

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL II

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I

unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 449 Seiten, 190 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5574-3, Europa-Nr. 55743

Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II

unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 618 Seiten, 136 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5576-7, Europa-Nr. 55767

Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache Integrale und Kurvenintegrale – Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1

12. Aufl. 1991, 283 Seiten, 3 Abb., geb., ISBN 978-3-8085-5578-1, Europa-Nr. 55781

Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2

unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5580-4, Europa-Nr. 55804

Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1

unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5582-8, Europa-Nr. 55828

Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2

unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN 978-3-8085-5584-2, Europa-Nr. 55842

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V

unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 545 Seiten, 3 Abb., brosch.,
ISBN 978-3-8085-5586-6, Europa-Nr. 55866

Das Stieltjesche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

ISBN 978-3-8085-5572-9, Europa-Nr. 55729



Edition
Harri 
Deutsch 

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

TEIL II

VON

W. I. SMIRNOW

17. Auflage 1990

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 55767

Titel der Originalausgabe

В. И. Смирнов

Курс высшей математики, Том 2

Наука, Москва 1965

Die Ausgabe in deutscher Sprache besorgten nach der 12. Auflage Klaus Krienes (Übersetzung), Klaus Krienes und Helmut Pachale (Wissenschaftliche Redaktion).

Die Übersetzung nach der im Jahre 1965 erschienenen 19., bearbeiteten russischen Auflage erfolgte durch Peter Langrock und Jürgen Tiedge.

Unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990

Druck 5 4

ISBN 978-3-8085-5576-7

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2017 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG,
42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: Totem, 88-100 Inowroclaw, Poland

Inhalt

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen	13
§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung	13
1. Allgemeine Begriffe	13
2. Festlegung der Lösung durch die Anfangsbedingung. Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz	15
3. Differentialgleichungen mit separierbaren Veränderlichen	17
4. Beispiele	18
5. Homogene Differentialgleichungen	22
6. Lineare Differentialgleichungen und die Bernoullische Differentialgleichung	27
7. Das Euler-Cauchysche Verfahren	31
8. Anwendung von Potenzreihen	33
9. Das allgemeine Integral und die singuläre Lösung	35
10. Gleichungen, die nicht nach y' aufgelöst sind	37
11. Die Clairautsche Differentialgleichung	39
12. Die Lagrangesche Differentialgleichung	42
13. Die Einhüllende einer Kurvenschar und die singulären Lösungen	44
14. Die isogonalen Trajektorien	47
§ 2. Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen	49
15. Allgemeine Begriffe	49
16. Graphische Verfahren zur Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung	51
17. Die Gleichung $y^{(n)} = f(x)$	54
18. Die Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung	55
19. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	58
20. Beispiele	62
21. Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung	66
22. Lineare partielle Differentialgleichungen	67
23. Geometrische Interpretation	70
24. Beispiele	72
II. Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen	76
§ 3. Allgemeine Theorie. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	76
25. Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung	76
26. Die lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung	79
27. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	81

28. Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	82
29. Die lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	85
30. Spezialfälle	86
31. Die Nullstellen einer Lösungsfunktion und oszillierende Lösungen	88
32. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	91
33. Lineare Differentialgleichungen und die Schwingungsvorgänge	93
34. Eigenschwingungen und erzwungene Schwingungen	95
35. Sinusförmige äußere Kraft und Resonanz	97
36. Randwertaufgaben	102
37. Beispiele	104
38. Die Operatorenmethode	105
39. Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	108
40. Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	110
41. Beispiel	111
42. Die Eulersche Differentialgleichung	112
43. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	114
44. Beispiele	118
§ 4. Integration mittels Potenzreihen	121
45. Integration einer linearen Differentialgleichung mittels einer Potenzreihe	121
46. Beispiele	124
47. Entwicklung der Lösung in eine verallgemeinerte Potenzreihe	125
48. Die Besselsche Differentialgleichung	127
49. Differentialgleichungen, die sich auf die Besselsche Differentialgleichung zurückführen lassen	130
§ 5. Ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen	132
50. Die Methode der sukzessiven Approximation für lineare Differentialgleichungen	132
51. Nichtlineare Differentialgleichungen	139
52. Ergänzungen zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz	145
53. Die Konvergenz des Euler-Cauchyschen Verfahrens	147
54. Singuläre Punkte einer Differentialgleichung erster Ordnung	150
55. Autonome Systeme	158
56. Beispiele	160
III. Mehrfache Integrale und Kurvenintegrale. Uneigentliche Integrale und Integrale, die von einem Parameter abhängen	166
§ 6. Mehrfache Integrale	166
57. Volumina	166
58. Das Doppelintegral	169
59. Die Berechnung des Doppelintegrals	171
60. Krummlinige Koordinaten	175
61. Das dreifache Integral	178
62. Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten	182
63. Krummlinige Koordinaten im Raum	187
64. Fundamenteleigenschaften mehrfacher Integrale	188
65. Der Inhalt einer Fläche	189
66. Flächenintegrale und die Gauß-Ostrogradskische Formel	193

67. Integrale über eine bestimmte Seite der Fläche	196
68. Momente	198
§ 7. Kurvenintegrale	202
69. Definition des Kurvenintegrals	202
70. Die Arbeit in einem Kraftfeld. Beispiele	205
71. Flächeninhalt und Kurvenintegral	209
72. Die Greensche Formel	211
73. Die Stokessche Formel.	213
74. Die Unabhängigkeit eines ebenen Kurvenintegrals vom Weg	216
75. Der Fall eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches	220
76. Die Unabhängigkeit eines räumlichen Kurvenintegrals vom Weg	222
77. Die stationäre Strömung einer Flüssigkeit	224
78. Der integrierende Faktor.	226
79. Die vollständige Differentialgleichung im Fall dreier Veränderlicher	230
80. Substitution der Veränderlichen in einem Doppelintegral	232
§ 8. Uneigentliche Integrale und Integrale, die von einem Parameter abhängen	234
81. Integration unter dem Integralzeichen	234
82. Die Dirichletsche Formel.	236
83. Differentiation unter dem Integralzeichen	239
84. Beispiele	242
85. Uneigentliche Integrale	246
86. Nicht absolut konvergente Integrale	250
87. Gleichmäßig konvergente Integrale	253
88. Beispiele	256
89. Uneigentliche mehrfache Integrale	259
90. Beispiele	263
§ 9. Maß und Integrationstheorie	268
91. Grundbegriffe	268
92. Grundlegende Sätze	270
93. Abzählbare Mengen. Operationen mit Punktmengen	272
94. Das Jordansche Maß	274
95. Meßbare Mengen	276
96. Die Unabhängigkeit von der Wahl des Bezugssystems	279
97. Der Fall beliebig vieler Dimensionen	281
98. Integrierbare Funktionen	281
99. Die Berechnung des Doppelintegrals	283
100. Die n -fachen Integrale	286
101. Beispiele	287
102. Das äußere Lebesguesche Maß	289
103. Meßbare Mengen	290
104. Meßbare Funktionen	295
105. Ergänzende Ausführungen	298
106. Das Lebesguesche Integral	300
107. Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals	302
108. Integrale unbeschränkter Funktionen	306
109. Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen	309
110. Der Satz von FUBINI	311
111. Integrale über Mengen mit unendlichem Maß	314

IV. Vektoranalysis und Feldtheorie	316
§ 10. Grundzüge der Vektoralgebra	316
112. Addition und Subtraktion von Vektoren	316
113. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Komplanare Vektoren.	318
114. Die Zerlegung eines Vektors in drei nichtkomplanare Vektoren	319
115. Das skalare Produkt	320
116. Das Vektorprodukt	321
117. Beziehungen zwischen skalaren Produkten und Vektorprodukten	324
118. Die Geschwindigkeitsverteilung bei der Drehung eines starren Körpers. Das Moment eines Vektors	325
§ 11. Feldtheorie	327
119. Differentiation eines Vektors	327
120. Das skalare Feld und sein Gradient	329
121. Das Vektorfeld. Rotation und Divergenz.	333
122. Potential- und Solenoidalfeld	336
123. Das orientierte Flächenelement	338
124. Einige Formeln der Vektoranalysis	339
125. Die Bewegung eines starren Körpers. Kleine Deformationen	341
126. Die Kontinuitätsgleichung	343
127. Die hydrodynamischen Gleichungen einer idealen Flüssigkeit	345
128. Die Gleichungen der Schallausbreitung.	346
129. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung	347
130. Die Maxwell'schen Gleichungen	349
131. Die Darstellung des Laplaceschen Operators in orthogonalen Koordinaten	352
132. Differentiation im Fall eines veränderlichen Feldes	357
V. Anfangsgründe der Differentialgeometrie	363
§ 12. Kurven in der Ebene und im Raum	363
133. Die ebene Kurve, ihre Krümmung und Evolute	363
134. Die Evolvente	369
135. Die natürliche Gleichung einer Kurve	370
136. Die Fundamentalgrößen einer Raumkurve	371
137. Die Frenetschen Formeln	375
138. Die Schmiegeebene	376
139. Die Schraubenlinie	377
140. Das Feld der Einheitsvektoren	379
§ 13. Elemente der Flächentheorie	380
141. Die Parameterdarstellung einer Fläche	380
142. Die erste Gaußsche Fundamentalform	382
143. Die zweite Gaußsche Fundamentalform	383
144. Die Krümmung der Flächenkurven	385
145. Die Dupinsche Indikatrix und die Eulersche Formel.	388
146. Bestimmung der Hauptkrümmungsradien und der Hauptkrümmungsrich- tungen	390
147. Krümmungslinien	392
148. Der Dupinsche Satz	394
149. Beispiele	395
150. Die Gaußsche Krümmung	397

151. Variation des Flächenelements und mittlere Krümmung	399
152. Die Einhüllende einer Flächenschar und die Einhüllende einer Kurvenschar	401
153. Abwickelbare Flächen	404
VI. Fourier-Reihen	407
§ 14. Die harmonische Analyse	407
154. Die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen	407
155. Der Dirichletsche Satz	411
156. Beispiele	413
157. Die Entwicklung im Intervall $[0, \pi]$	415
158. Periodische Funktionen der Periode $2l$	419
159. Der mittlere quadratische Fehler	421
160. Allgemeine orthogonale Funktionensysteme	425
161. Die Klasse L_2	430
162. Konvergenz im Mittel	431
163. Orthonormale Systeme in L_2	434
§ 15. Ergänzende Ausführungen zur Theorie der Fourier-Reihen	436
164. Die Entwicklung in eine Fourier-Reihe	436
165. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung	441
166. Das Dirichletsche Integral	444
167. Der Dirichletsche Satz	447
168. Approximation einer stetigen Funktion durch Polynome	449
169. Die Vollständigkeitsrelation	453
170. Der Konvergenzcharakter der Fourier-Reihen	455
171. Verbesserung der Konvergenz von Fourier-Reihen	459
172. Beispiel	462
§ 16. Fourier-Integral und mehrfache Fourier-Reihen	464
173. Die Fouriersche Formel	464
174. Die Fourier-Reihen in der komplexen Form	471
175. Mehrfache Fourier-Reihen	472
VII. Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik	475
§ 17. Die Wellengleichung	475
176. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	475
177. Die d'Alembertsche Lösung	479
178. Spezialfälle	481
179. Die begrenzte Saite	486
180. Die Fouriersche Methode	491
181. Die Harmonischen. Stehende Wellen	493
182. Erzwungene Schwingungen	495
183. Eine Einzelkraft	497
184. Die Poissonsche Formel	501
185. Zylinderwellen	505
186. Der n -dimensionale Raum	507
187. Die inhomogene Wellengleichung	509
188. Die punktförmige Quelle	512
189. Querschwingungen einer Membran	513

190. Die rechteckige Membran	514
191. Die kreisförmige Membran	517
192. Der Eindeutigkeitssatz	524
193. Anwendung des Fourierschen Integrals	526
§ 18. Die Telegraphengleichung	528
194. Die Grundgleichungen	528
195. Stationäre Prozesse	529
196. Einschwingvorgänge	531
197. Beispiele	535
198. Die verallgemeinerte Gleichung der Schwingungen einer Saite	537
199. Der unbegrenzte Leiter im allgemeinen Fall	540
200. Das Fouriersche Verfahren für den begrenzten Leiter	542
201. Die verallgemeinerte Wellengleichung	545
§ 19. Die Laplacesche Gleichung	547
202. Harmonische Funktionen	547
203. Die Greensche Formel	549
204. Fundamenteleigenschaften der harmonischen Funktionen	553
205. Die Lösung des Dirichletschen Problems für den Kreis	557
206. Das Poissonsche Integral	560
207. Das Dirichletsche Problem für die Kugel	564
208. Die Greensche Funktion	568
209. Der Fall des Halbraums	569
210. Das Potential räumlich verteilter Massen	570
211. Die Poissonsche Gleichung	574
212. Die Kirchhoffsche Formel	577
§ 20. Die Wärmeleitungsgleichung	580
213. Grundgleichungen	580
214. Der unbegrenzte Stab	581
215. Der einseitig begrenzte Stab	586
216. Der beidseitig begrenzte Stab	590
217. Ergänzende Bemerkungen	592
218. Der kugelsymmetrische Fall	593
219. Der Eindeutigkeitssatz	595
Literaturhinweise	599
Namen- und Sachverzeichnis	610

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung

1. Allgemeine Begriffe. Unter einer *Differentialgleichung* versteht man eine Gleichung, die außer den unabhängigen Veränderlichen und den unbekannten Funktionen dieser Veränderlichen auch noch die Ableitungen der unbekannten Funktionen oder deren Differentiale enthält [I, 51]. Hängen die in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen nur von *einer unabhängigen Veränderlichen* ab, so heißt die Gleichung eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Treten jedoch in der Gleichung partielle Ableitungen der unbekannten Funktionen nach mehreren unabhängigen Veränderlichen auf, so nennt man die Gleichung *partielle Differentialgleichung*. In diesem Kapitel werden wir nur gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. Der größere Teil des Kapitels wird dem Fall gewidmet sein, daß nur eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Funktion vorgegeben ist.

Es seien x die unabhängige Veränderliche und y die gesuchte Funktion dieser Veränderlichen. Die allgemeine Form einer Differentialgleichung ist dann

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Die höchste Ordnung der in der Gleichung auftretenden Ableitungen der unbekannten Funktion heißt *Ordnung der Differentialgleichung*. In diesem Paragraphen wollen wir nur gewöhnliche Differentialgleichungen *erster Ordnung* betrachten. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung lautet

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

oder, nach y' aufgelöst,

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Benutzen wir eine andere Bezeichnung für die Ableitung, so können wir diese Gleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

schreiben.

Genügt eine Funktion

$$y = \varphi(x) \tag{4}$$

der Differentialgleichung, d. h., wird diese Gleichung beim Einsetzen von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ für y bzw. y' zu einer Identität in x , so heißt $\varphi(x)$ *Lösung dieser Differentialgleichung*. Dabei wird natürlich $\varphi(x)$ als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Die Ermittlung von Lösungen einer Differentialgleichung wird bisweilen *Integration* einer Differentialgleichung genannt.

Im einfachsten Fall, wenn die rechte Seite der Gleichung (2) die Variable y nicht enthält, ergibt sich eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x). \quad (5)$$

Die Ermittlung der Lösungen dieser Gleichung stellt die Grundaufgabe der Integralrechnung dar [I, 86]; die Gesamtheit dieser Lösungen ist gegeben durch

$$y = \int f(x) dx + C, \quad (6)$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist. So existiert also in diesem einfachen Fall eine Schar von Lösungen der Differentialgleichung, die von einer willkürlichen Konstante abhängt. Es wird sich zeigen, daß sich auch im allgemeinen Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung eine Lösungsschar ergibt, die eine willkürliche Konstante enthält:

$$y = \varphi(x, c). \quad (7)$$

Eine solche Lösungsschar heißt *allgemeines Integral* der Differentialgleichung. Das allgemeine Integral kann implizit oder nach C aufgelöst angegeben werden:

$$\varphi(x, y, C) = 0 \quad \text{oder} \quad \omega(x, y) = C. \quad (7_1)$$

Geben wir der willkürlichen Konstanten C verschiedene Zahlenwerte, so erhalten wir verschiedene Lösungen der Gleichung, sogenannte *partikuläre Lösungen*.

Wir werden jetzt Differentialgleichung und Lösungen geometrisch interpretieren. Sieht man x und y als Punktkoordinaten in der Ebene an, so ordnet die Differentialgleichung (2) jedem Punkt (x, y) , in dem die Funktion $f(x, y)$ definiert ist, einen Richtungskoeffizienten y' einer Tangente an eine gewisse Kurve zu. Die gesuchte Lösung (4) der Gleichung (2) ist eine solche Kurve (im Spezialfall eine Gerade), die in jedem ihrer Punkte den Richtungskoeffizienten y' der Tangente besitzt, wie er durch Gleichung (2) bestimmt ist.

Eine solche Kurve heißt *Integralkurve* der Differentialgleichung. Der Begriff der Lösung der Gleichung (2) stimmt also mit dem Begriff der Integralkurve (im Spezialfall der Geraden) dieser Gleichung in der x, y -Ebene überein.

Das allgemeine Integral (7) liefert eine unendliche Vielfalt von Integralkurven oder, genauer gesagt, eine Kurvenschar, die von einer willkürlichen Konstanten abhängt.

Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(x, y)$ in einem bestimmten Bereich B der x, y -Ebene eindeutig und stetig ist. Die Kurve l sei die entsprechende Lösung (7) in diesem Bereich, und $\varphi(x)$ sei definiert auf einem gewissen Intervall I .

Um von einer Lösung (4) sprechen zu können, müssen wir in Einklang mit den obigen Darlegungen voraussetzen, daß $\varphi(x)$ stetig ist und in I eine Ableitung nach x besitzt. Falls zum Intervall I auch dessen linke Begrenzung gehört, soll $\varphi'(x)$ die rechtsseitige Ableitung sein; falls seine rechte Begrenzung dazu gehört, soll $\varphi'(x)$ die linksseitige Ableitung bedeuten.

Aus der Gleichung (3) und aus der Stetigkeit von $f(x, y)$ folgt sofort die Stetigkeit der Ableitung $\varphi'(x)$ im Intervall I .

Bis jetzt haben wir naturgemäß angenommen, daß alle Funktionen eindeutig sind. Aus der Eindeutigkeit von $\varphi(x)$ folgt, daß zur y -Achse parallele Geraden die Integralkurve in höchstens einem Punkt schneiden können. Schreiben wir die Gleichung (2) oder (3) in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (3_1)$$

d. h., betrachten wir nicht y als Funktion von x , sondern x als Funktion von y , so können zur x -Achse parallele Geraden die Integralkurve in höchstens einem Punkt schneiden.

Es sei l eine Integralkurve der Gleichung (2) derart, daß nicht nur zur y -Achse parallele Geraden, sondern auch zur x -Achse parallele Geraden diese Kurve l in höchstens einem Punkt schneiden; dann besitzt die Funktion $\varphi(x)$ in der Gleichung $y = \varphi(x)$ eine eindeutige Umkehrfunktion $x = \psi(y)$. Dabei ist l auch Integralkurve der Differentialgleichung (3₁).

Im weiteren werden wir hauptsächlich mit Gleichungen der Form (2) zu tun haben.

2. Festlegung der Lösung durch die Anfangsbedingung. Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Die sehr einfache Gleichung (5) hat eine unendliche Vielfalt von Lösungen, da in der Formel (6) eine willkürliche Konstante auftritt. Es ist leicht zu zeigen, daß wir eine vollständig bestimmte Lösung der Gleichung (5) erhalten, wenn wir eine sogenannte *Anfangsbedingung* vorgeben, wenn wir nämlich fordern, daß die gesuchte Funktion y für einen vorgegebenen Wert $x = x_0$ einen bestimmten Wert y_0 annimmt. Diese Anfangsbedingung schreiben wir in der Form

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (8)$$

Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion in einem gewissen Intervall I ist, gehöre auch der Punkt $x = x_0$ zu diesem Intervall. Ersetzt man in der Formel (6) das unbestimmte Integral durch ein bestimmtes mit der veränderlichen oberen Grenze x und der unteren Grenze x_0 , so erhält man anstelle von (6)

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + C.$$

Der erste Summand wird 0 für $x = x_0$. Um die Bedingung (8) zu erfüllen, muß man $C = y_0$ setzen. Also besitzt die Gleichung (5) bei dieser Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0.$$

Es sei bemerkt, daß diese Lösung im gesamten Intervall I gilt.

Damit das allgemeine Integral (7) einer beliebigen Gleichung (2) die Anfangsbedingung (8) erfüllt, muß analog die willkürliche Konstante C aus der Gleichung

$$y_0 = \varphi(x_0, C) \quad (9)$$

bestimmt werden.

Wir wenden uns nun der geometrischen Interpretation zu und setzen voraus, daß die Funktion $f(x, y)$ in einem gewissen Bereich B der x, y -Ebene definiert und in diesem Bereich eindeutig und stetig ist. Wie wir schon erwähnt haben, wird durch Gleichung (2) in jedem Punkt (x, y) aus B der Richtungskoeffizient y' der Tangente an die gesuchte Integralkurve bestimmt.

Durch den Punkt (x, y) legen wir einen kurzen Abschnitt der Geraden, die mit der x -Achse einen Winkel α bildet, wobei $\tan \alpha = y'$ ist. Diesem Abschnitt geben wir eine beliebige Orientierung (der Übergang zur entgegengesetzten Orientierung ändert den Wert $\tan \alpha$ nicht). Wir sehen, daß Gleichung (2) der Definition eines *Richtungsfeldes* im Bereich B entspricht, d. h., in jedem Punkt des Bereiches B definiert Gleichung (2) eine bestimmte Richtung. Integralkurven der Gleichung (2)

sind die Kurven l , die im Bereich B liegen und folgende Eigenschaften besitzen: In jedem Punkt (x, y) hat die Tangente an l die Richtung, die durch das oben angegebene Richtungsfeld bestimmt ist. Die Anfangsbedingung (8) reduziert sich auf die Forderung, daß die Integralkurve durch einen gegebenen Punkt (x_0, y_0) des Bereiches B verläuft.

Wir führen jetzt geometrische Erwägungen an, aus denen anschaulich (aber nicht streng logisch) folgt, daß durch einen gegebenen Punkt $M_0(x_0, y_0)$ eine und nur eine Integralkurve geht. Mit Hilfe achsenparalleler Geraden (Abb. 1) unterteilen wir die x, y -Ebene so in kleine Quadrate, daß der Punkt M_0 in einen Eckpunkt eines dieser Quadrate fällt (dies ist für die Betrachtung unwesentlich).

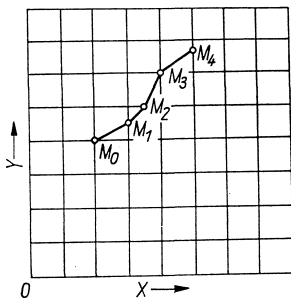


Abb. 1

Vom Punkt M_0 ausgehend, konstruieren wir in der Richtung wachsender x -Werte einen Geradenabschnitt $\overline{M_0 M_1}$ mit dem Richtungskoeffizienten $y'_0 = f(x_0, y_0)$ bis zum ersten Schnittpunkt mit einer der Geraden des quadratischen Netzes. (x_1, y_1) seien die Koordinaten des Punktes M_1 . Vom Punkt M_1 ausgehend, ziehen wir in Richtung wachsender x -Werte einen Geradenabschnitt mit dem Richtungskoeffizienten $y'_1 = f(x_1, y_1)$ bis zum nächsten Schnittpunkt mit einer Geraden des quadratischen Netzes usw. Diese Konstruktion kann ebenfalls in Richtung fallender x -Werte ausgeführt werden. Der in der angegebenen Weise konstruierte Polygonzug stellt näherungsweise für alle x , die in der Nähe von x_0 liegen, die gesuchte Integralkurve der Gleichung (2) dar, die durch den Punkt M_0 verläuft. Diese Konstruktion legt den Schluß nahe, daß durch jeden Punkt M_0 aus B eine und nur eine Integralkurve verläuft. Diese Behauptung ist richtig, und sie wird im weiteren bewiesen werden, wenn $f(x, y)$ außer der Stetigkeit noch eine weitere Eigenschaft besitzt.

Wir wollen nun annehmen, daß B ein offener Bereich ist, d. h. ein Bereich, der seine Berandung nicht enthält (B kann auch die gesamte Ebene sein). Es gilt der folgende Satz.

Satz A. *Wenn $f(x, y)$ stetig ist und eine stetige partielle Ableitung nach y in B besitzt, verläuft durch jeden Punkt aus B eine und nur eine Integralkurve der Gleichung (2).*

Diesen Satz, den wir jetzt ohne Beweis hinnehmen, nennt man gewöhnlich *Existenz- und Eindeigkeitssatz* für die Lösung der Differentialgleichung (2) bei vorgegebener Anfangsbedingung.

Am Schluß des folgenden Kapitels führen wir den Beweis dieses Satzes und eine Reihe Ergänzungen dazu an. Wir wollen jetzt erklären, wie die Behauptung, die Lösung sei bei vorgegebener Anfangsbedingung eindeutig, zu verstehen ist.

Es seien $y = \varphi_1(x)$ und $y = \varphi_2(x)$ zwei Lösungen der Gleichung (2), die die Bedingung (8) erfüllen, wobei die erste auf einem Intervall I_1 und die zweite auf dem Intervall I_2 , in dem x variiert, definiert sei. Der Punkt x_0 soll diesen beiden Intervallen angehören. Dann muß auf dem Durchschnitt der beiden Intervalle I_1 und I_2 die Identität $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ gelten. Es wird natürlich vorausgesetzt, daß die Integralkurven $y = \varphi_1(x)$ und $y = \varphi_2(x)$ nicht aus dem Bereich B hinausführen, in dem $f(x, y)$ definiert ist und die im Satz A angegebenen Bedingungen erfüllt.

In den folgenden Abschnitten werden wir einige spezielle Typen von Differentialgleichungen behandeln, deren Integration auf die Berechnung unbestimmter Integrale hinausläuft oder, wie man auch sagt, deren Integration auf Quadraturen führt.

Es sei bemerkt, daß die Berechnung eines Integrals mit der des Inhalts einer Fläche verknüpft ist. Hieraus ergibt sich auch der Ausdruck „Quadratur“.

Zur Untersuchung der erwähnten speziellen Typen bringen wir eine Reihe von Beispielen, an denen wir die weiter oben aufgezeigten Überlegungen illustrieren werden, die mit dem Satz A zusammenhängen.

3. Differentialgleichungen mit separierbaren Veränderlichen. Neben der einfachsten Gleichung (5) betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = f(y) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Wir schreiben sie in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

und erhalten ihr allgemeines Integral in der Gestalt

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Jetzt nehmen wir an, daß die rechte Seite der Gleichung (3) ein Produkt zweier Funktionen ist, von denen die eine nur von x und die andere nur von y abhängt:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y). \quad (10)$$

Diese Gleichung kann man in der Form

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \quad (10_1)$$

schreiben. Es sei $y(x)$ eine bestimmte Lösung der Gleichung (10) und damit auch der Gleichung (10₁). Die Gleichung (10₁) ist eine Gleichheit zweier Differentiale, deren linke Seite nur y enthält (die Form des Differentials erster Ordnung hängt nicht von der Wahl der Veränderlichen ab [I, 50]). Aus der Gleichheit der Differentiale folgt, daß sich ihre unbestimmten Integrale nur durch einen willkürlichen konstanten Summanden unterscheiden:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C.$$

Nachdem man die Quadraturen ausgeführt und bezüglich y aufgelöst hat, erhält man das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10).

Den Übergang von (10) zu (10₁) nennt man gewöhnlich *Separation (Trennung) der Veränderlichen*.

In Verbindung mit dem oben Gesagten stellen wir einige allgemeine Betrachtungen an.

Jede Differentialgleichung erster Ordnung, die bezüglich der Ableitung aufgelöst wurde, kann man in der Gestalt

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (11)$$

darstellen. Eine Gleichung, die in dieser Form geschrieben ist, ist nicht gebunden an die Auswahl der unbekannten Funktion. Man kann sowohl y als auch x als unbekannte Funktion ansehen.

$M(x, y)$ und $N(x, y)$ sollen nun jeweils Produkt zweier Funktionen sein, von denen die eine nur von x und die andere nur von y abhängt:

$$M_1(x) M_2(y) dx + N_1(x) N_2(y) dy = 0.$$

Eine solche Gleichung nennt man *Differentialgleichung mit separierbaren Veränderlichen* [I, 93].

Indem wir jeden Summanden durch $N_1(x) M_2(y)$ dividieren, „separieren wir die Veränderlichen“:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung erhalten wir in der Gestalt

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C.$$

Im weiteren werden wir uns ebenfalls mit der allgemeinen Gleichung (11) beschäftigen.

Bisher haben wir die Bedingungen noch nicht präzisiert, die man den Funktionen $g(x)$, $h(y)$ usw. auferlegen muß; wir haben auch nicht die Frage der Umformungen, die ausgeführt wurden, erörtert, z. B. die Division beider Seiten der Gleichung (10) durch $h(y)$. Dies wird sich ausführlicher in den Beispielen klären.

4. Beispiele.

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{y}{x}, \quad (12)$$

wobei a eine von 0 verschiedene Konstante ist. Die Veränderlichen lassen sich trennen:

$$\frac{dy}{y} = a \frac{dx}{x}.$$

Hieraus folgt

$$\log |y| = a \log |x| + \log |C| \quad (13)$$

oder

$$|y| = |C| \cdot |x|^a.$$

Bei der Integration schreiben wir als Argument des Logarithmus eine absolute Größe, damit auch die Möglichkeit negativer Größen berücksichtigt wird; die willkürliche Konstante bezeichnen wir mit $\log |C|$. Die Gleichung (12) bestimmt ein Richtungsfeld auf der gesamten Ebene, außer auf der Geraden $x = 0$. Wenn wir die Differentialgleichung in der Gestalt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a} \frac{x}{y} \quad (12_1)$$

schreiben, so sehen wir, daß das Richtungsfeld auf der Geraden $x = 0$ bestimmt ist für $y \neq 0$. In diesen Punkten ist die Tangente parallel zur y -Achse.

Im Punkt $(0, 0)$ ist die rechte Seite von (12) und (12₁) sinnlos.

Für die Gleichung (12) hat man zwei Bereiche B in Satz A, nämlich die linke Halbebene $x < 0$ und die rechte Halbebene $x > 0$; für Gleichung (12₁) hat man die obere Halbebene $y > 0$ und die untere Halbebene $y < 0$.

Wir betrachten jetzt die Fälle $a = 2$, $a = 1$ und $a = -1$.

Für $a = 2$ folgt aus (13) $y = Cx^2$, d. h., wir erhalten eine Schar von Parabeln, die in ihrem Scheitelpunkt $(0, 0)$ die x -Achse berühren, und die Gerade $y = 0$ (für $C = 0$). Für die Gleichung (12₁) ist auch die Gerade $x = 0$ eine Integralkurve. Mit Ausnahme des Punktes $(0, 0)$ verläuft durch jeden Punkt der Ebene eine und nur eine Kurve der Lösungsschar, die aus den erwähnten Parabeln und den Koordinatenachsen besteht. Im Punkt $(0, 0)$, in dem die Differentialgleichung nicht definiert ist, treffen sich alle Kurven der erwähnten Schar (*Knotenpunkt* aller Integralkurven).

Würden wir nur die Gleichung (12) betrachten, so würde die y -Achse ($x = 0$) aus der Schar der Integralkurven ausgeschlossen werden. Überall auf dieser Achse, mit Ausnahme des Ursprungs, wächst die rechte Seite von (12) über alle Grenzen (die Stetigkeit geht verloren). Es sei bemerkt, daß alle Integralkurven der Gleichung (12) die x -Achse berühren.

Für $a = 1$ folgt aus (13) $y = Cx$, d. h., die Schar der Integralkurven ist die Schar aller Geraden, die durch den Ursprung verlaufen. Diese Schar enthält, wie für $a = 2$, auch die Koordinatenachsen. In diesem Fall durchlaufen die Integralkurven der Gleichung (12) (Geraden) den Ursprung mit verschiedenen Richtungskoeffizienten.

Für $a = -1$ erhalten wir aus (13) $y = \frac{C}{x}$, d. h., die Schar der Integralkurven der Gleichungen (12) und (12₁) enthält alle gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind, und diese Achsen selbst. Letzteres hat man so zu verstehen: Im Ursprung treffen sich die positiven und die negativen Strahlen der Koordinatenachsen.

2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{x}{y}. \quad (14)$$

Die Veränderlichen lassen sich separieren,

$$y \, dy = ax \, dx,$$

und wir erhalten durch Integration

$$y^2 = ax^2 + 2C. \quad (15)$$

Für Gleichung (14) hat man dem Satz A entsprechend zwei Bereiche B , wie im Beispiel 1, nämlich die obere Halbebene $y > 0$ und die untere Halbebene $y < 0$.

Für $a = -1$ erhalten wir $x^2 + y^2 = 2C$, d. h., die Schar der Integralkurven ist die Schar aller Kreise mit dem Mittelpunkt in $(0, 0)$. Mit Ausnahme des Punktes $(0, 0)$ geht durch jeden Punkt der Ebene genau ein solcher Kreis, aber keine Integralkurve, die dem Ursprung beliebig nahe kommt.

Wenn man nur die Gleichung (14) betrachtet, muß man y als eine eindeutige Funktion von x ansehen. Deshalb wird jeder Kreis aus zwei Integralkurven bestehen: aus dem oberen Kreisbogen (für $y > 0$) und dem unteren (für $y < 0$).

Auf der x -Achse (für $y = 0$ und $x \neq 0$) wächst die rechte Seite von (14) über alle Grenzen. In diesen Punkten sind die Tangenten der Kreise Parallelen zur y -Achse. Wenn wir (14) für $a = -1$ in der Form

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \quad (14_1)$$

schreiben, verschwindet die Singularität an der Stelle $y = 0$, aber es entsteht eine Singularität bei $x = 0$. Man muß dann die rechten Teile der Kreise (für $x > 0$) und die linken (für $x < 0$) betrachten, für die dann x eine eindeutige Funktion von y ist, wie es Gleichung (14₁) verlangt. Der Bereich B aus Satz A ist bei Gleichung (14₁) verschieden von dem entsprechenden Bereich bei Gleichung (14) für $a = -1$; für die Anwendung des Satzes A müssen wir also die Differentialgleichung in irgendeiner bestimmten Form vorgeben. Wir werden auch weiterhin dabei bleiben, falls es keine speziellen Vorbehalte von einem anderen Gesichtspunkt aus gibt.

Man kann die Gleichungen (14) und (14₁) auch zusammen betrachten, wie wir es in Beispiel 1 taten. Dieser Gesichtspunkt wird im Buch von I. G. PETROWSKI, Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig 1954 (Übersetzung aus dem Russischen), behandelt. Die angedeuteten Unbequemlichkeiten bei der Untersuchung der Integralkurven hängen damit zusammen, daß wir ihre Gleichungen in expliziter Form $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ betrachten. Wenn wir zur Parameterdarstellung der Gleichungen der Integralkurven übergehen, d. h., wenn wir x und y als Funktionen eines Hilfsparameters t betrachten, geht (14) in ein System von zwei Gleichungen für zwei Funktionen x und y der unabhängigen Veränderlichen t über:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Die Integration von Systemen werden wir später behandeln.

Wir wollen noch die Gleichung (14) für $a = 1$ betrachten. Aus (15) erhalten wir $y^2 - x^2 = 2C$. Die Schar der Integralkurven enthält alle gleichseitigen Hyperbeln und ihre Asymptoten $y = \pm x$.

3. Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2. \quad (16)$$

Hier ist das Richtungsfeld auf der gesamten Ebene definiert. Die rechte Seite von (16) ist stetig und besitzt eine stetige Ableitung nach y auf der gesamten Ebene. Der Bereich B aus Satz A ist hier die ganze Ebene. Durch jeden Punkt

in der Ebene verläuft genau eine Integralkurve, die in ihrem gesamten Verlauf keine gemeinsamen Punkte mit anderen Integralkurven besitzt.

In der Gleichung (16) lassen sich die Veränderlichen trennen, und das allgemeine Integral hat die Form

$$y = -\frac{1}{x+C} \quad \text{oder} \quad (x+C)y = -1. \quad (17)$$

Dies ist eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln, die ihren Mittelpunkt in $(-C, 0)$ und die Asymptoten $y = 0$ und $x = -C$ haben. Außerdem hat (16) die Lösung $y = 0$. Die Gleichung (17) liefert zwei Integralkurven (zwei Hyperbeläste):

$$y = -\frac{1}{x+C} \quad \text{für} \quad -\infty < x < -C,$$

$$Y = -\frac{1}{x+C} \quad \text{für} \quad -C < x < \infty.$$

Die ersten füllen für alle möglichen C , ohne sich zu kreuzen, die obere Halbebene ($y > 0$) aus; die anderen füllen die untere Halbebene ($y < 0$) aus.

Die Lösung $y = 0$ kann man formal aus der Lösung (17) erhalten. Dazu ersetzt man in der zweiten Formel von (17) C durch $\frac{1}{C}$ und multipliziert beide Seiten mit C . Dies führt auf die Formel

$$(Cx + 1)y = -C.$$

Für $C = 0$ erhalten wir hieraus $y = 0$. Diese Gerade füllt zusammen mit den erwähnten Hyperbeln kreuzungsfrei die gesamte Ebene aus.

4. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \quad (18)$$

definiert, wie im Beispiel 3, auf der gesamten Ebene ein Richtungsfeld. Die Veränderlichen lassen sich trennen, und das allgemeine Integral ist gegeben durch

$$y = (x + C)^3. \quad (19)$$

Dies ist eine Schar kubischer Parabeln, die man aus der Parabel $y = x^3$ durch Parallelverschiebung längs der x -Achse erhält (Abb. 2).

Die Gleichung (18) besitzt außerdem die Lösung $y = 0$ (die x -Achse), die man aus der Formel (19) für keinen Zahlenwert von C erhält. Man kann leicht zeigen, daß für die Gleichungen (18) und $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} y^{-2/3}$ keine weiteren Lösungen existieren.

Wie schon gesagt wurde, definiert die Gleichung (18) auf der gesamten Ebene ein Richtungsfeld. Die Ableitung der rechten Seite nach y , nämlich $2y^{-1/3}$, existiert jedoch nicht für $y = 0$ (sie wird dort unendlich groß). Der Satz A gilt hier in zwei getrennten Bereichen: in der oberen ($y > 0$) und in der unteren Halbebene ($y < 0$). Diese Gebiete werden von den Parabeln (19) überdeckt. Durch jeden Punkt (x_0, y_0) verläuft nur eine Parabel. Dabei ergibt sich die Konstante C aus der Gleichung

$$y_0 = (x_0 + C)^3 \quad \text{oder} \quad C = y_0^{1/3} - x_0.$$

Durch den Punkt $A(x_0, 0)$ verläuft außer der Parabel noch die Lösung $y = 0$. Für die Anfangsbedingung $(x_0, 0)$ geht hier die Eindeutigkeit der Lösung verloren. Wenn wir ein beliebig kleines Intervall $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ herausgreifen (Abb. 2), ergeben sich in diesem Intervall vier Lösungen der Gleichung (18):

- a) der Parabelabschnitt BAC ;
- b) der Abschnitt DAE der x -Achse;
- c) die Linie DAC , die aus dem Abschnitt DA der x -Achse und dem Parabelabschnitt AC besteht;
- d) die Linie BAE , die sich aus dem Parabelabschnitt BA und dem Abschnitt AE der x -Achse zusammensetzt.

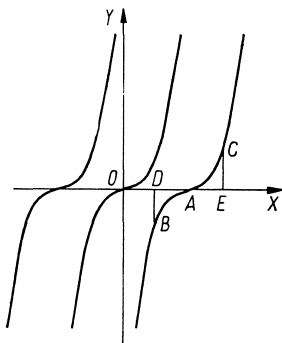


Abb. 2

Alle diese Kurven genügen einer Gleichung der Form $y = \varphi(x)$, wobei $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetig sind (längs dieser Linien ändert sich der Winkel, den die Tangente mit der x -Achse bildet, stetig). Diese vier Integralkurven und nur sie existieren im Intervall $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ für ein beliebig klein gewähltes festes $\delta > 0$. Kurz gesagt, verlaufen durch den Punkt $(x_0, 0)$ „im kleinen“ vier Integralkurven.

Wenn wir einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) der oberen Halbebene ($y_0 > 0$) betrachten, verläuft durch diesen Punkt eine einzige Parabel (19); diese schneidet sich nicht mit den übrigen Parabeln, so daß sie in ihrem gesamten Verlauf in der oberen Halbebene keine gemeinsamen Punkte mit anderen Integralkurven der Gleichung (18) hat (Eindeutigkeit in der oberen Halbebene).

Wenn wir uns jedoch auf einer solchen Parabel nach unten bewegen, bis wir die x -Achse erreichen, so haben wir dort unendlich viele Möglichkeiten, diese Integralkurve fortzusetzen: Wir können uns auf der gleichen Parabel weiter nach unten bewegen, oder wir können auf der x -Achse nach rechts gehen und uns dann auf einer anderen Parabel nach oben bewegen (oder wir können nur auf der x -Achse bleiben). Durch jeden Punkt der Ebene verlaufen also nicht, „im kleinen“, sondern „im großen“ unendlich viele Integralkurven.

5. Homogene Differentialgleichungen. Eine Funktion $\varphi(x, y)$ heißt *homogene Funktion nullten Grades* oder einfach *homogene Funktion*, wenn sie nur vom Verhältnis $\frac{y}{x}$ abhängt, d. h., wenn $\varphi(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ gilt. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$ ist [I, 154].