \text{ min}^{-1}}{652 \text{ min}^{-1}} = \mathbf{2,22} \quad \text{bzw.} \quad i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{200 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} = \mathbf{2,22}$$

Anmerkung: Es verhalten sich $n_1 : n_2 = 2,22 : 1$, d. h., dass in Kraftflussrichtung eine Drehzahlverkleinerung stattgefunden hat. In diesem Zusammenhang spricht man in der technischen Praxis auch von einer **Untersetzung**. Es ist folgende **Schreibweise für das Übersetzungsverhältnis** üblich:

Drehzahlverkleinerung	\longrightarrow	z. B. $i = 2,22 = 2,22 : 1$	\longrightarrow	Untersetzung
Drehzahlvergrößerung	\longrightarrow	z. B. $i = 0,45 = 1 : 2,22$	\longrightarrow	Übersetzung

$$\text{d) } \omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 1448,89 \text{ min}^{-1}}{30} = \mathbf{151,727 \text{ s}^{-1}}$$

Probe: $v_{u1} = \omega_1 \cdot r_1 = 151,727 \text{ s}^{-1} \cdot 0,045 \text{ m} = 6,8277 \text{ m/s} = 6,8277 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s/min}$
 $v_{u1} = \mathbf{409,66 \text{ m/min}}$

Ü 1

Was wird im Zusammenhang mit Übersetzungen als „in Kraftrichtung“ bezeichnet?

Ü 2

Ein Treibriemen läuft mit einer Geschwindigkeit $v = 4,8 \text{ m/s}$. Die Antriebsscheibe hat einen Durchmesser $d_1 = 320 \text{ mm}$. Das Übersetzungsverhältnis ist $2,8 : 1$. Berechnen Sie

- den Durchmesser der getriebenen Scheibe,
- die Drehzahl der getriebenen Scheibe,
- die Winkelgeschwindigkeit der treibenden Scheibe.

Ü 3

Was wird in der Antriebstechnik als „Schlupf“ bezeichnet?

V 1

Antriebsdrehzahl $n_1 = 2860 \text{ min}^{-1}$, Durchmesser der treibenden Scheibe $d_1 = 120 \text{ mm}$, Durchmesser der getriebenen Scheibe $d_2 = 168 \text{ mm}$. Gesucht sind:

- Drehzahl n_2 ,
- Übersetzungsverhältnis i ,
- Winkelgeschwindigkeit ω_1 .

V 2

Ein Motor für das Gebläse einer Trockenanlage hat eine Drehzahl $n_1 = 1450 \text{ min}$. Das Übersetzungsverhältnis beträgt $i = 1 : 1,6$. Wie groß muss der Durchmesser d_1 Riemenscheibe auf der Motorwelle sein, wenn auf der angetriebenen Gebläsewelle eine Riemenscheibe mit dem Durchmesser $d_2 = 75 \text{ mm}$ angebracht ist?

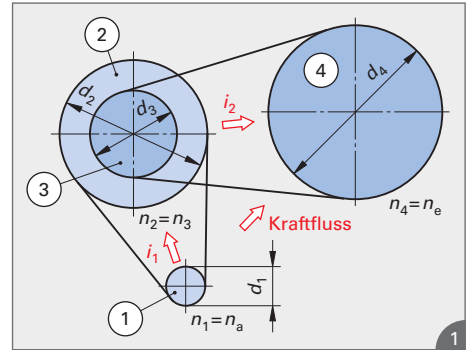
16.2 Doppelter Riementrieb und Mehrfachriementrieb

Beim **doppelten Riementrieb (Bild 1)** erfolgt der Antrieb von einer Scheibe mit dem Durchmesser d_1 und der

Anfangsdrehzahl $n_1 = n_a$

über die Scheibe mit dem Durchmesser d_2 , die mit der Scheibe mit dem Durchmesser d_3 auf der gleichen Welle, der Zwischenwelle sitzt, auf die Scheibe mit dem Durchmesser d_4 und der

Enddrehzahl $n_4 = n_e$



Die beiden Scheiben auf der Zwischenwelle haben naturgemäß die gleiche Drehzahl, d. h.: **$n_2 = n_3$** .

Es ergeben sich die **Einzelübersetzungsverhältnisse** $i_1 = \frac{n_1}{n_2}$; $i_2 = \frac{n_3}{n_4}$. Mit $n_2 = n_3$ wird $i_2 = \frac{n_2}{n_4}$.

Ausschlaggebend für die Übersetzung von Scheibe ① auf Scheibe ④, die **Gesamtübersetzung**, ist das **Gesamtübersetzungsverhältnis**.

Multipliziert man die Einzelübersetzungsverhältnisse i_1 und i_2 miteinander, so erhält man:

$$i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_3}{n_4} \text{ und da } n_2 = n_3 \text{ wird } i_1 \cdot i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_4} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{n_a}{n_e} = i_{\text{ges}}$$

Gesamtübersetzungsverhältnis

$$i_{\text{ges}} = \frac{n_a}{n_e}$$

Der **Kraftfluss** ist von n_a nach n_e gerichtet.

Entsprechendes gilt für den Dreifach-, Vierfach-, ... usw., also für den **Mehrfachriementrieb**:

Beim Mehrfachriementrieb errechnet sich das Gesamtübersetzungsverhältnis als Produkt aller Einzelübersetzungsverhältnisse.

Mit den Einzelübersetzungsverhältnissen als die Quotienten der

$$\text{Durchmesser erhält man: } i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_4}{d_3} \cdot \frac{d_6}{d_5} \cdot \dots = \frac{n_a}{n_e}.$$

Damit ergibt sich folgende **Grundgleichung** (Gleichung 4):

Grundgleichung für den Mehrfachriementrieb

$$n_a \cdot d_1 \cdot d_3 \cdot d_5 \cdot \dots = n_e \cdot d_2 \cdot d_4 \cdot d_6 \cdot \dots$$

Gesamtübersetzungsverhältnis

$$i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots = \frac{n_a}{n_e}$$

Gesamtübersetzungsverhältnis

$$i_{\text{ges}} = \frac{\omega_a}{\omega_e}$$

M 2 $n_a = 1500 \text{ min}^{-1}$, $d_1 = 80 \text{ mm}$, $d_2 = 200 \text{ mm}$, $d_3 = 125 \text{ mm}$, $d_4 = 280 \text{ mm}$. Berechnen Sie i_{ges} , n_e und ω_a .

Lösung: $i_{\text{ges}} = \frac{d_2 \cdot d_4}{d_1 \cdot d_3} = \frac{200 \text{ mm} \cdot 280 \text{ mm}}{80 \text{ mm} \cdot 125 \text{ mm}} = 5,6 = 5,6 : 1$

$$i_{\text{ges}} = \frac{n_a}{n_e} \longrightarrow n_e = \frac{n_a}{i_{\text{ges}}} = \frac{1500 \text{ min}^{-1}}{5,6} = 267,86 \text{ min}^{-1}$$

$$i_{\text{ges}} = \frac{\omega_a}{\omega_e} = 5,6 \longrightarrow \omega_a = i_{\text{ges}} \cdot \omega_e = i_{\text{ges}} \cdot \frac{\pi \cdot n_e}{30} = 5,6 \cdot \frac{\pi \cdot 267,86}{30} \text{ s}^{-1} = 157,08 \text{ rad/s}$$

Ü 4 $d_1 = 112 \text{ mm}$, $d_2 = 560 \text{ mm}$, $d_3 = 125 \text{ mm}$, $n_a = 1120 \text{ min}^{-1}$, $i_{\text{ges}} = 6:1$. Berechnen Sie n_e und d_4 .

V 3 $d_1 = 560 \text{ mm}$, $d_2 = 125 \text{ mm}$, $d_3 = 250 \text{ mm}$, $n_a = 280 \text{ min}^{-1}$, $n_e = 1400 \text{ min}^{-1}$. Berechnen Sie i_{ges} und d_4 .

B17 Übersetzungen beim Zahntrieb und in Getrieben

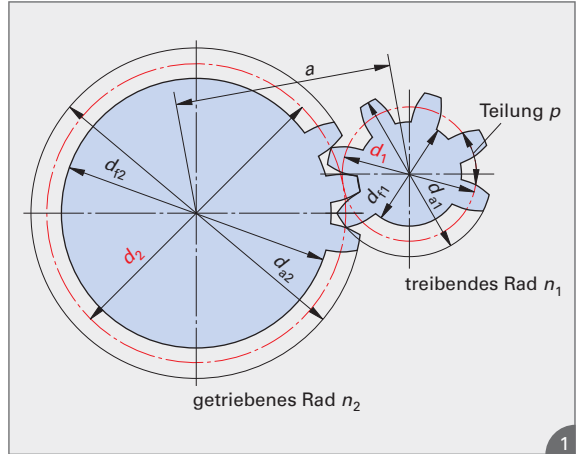
17.1 Einfacher Zahntrieb

Bild 1 zeigt das Schema eines **einfachen Zahntriebes**. Die Bezeichnungen haben folgende Bedeutung:

- d_f Fußkreisdurchmesser
- d_a Kopfkreisdurchmesser
- d Teilkreisdurchmesser
- p Teilung = Abstand der Zähne auf dem Teilkreisumfang
- a Achsabstand

Die Anzahl der Zähne eines Zahnrades wird als **Zähnezahl** z bezeichnet.

Beim Ineinandergreifen ist durch diesen **Formschluss** sichergestellt, dass eine **schlupffreie Kraftübertragung** vorliegt. Dabei „berühren“ sich die beiden Teilkreise d_1 und d_2 , die deswegen bei der Berechnung des Übersetzungsverhältnisses wichtig sind. Aus **Bild 1** ergibt sich:



Die **Geometrie der Verzahnung** wird innerhalb des Faches **Maschinenelemente** behandelt. Dort werden weitere **Verzahnungskriterien**, z.B. **Profilverschiebung** und **Zähnezahl** berücksichtigt.

Teilkreisumfang in mm

$$U = p \cdot z = \pi \cdot d$$

1

Stellt man **Gleichung 1** nach dem Durchmesser d des Teilkreises um, so ergibt sich $d = p/\pi \cdot z$. Man bezeichnet den Quotienten p/π als **Modul** m . Somit ergibt sich für den **Teilkreisdurchmesser** und den **Modul**:

Teilkreisdurchmesser in mm

$$d = m \cdot z$$

2

Modul in mm

$$m = \frac{p}{\pi}$$

3

Da sich die Teilkreise d_1 und d_2 berühren, können diese **entsprechend dem Riementrieb** für die Berechnung des Übersetzungsverhältnisses herangezogen werden.

Beim Zahntrieb werden die Zähne so konstruiert, dass sich die Teilkreise berühren. Damit verhalten sich die Drehzahlen umgekehrt wie die Zähnezahlen.

In Verbindung mit **Gleichung 2** ergibt sich:

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{m \cdot z_2}{m \cdot z_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Übersetzungsverhältnis beim einfachen Zahntrieb

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

4

17.2 Doppelter Zahntrieb und Mehrfachzahntrieb

Im **Bild 1/257** ist ein **doppelter Zahntrieb** in Draufsicht abgebildet. Wie beim doppelten Riementrieb bzw. beim Mehrfachriementrieb wird das Gesamtübersetzungsverhältnis durch Multiplikation der Einzelübersetzungsverhältnisse berechnet.

In Analogie zum Mehrfachriementrieb und in Verbindung mit **Gleichung 2** ergeben sich die beiden **Gleichungen 5 und 6** für das **Übersetzungsverhältnis beim Mehrfachzahntrieb**.

Übersetzungsverhältnis beim Mehrfachzahntrieb

$$i_{\text{ges}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots$$

5

Übersetzungsverhältnis beim Mehrfachzahntrieb

$$i_{\text{ges}} = \frac{n_a}{n_e}$$

6