



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe

Ernst Bartels, Klaus Brink, Gerhard Fastert, Eckhard Ignatowitz

7. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 71713

Autoren:

Dr. Ernst Bartels, StD
Dr. Klaus Brink, StR †
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR †
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR a. D.

Winsen/Aller
Leverkusen
Stade
Waldbonn

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:

Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

7. Auflage 2018

Druck 5 4 3 2

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-2560-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2018 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: MediaCreativ, G. Kuhl, 40724 Hilden

Umschlagfoto: © kwanchait – stock.adobe.com

Satz: rkt, 51379 Leverkusen, www.rktypo.com

Druck: mediaprint solutions GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Das Buch **TECHNISCHE MATHEMATIK UND DATENAUSWERTUNG FÜR LABORBERUFE** ist ein Lehr- und Übungsbuch für die schulische und betriebliche Ausbildung im Bereich fachbezogener Berechnungen sowie der Labordaten- und Prozessdatenauswertung.

Dieses Lehrbuch ist geeignet für Auszubildende zum Chemielaboranten, Lacklaboranten und Biologielaboranten. Auch in den Berufsfachschulen Chemisch-technischer Assistent/in, Biologisch-technischer Assistent/in, Pharmazeutisch-technischer Assistent/in und Umwelt-technischer Assistent/in, an Fachschulen für Biotechniker, Chemotechniker und Umweltschutztechniker sowie in der Fachoberschule Technik (Fachrichtung Chemie), der Berufsoberschule und in naturwissenschaftlich ausgerichteten Gymnasien ist es einsetzbar.

Die Auswahl der Inhalte orientiert sich an den Rahmenlehrplänen für die Ausbildungsberufe Chemielaborant/Chemielaborantin, Biologielaborant/Biologielaborantin und Lacklaborant/Lacklaborantin (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18. März 2005) und der Verordnung über die Berufsausbildung im Laborbereich Chemie, Biologie und Lack vom 25. Juni 2009.

Dieses Buch vermittelt neben den mathematischen Grundkenntnissen die Vielfalt der berufsbezogenen mathematischen Kenntnisse aus den Bereichen Chemie, Physik, Statistik, Reaktionskinetik, Analytik, Qualitätssicherung, Beschichtungsstoffe und Informatik. Es ist ein kompetenter Begleiter während der Ausbildung und ein guter Vorbereiter auf die Prüfung.

Durch seinen modularen Aufbau ist das Buch uneingeschränkt für den Lernfeld-orientierten Unterricht geeignet. Den Beispielen und Übungsaufgaben liegen konsequent Problemstellungen aus dem Berufsalltag der Laborberufe zugrunde. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die zahlreichen Vorgänge und Geräte durch Abbildungen zu veranschaulichen. Wichtige Gesetzmäßigkeiten und Formeln sind optisch hervorgehoben. Ebenso unterstützen graue und rote Unterlegungen des Textes bei den Beispielen und den Übungsaufgaben die rasche Orientierung im Buch. Am Ende eines Kapitels folgen zahlreiche praxisorientierte Übungsaufgaben, die zur Festigung des Erlernten, zur Leistungs kontrolle oder zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können.

Die Lösungen der Beispielaufgaben sind überwiegend mit Größengleichungen gerechnet. Wo es sinnvoll ist, wird alternativ auch die Schlussrechnung angewendet. Dabei wird das Runden der Ergebnisse auf die Anzahl signifikanter Ziffern oder Stellen konsequent berücksichtigt.

In zahlreichen Kapiteln werden die Möglichkeiten zur Nutzung eines Tabellenkalkulationsprogramms bei der rechnerischen oder grafischen Auswertung von Daten und Datenreihen vorgestellt.

Die im Rahmenlehrplan der Laborberufe geforderte Kompetenz zur Nutzung fremdsprachlicher Informationsquellen wird durch die Angabe von Schlüsselbegriffen in englischer Sprache (jeweils in Klammern hinter der deutschen Bezeichnung) im Text unterstützt.

Bei den Bestimmungsmethoden physikalischer oder chemischer Größen sind im Text oder in den tabellarischen Übersichten die entsprechenden DIN-Normen angegeben. Die Bezeichnung von Stoffen folgt den Vorgaben der IUPAC, aber auch die in der Anlagen- und Laborpraxis üblichen technischen Namen werden aufgeführt, soweit sie von der IUPAC als weiterhin erlaubt gekennzeichnet sind.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind vertiefende Lerninhalte zu den Beschichtungsstoffen und zur Biometrie in eigenständigen Kapiteln am Ende des Buches angeordnet.

Zum Lehrbuch Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe gibt es ein **Lösungsbuch** mit vollständig durchgerechneten, teilweise auch alternativen Lösungswegen sowie methodischen Hinweisen (Europa-Nr. 71764).

In der **7. Auflage** wurden Fehler korrigiert, der Text überarbeitet und der Anhang aktualisiert.

Verlag und Autoren danken im Voraus den Benutzern des Buches für weitere kritisch-konstruktive Verbesserungsvorschläge und Fehlerhinweise (lektorat@europa-lehrmittel.de).

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen	8		
1.1	Zahlenarten	8	2.4.3 Arbeiten mit Diagrammen in der Chemie	50
1.2	Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln	9	2.4.4 Interpretation von Graphen	52
1.3	Grundrechnungssarten	10	2.4.5 Linearisieren einer Kurve	54
1.4	Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke	13	2.4.6 Verwendung grafischer Papiere	55
1.5	Bruchrechnen	14	2.5 Versuchs- und Prozessdaten- auswertung mit Computern	57
1.6	Rechnen mit Potenzen	16	2.5.1 Datenauswertung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm	57
1.7	Rechnen mit Wurzeln	18	2.5.2 Grafische Aufbereitung von Versuchs- und Prozessdaten, Diagrammarten	60
1.8	Rechnen mit Logarithmen	20	2.5.3 Computergestützte Auswertung von Messwertreihen durch Regression	64
1.8.1	Definition des Logarithmus	20	Gemischte Aufgaben zu 2	68
1.8.2	Berechnen dekadischer Logarithmen	21		
1.8.3	Berechnen natürlicher Logarithmen	21		
1.8.4	Logarithmengesetze	22		
1.8.5	Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung	22		
1.9	Lösen von Gleichungen	23		
1.9.1	Lineare Bestimmungsgleichungen	23	3 Ausgewählte physikalische Berechnungen	72
1.9.2	Quadratische Bestimmungsgleichungen	24	3.1 Größen, Zeichen, Einheiten, Umrechnungen	72
1.9.3	Wurzelgleichungen	25	3.2 Berechnung von Längen, Flächen, Oberflächen und Volumina	76
1.9.4	Exponentialgleichungen	25	3.2.1 Längenberechnung	76
1.9.5	Umstellen von Größengleichungen	26	3.2.2 Umfangs- und Flächenberechnung	77
1.10	Winkel und Winkelfunktionen	27	3.2.3 Oberflächen- und Volumenberechnung	78
1.11	Berechnungen mit dem Dreisatz	28	3.3 Masse, Volumen und Dichte	79
1.12	Berechnungen mit Proportionen	29	3.4 Bewegungsvorgänge	84
1.13	Rechnen mit Anteilen	30	3.5 Strömungsvorgänge	87
	Gemischte Aufgaben zu 1	31	3.6 Kräfte	89
2	Auswertung von Messwerten und Prozessdaten	34	3.7 Arbeit	92
2.1	Messtechnik in der Chemie	34	3.8 Leistung	94
2.1.1	Grundbegriffe der Messtechnik	34	3.9 Energie	95
2.1.2	Unsicherheit von Messwerten	35	3.10 Wirkungsgrad	96
2.1.3	Messgenauigkeit im Labor und Chemiebetrieb	36	3.11 Druck und Druckarten	98
2.2	Rechnen mit Messwerten	40	3.12 Druck in Flüssigkeiten	99
2.2.1	Signifikante Ziffern	40	3.13 Auftriebskraft	101
2.2.2	Runden	40	3.14 Gaskinetik	103
2.2.3	Rechnen mit Messwerten ohne angegebene Unsicherheit	41	3.15 Druck in Gasen	104
2.2.4	Rechnen mit Messwerten mit angegebener Unsicherheit	42	3.16 Sättigungsdampfdruck, Partialdruck	106
2.3	Auswertung von Messwertreihen	43	3.17 Luftfeuchtigkeit	107
2.3.1	Arithmetischer Mittelwert	43	Gemischte Aufgaben zu 3	109
2.3.2	Absoluter und relativer Fehler	43		
2.3.3	Standardabweichung, Normalverteilung	44		
2.3.4	Auswertung mit dem Taschenrechner und Computer	45		
2.4	Darstellung von Messergebnissen	47		
2.4.1	Messwerte in Wertetabellen	47		
2.4.2	Grafische Darstellung von Messwerten	48		
4	Stöchiometrische Berechnungen	112		
4.1	Grundgesetze der Chemie	112		
4.2	Chemische Elemente	112		
4.3	Kernreaktionen	114		
4.4	Symbole und Ziffern in Formeln	116		
4.5	Quantitäten von Stoffportionen	117		
4.6	Zusammensetzung von Verbindungen und Elementen	120		
4.7	Empirische Formel und Molekülformel	122		
4.7.1	Elementaranalyse	123		
4.7.2	Berechnung der empirischen Formel	124		
4.7.3	Berechnung der Molekülformel	124		

4.8	Gase und Gasgesetze	126	6.2.3	Einfluss der Temperatur	195
4.8.1	Gase bei Normbedingungen	127	6.2.4	Einfluss von Katalysatoren	198
4.8.2	Gase bei beliebigen Drücken und Temperaturen	128	6.3	Chemisches Gleichgewicht	199
4.9	Rechnen mit Reaktionsgleichungen	130	6.4	Massenwirkungsgesetz MWG	200
4.9.1	Reaktionsgleichungen	130	6.5	MWG für Gasgleichgewichte	202
4.9.2	Aufstellen von Reaktionsgleichungen	132	6.6	Verschiebung der Gleichgewichtslage	204
4.9.3	Oxidationszahlen	135			
4.9.4	Aufstellen von Redox-Gleichungen	137			
	Gemischte Aufgaben zu 4.9	141			
4.10	Umsatzberechnung	142	7	Ionengleichgewichte	208
4.10.1	Bei reinen Stoffen	142	7.1	Protolysegleichgewichte	208
4.10.2	Bei verunreinigten oder gelösten Stoffen	144	7.1.1	Protolysegleichgewicht des Wassers	208
4.10.3	Bei Gasreaktionen	148	7.1.2	Der pH-Wert	209
4.10.4	Unter Berücksichtigung der Ausbeute	150	7.1.3	pH-Wert starker Säuren und Basen	211
	Gemischte Aufgaben zu 4.10	153	7.1.4	Dissoziationsgrad α , Protolysegrad	212
			7.1.5	Säure- und Basenkonstante	213
			7.1.6	pH-Wert schwacher Säuren und Basen	215
			7.1.7	pH-Wert mehrprotoniger Säuren	216
			7.1.8	Das OSTWALD'sche Verdünnungsgesetz	217
			7.1.9	pH-Wert von Pufferlösungen	218
			7.1.10	Lage von Protolysegleichgewichten	220
5	Rechnen mit Mischphasen	156	7.2	Löslichkeitsgleichgewichte	221
5.1	Gehaltsgrößen von Mischphasen	156		Gemischte Aufgaben zu 7	223
5.1.1	Massenanteil w	158			
5.1.2	Volumenanteil φ	160	8	Analytische Bestimmungen	225
5.1.3	Stoffmengenanteil χ	161	8.1	Gravimetrie	226
5.1.4	Umrechnung der verschiedenen Anteile	163	8.1.1	Feuchtigkeits- und Trockengehaltsbestimmungen von Feststoffen	226
5.1.5	Massenkonzentration β	165	8.1.2	Bestimmung des Wassergehalts in Ölen	227
5.1.6	Volumenkonzentration σ	166	8.1.3	Glührückstandsbestimmungen	228
5.1.7	Stoffmengenkonzentration c , Äquivalentkonzentration $c(1/z^*)$	167	8.1.4	Thermogravimetrie	229
5.1.8	Umrechnen der verschiedenen Konzentrationen	169	8.1.5	Gravimetrische Fällungsanalysen	231
5.1.9	Löslichkeit L^*	171	8.2	Volumetrie (Maßanalyse)	234
5.2	Umrechnen von Anteilen \Leftrightarrow Konzentrationen \Leftrightarrow Löslichkeiten	173	8.2.1	Maßanalyse mit aliquoten Teilen	234
5.2.1	Umrechnung Massenanteil $w \Leftrightarrow$ Stoffmengenkonzentration c	173	8.2.2	Maßlösungen	235
5.2.2	Umrechnung Massenanteil $w \Leftrightarrow$ Massenkonzentration β	174	8.2.2.1	Gehaltsangaben von Maßlösungen	235
5.2.3	Umrechnung Massenanteil $w \Leftrightarrow$ Volumenkonzentration σ	174	8.2.2.2	Herstellen von Maßlösungen	237
5.2.4	Umrechnung Massenanteil $w \Leftrightarrow$ Löslichkeit L^*	175	8.2.2.3	Titer von Maßlösungen	238
5.3	Mischen, Verdünnen und Konzentrieren von Lösungen	177	8.2.2.4	Einstellen einer Maßlösung	239
5.3.1	Mischen von Lösungen	177	8.2.3	Berechnung von Maßanalysen-Neutralisationstitrationen	240
5.3.2	Verdünnen von Lösungen	179	8.2.3.1	Berechnung von Direkttitrationen	240
5.3.3	Mischen von Lösungs-Volumina	180	8.2.3.2	Bestimmung des Titers	243
5.3.4	Konzentrieren von Lösungen	181	8.2.3.3	Rücktitrationen	245
	Gemischte Aufgaben zu 5	183	8.2.3.4	Mehrstufige Neutralisations-titrationen	247
6	Der Verlauf chemischer Reaktionen	185	8.2.3.5	Indirekte Titration	248
6.1	Die Reaktionsgeschwindigkeit	185	8.2.3.6	Oleum-Bestimmungen	249
6.2	Beeinflussung der Reaktionsgeschwindigkeit	188	8.2.4	Redox-Titrationen (Oxidimetrie)	250
6.2.1	Einfluss der Konzentration	188	8.2.4.1	Manganometrische Titrionen	251
6.2.2	Grafische Ermittlung der Reaktionsordnung	192	8.2.4.2	Iodometrische Titrionen	252
			8.2.4.3	Chromatometrie, Bromatometrie, Cerimetrie	255
			8.2.4.4	Bestimmung des CSB-Wertes	256

8.2.5	Fällungtitrationen	257	9.3	Lineare Korrelation und Regression	320
8.2.6	Komplexometrische Titrationen	259	9.3.1	Korrelation	320
	Gemischte Aufgaben zu 8.2	261	9.3.2	Regression	321
8.3	Maßanalytische Kennzahlen	263	9.4	Statistische Prüfverfahren	322
8.3.1	Säurezahl SZ	263	9.4.1	t-Test	323
8.3.2	Verseifungszahl VZ	264	9.4.2	F-Test	324
8.3.3	Esterzahl EZ	265	9.4.3	chi ² -Test	325
8.3.4	Hydroxylzahl OHZ	266		Aufgaben zu 9	326
8.3.5	Iodzahl IZ	267			
	Gemischte Aufgaben zu 8.3	269			
8.4	Maßanalytische Bestimmungen mit elektrochemischen Methoden	270	10	Qualitätssicherung in der Analytischen Chemie	329
8.4.1	Potentiometrie	270	10.1	Validierung analytischer Verfahren	329
8.4.2	Leitfähigkeitstitrationen	273	10.1.1	Richtigkeit und Präzision von Messwerte	329
8.5	Optische Analyseverfahren	275	10.1.2	Richtigkeit von Messwerten	330
8.5.1	UV/VIS-Spektroskopie	275	10.1.3	Präzision von Messwerten	335
8.5.1.1	Physikalische Größen der Spektroskopie	275	10.1.4	Ausreißertests	341
8.5.1.2	Auswertung fotometrischer Bestimmungen	277	10.2	Qualitätsregelkarten in der Analytischen Chemie	343
	Aufgaben zu 8.5.1		10.2.1	Aufbau von Qualitätsregelkarten (QRK)	343
	UV/VIS-Spektroskopie	282	10.2.2	Regelgrenzen in Lage-Regelkarten	344
8.5.2	Refraktometrie	284	10.2.3	Bewertung von Lage-Regelkarten	345
	Aufgaben zu 8.5.2	286	10.2.4	Regelgrenzen in Streuungs-Regelkarten	347
8.5.3	Polarimetrie	287	10.2.5	Bewertung von Streuungs-Regelkarten	348
	Aufgaben zu 8.5.3	288	10.2.6	Erstellen und Führen von Regelkarten	349
8.6	Chromatografie	289			
8.6.1	Dünnschicht- und Papierchromatografie	289	11	Berechnungen zur Elektrotechnik	353
8.6.2	Trennung mit Trennsäulen	290	11.1	Grundbegriffe der Elektrotechnik	353
8.6.3	Wichtige Kenngrößen der Chromatografie	292	11.2	Elektrischer Widerstand eines Leiters	355
8.6.4	Trennwirkung einer Säule	293	11.3	Temperaturabhängigkeit des Widerstands	356
8.6.5	Detektorempfindlichkeit-Responsefaktor	295	11.4	OHM sches Gesetz	357
8.6.6	Auswertung Säulenchromatografischer Analysen - Kalibriermethoden	296	11.5	Reihenschaltung von Widerständen	358
8.6.6.1	Normierung auf 100% – 100%-Methode	296	11.6	Parallelschaltung von Widerständen	360
8.6.6.2	Externer Standard	297	11.7	Messbereichserweiterungen	362
8.6.6.3	Interner Standard	299	11.8	Gruppenschaltungen, Netzwerke	364
8.6.6.4	Standard-Additionsverfahren (Aufstockmethode)	300	11.9	WHEATSTONE sche Brückenschaltung	366
	Aufgaben zu 8.6	302	11.10	Elektrische Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad	367
8.7	Partikelgrößenanalyse, Siebanalyse	307		Gemischte Aufgaben zu 11	369
8.7.1	Auswertung einer Siebanalyse	307			
8.7.2	Auswertung im RRSB-Netz	309			
8.7.3	Auswertung einer Siebanalyse mit Tabellenkalkulationsprogramm	312			
9	Statistik in Biologie und Analytischer Chemie	315	12	Elektrochemische Berechnungen	371
9.1	Datengewinnung	315	12.1	Elektrolytische Stoffabscheidung	371
9.2	Kennwerte von Datenreihen	315	12.2	Leitfähigkeit von Elektrolyten	374
9.2.1	Mittelwerte	316	12.3	Elektrochemische Potentiale	378
9.2.2	Streuung von Stichprobenwerten	318			
13	Berechnungen zur Wärmelehre	385			
13.1	Temperaturskalen	385			
13.2	Verhalten der Stoffe bei Erwärmung	386			
13.2.1	Längenänderung von Feststoffen	386			
13.2.2	Volumenänderung von Feststoffen	387			

13.2.3	Volumenänderung von Flüssigkeiten	388		
13.2.4	Volumenänderung von Gasen	389		
13.3	Wärmeinhalt von Stoffportionen	390		
13.4	Aggregatzustandsänderungen	391		
13.4.1	Schmelzen, Erstarren	391		
13.4.2	Verdampfen, Kondensieren	392		
13.5	Temperaturänderung beim Mischen	393		
13.6	Reaktionswärmen	398		
13.6.1	Reaktionsenergie, Reaktionsenthalpie	398		
13.6.2	Heiz- und Brennwert	400		
13.6.3	Neutralisationsenthalpie	401		
13.6.4	Lösungsenthalpie	402		
13.6.5	Freie Reaktionsenthalpie, Entropie	403		
	Gemischte Aufgaben zu 13	405		
14	Physikalisch-chemische Bestimmungen	407		
14.1	Dichtebestimmungen	407		
14.1.1	Pyknometer-Verfahren	408		
14.1.2	Hydrostatische Waage	411		
14.1.3	WESTPHAL sche Waage	412		
14.1.4	Tauchkörper-Verfahren	413		
14.1.5	Aräometer-Verfahren	414		
14.1.6	Schwebemethode	414		
14.1.7	Röntgendifichte	415		
14.1.8	Schütt- und Rütteldichte	416		
14.1.9	Schwingungsmethode	417		
14.2	Bestimmung der Viskosität	419		
14.2.1	Dynamische u. kinematische Viskosität	419		
14.2.2	Kugelfall-Viskosimeter nach HÖPPLER	420		
14.2.3	Auslauf-Viskosimeter	421		
14.2.4	Rotations-Viskosimeter	422		
14.3	Bestimmung der Oberflächenspannung	423		
14.3.1	Abreißmethode	424		
14.3.2	Tropfenmethode	424		
14.3.3	Kapillarmethode	425		
14.4	Bestimmung der molaren Masse	426		
14.4.1	Molare Masse aus den Gasgesetzen	426		
14.4.2	Dampfdruckerniedrigung	428		
14.4.3	Siedepunkterhöhung	429		
14.4.4	Gefrierpunkterniedrigung	431		
14.4.5	Osmotischer Druck	434		
15	Trennen von Flüssigkeitsgemischen	436		
15.1	Destillieren	436		
15.1.1	Dampfdruck von Flüssigkeiten	436		
15.1.2	Homogene Flüssigkeitsgemische	436		
15.1.3	Siedediagramm	439		
15.1.4	Gleichgewichtsdiagramm	439		
15.1.5	Durchführen einer Destillation	440		
15.1.6	Zeitlicher Verlauf einer Destillation	441		
15.2	Wasserdampfdestillation	443		
	Aufgaben zu 15.2	444		
15.3	Rektifikation	445		
	Aufgaben zu 15.3	448		
15.4	Flüssig-Flüssig-Extraktion	449		
	Aufgaben zu 15.4	451		
16	Berechnungen mit Beschichtungsstoffen	452		
16.1	Gehaltsgrößen von Beschichtungsstoffen	452		
16.1.1	Massenanteile	453		
16.1.2	Volumenanteile	455		
16.1.3	Pigment-Bindemittel-Massenverhältnis	456		
16.1.4	Umrechnung von Rezepturen	457		
16.2	Bestimmung der Kenngrößen von Beschichtungen	459		
16.3	Schichtdicke von Beschichtungen	461		
16.4	Verbrauch und Ergiebigkeit	464		
16.5	Maßanalytische Kennzahlen	468		
16.5.1	Aminzahl, H-aktiv-Äquivalentmasse	468		
16.5.2	Isocyanatmassenanteil, Isocyanat- Äquivalentmasse	470		
16.5.3	Hydroxylzahl, OH-Äquivalentmasse	470		
16.5.4	Epoxid-Äquivalentmasse, Epoxidwert	472		
16.6	Mischen von 2-K-Lacken	473		
16.6.1	2-K-Lacke mit Hydroxylgruppen und Isocyanatgruppen	473		
16.6.2	2-K-Lacke mit Epoxid-Gruppen und aktivem Wasserstoff	474		
17	Anhang	476		
	Griechisches Alphabet	476		
	Physikalische Konstanten	476		
	Tabelle: Korrelationskoeffizient	476		
	Tabelle: <i>t</i> -Verteilung (Student-Vert.)	477		
	Tabelle: <i>F</i> -Verteilung	478		
	Tabelle: χ^2 -Test	481		
	Tabelle: Schnelltest nach David auf Normalverteilung	482		
	Tabelle: Ausreißertest nach Grubbs	483		
	Tabelle: Ausreißertest nach Dixon	484		
	Umrechnungsformeln für Gehaltsgrößen	485		
	Kopiervorlagen: Einfach-Logarithmenpapier, Doppelt-Logarithmenpapier, RRSB-Netz für die Siebanalyse	486		
	Literaturverzeichnis	489		
	Sachwortverzeichnis	491		

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

Basis des Rechnens in der Chemie sind die grundlegenden mathematischen Rechnungsarten sowie deren praktische Anwendung mit dem Taschenrechner oder dem Computer.

1.1 Zahlenarten

Beim Rechnen unterscheidet man die **bestimmten Zahlen** sowie die **allgemeinen Zahlen**. Während die bestimmten Zahlen einen festen Wert haben, wie z.B. 3, 9,5, $\frac{1}{2}$ usw. stehen die allgemeinen Zahlen als Platzhalter für beliebige Zahlen, wie z.B. x , y , z .

Bestimmte Zahlen

Die bestimmten Zahlen kann man weiter in verschiedene Zahlenarten untergliedern.

Zahlenarten der bestimmten rationalen Zahlen	Beispiele
Natürlichen Zahlen: Sie sind die zum Zählen benutzten Zahlen. Es sind positive ganze Zahlen sowie die Null (0). Sie werden normalerweise ohne Pluszeichen (+) geschrieben.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, 12, ... 37, ..., 59, 60, 61, ..., 107, ...
Die negativen ganzen Zahlen erhält man durch Subtrahieren einer größeren natürlichen Zahl von einer kleineren natürlichen Zahl. Beispiel: $5 - 7 = -2$; $15 - 29 = -14$	-1, -2, -3, ..., -18, -19, ...
Die ganzen Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen) und die negativen ganzen Zahlen.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 71, 72, 73, ... -1, -2, -3, -4, ..., -21, -22, ...
Gebrochene Zahlen , auch Bruchzahlen genannt, sind Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Quotient ist der Name für einen Bruch, d.h. eine nicht ausgeführte Divisionsaufgabe ganzer Zahlen. Bruchzahlen können positiv und negativ sein.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\frac{1}{6}, \frac{7}{9}, \dots$ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 2\frac{1}{3}, -\frac{7}{9}, \dots$
Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma. Es können positive und negative Dezimalzahlen sein.	1,748, 0,250, -8,32, -2,0, -0,5, -7,8316, 4,57, 7,8, -3,942, ...

Die bislang genannten Zahlen bezeichnet man als **rationale Zahlen**.

Außerdem gibt es die Gruppe der **irrationalen Zahlen**. Es sind bestimmte Zahlen.

Zahlenarten der bestimmten irrationalen Zahlen	Beispiele
Wurzelzahlen	$\sqrt{2} = 1,4142136\dots; \sqrt{3} = 1,7320508\dots$
Transzendente Zahlen	$\pi = 3,1415927\dots, e = 2,7182818\dots$
Die irrationalen Zahlen sind nicht-periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen.	

Zahlenstrahl

Die bestimmten Zahlen lassen sich außer durch Ziffern (siehe oben, Beispiele) auch zeichnerisch auf einem Zahlenstrahl als Strecke darstellen (**Bild 1**). Vom Nullpunkt aus nach rechts liegen die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen.

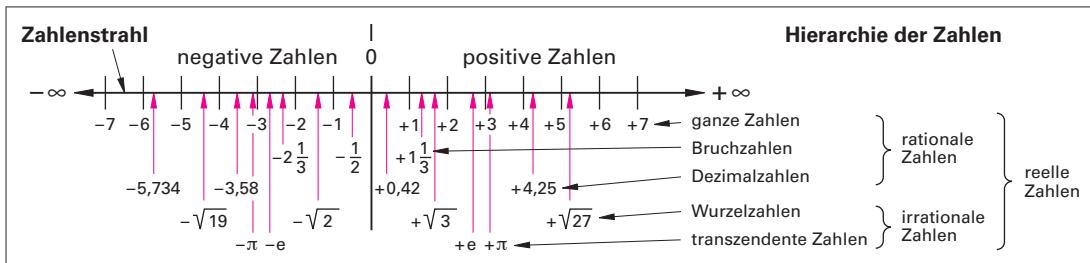


Bild 1: Zahlenarten und ihre Lage auf dem Zahlenstrahl, Hierarchie der Zahlen

Allgemeine Zahlen

Die allgemeinen Zahlen, auch **Variable** genannt, stehen als Platzhalter für eine beliebige Zahl.

Darstellung der allgemeinen Zahlen	Beispiele
In der allgemeinen Mathematik werden für die allgemeinen Zahlen die kleinen Buchstaben des Alphabets verwendet.	$a, b, c, \dots, u, v, w, \dots, x, y, z$
In der technischen Mathematik benutzt man kleine oder große Buchstaben zur Benennung einer Variablen, die meist dem Anfangsbuchstaben der Variablen entsprechen. Man verwendet Buchstaben des lateinischen und des griechischen Alphabets.	$l, b, t, v, \dots, A, V, U, T, \dots$ l Länge, b Breite, t Zeit, h Höhe A Fläche, V Volumen, U Umfang T thermodynamische Temperatur, ϑ Celsius-Temperatur, α Winkel

Aufgaben

1. Zu welcher Zahlenart gehören folgende Zahlen: 2. Wo liegen auf dem Zahlenstrahl die Zahlen:
 $0,7; -18; \sqrt{3}; \frac{1}{7}; 0; -387; -\pi; -0,32 ? -3\frac{1}{3}; 0,85; e; -0,25; \sqrt[3]{9}; \frac{2}{4}; -3,50 ?$

1.2 Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln

In chemischen Berechnungen wird meist mit Größen und Einheiten gerechnet, die mit mathematischen Zeichen in Formeln verknüpft sind.

Größen, Einheiten

Mit einer Größe (engl. physical quantity) werden chemische oder physikalische Eigenschaften beschrieben. Zu ihrer Kurzschreibweise benutzt man ein Größenzeichen, z.B. l für die Länge.

Der Wert einer Größe besteht aus einem Zahlenwert und einer Einheit, z.B. 5,8 kg. Die Einheit wird mit einem Einheitenzeichen angegeben, z. B. kg.

Es gibt 7 **Basisgrößen**, auf die sich alle Größen zurückführen lassen (**Tabelle 1**).

Tabelle 1: Basisgrößen und ihre Einheiten

Physikalische Größen	Größen-zeichen	Einheiten-namen	Einheiten-zeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Zeit	t	Sekunde	s
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Mathematische Zeichen

Die mathematischen Zeichen (engl. mathematical symbols) dienen zur Kurzbezeichnung einer mathematischen Operation (**Tabelle 2**).

Beispiel: Sollen zwei Zahlen multipliziert werden, so setzt man zwischen die Zahlen das Kurzzeichen für „multiplizieren“ z.B. $3 \cdot 5$.

Für Flächenformate und räumliche Abmessungen ist auch das Multiplikationszeichen \times zugelassen.

Beispiel: $3 \text{ m} \times 5 \text{ m}$.

Tabelle 2: Mathematische Zeichen (Auswahl)

Zeichen	Bedeutung	Zeichen	Bedeutung
$+$, $-$	plus, minus	$<$, $>$	kleiner, größer
$:$, $/$	geteilt durch, pro	\leq \geq	kleiner gleich größer gleich
\cdot , \times	mal	Δ	Differenz
$=$, \neq	gleich, ungleich	\dots	und so weiter
\approx	beträgt rund	∞	unendlich
\equiv	identisch gleich	\pm	plus/minus
\sim	proportional	$ a $	Betrag von a
\cong	entspricht	$\sqrt{}$	Wurzel

Formeln, Größengleichungen

Die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen Größen werden durch Größengleichungen (equations) oder Formeln (formula) ausgedrückt.

Mit Hilfe von Größengleichungen lassen sich durch Umstellen und Auflösen die Größen berechnen (Seite 28).

Beispiel für Größengleichungen:

$$\text{Fläche } A = l \cdot b \quad \text{Gewichtskraft } F_G = m \cdot g$$

$$\text{Volumen } V = l \cdot b \cdot h \quad \text{Geschwindigkeit } v = \frac{s}{t}$$

1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

Diese beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer mathematischen Zeichen (+, -) auch als **Strichrechnungen** bezeichnet.

Beim **Addieren** (Zusammenzählen, engl. to add) werden die einzelnen Summanden zusammengezählt. Das Ergebnis heißt Summenwert oder Summe.

Beim **Subtrahieren** (Abziehen, engl. to subtract) zieht man von einer Zahl eine andere Zahl ab. Das Ergebnis ist der Differenzwert, einfach auch Differenz genannt.

$\begin{array}{c} \text{Summe} \\ \boxed{a + b} = c \\ \backslash \quad / \\ \text{Summanden} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{Differenz} \\ \boxed{d - e} = f \\ \quad \\ \text{Minuend} \quad \text{Subtrahend} \end{array}$
--	---

Rechenregeln zum Addieren und Subtrahieren

Rechenregeln	Beispiele
Nur gleichartige allgemeine Zahlen bzw. Größen können addiert bzw. subtrahiert werden.	$8 \text{ m}^2 + 72 \text{ cm}^2 + 7,5 \text{ m}^2 - 23 \text{ cm}^2 = 15,5 \text{ m}^2 + 49 \text{ cm}^2$
Die einzelnen Glieder in einer Strichrechnung können vertauscht werden (Kommutativgesetz). Erläuterung: Durch Vertauschen der Glieder kann die Aufgabe in eine für die Rechnung vorteilhafte Reihenfolge geordnet werden.	$5 - 16 + 7 = - 16 + 7 + 5 = - 4$ $11x - 3x + 9x = 11x + 9x - 3x = 17x$
Einzelne Glieder können zu Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammengefasst werden (Assoziativgesetz).	$2 + 5 - 3 = 7 - 3 = 4$ $8u - 3v + 3u + 8v = 8u + 3u - 3v + 8v = 11u + 5v$

Klammern beim Addieren und Subtrahieren

Klammern, () oder [], fassen Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammen. Das Vorzeichen der Glieder in der Klammer kann sich durch das Setzen oder Weglassen von Klammern ändern.

Steht ein +-Zeichen vor einer Klammer, so kann man sie weglassen, ohne dass sich die Vorzeichen der Glieder in der Klammer ändern.	$25 + (5 - 3) = 25 + 5 - 3 = 27$ $7a + (3a - 9a) = 7a + 3a - 9a = 1a = a$
Steht ein --Zeichen vor einer Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer das Vorzeichen aller Glieder in der Klammer umkehren. Setzt man eine Klammer, vor der ein --Zeichen steht, so muss man ebenfalls das Vorzeichen aller Glieder, die in der Klammer stehen, umkehren.	$16 - (3 - 2 + 8 - 5) = 16 - 3 + 2 - 8 + 5 = 12$ $5x - (2x + 9a - 7b) = 5x - 2x - 9a + 7b$

Aufgaben zu Addieren und Subtrahieren

- Ermitteln Sie die Ergebnisse:
 - $328 + 713 + 287 + 38 + 9 - 103$
 - $59,30a - 27,53a + 7,83b - 21,04b$
 - $22,2u + 38,9v - 17,8u + 3,6v + 9,8w$
- Setzen Sie um das 2. bis 4. Glied eine Klammer:
 $8,3x - 7,8a + 2,5x - 9,2a$
- Lösen Sie die Klammer auf:
 $25a - (36b - 19a - 11b - 12a)$

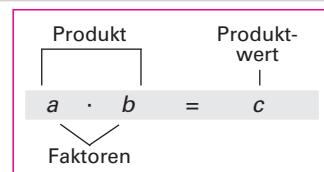
1.3.2 Multiplizieren

Beim **Multiplizieren** (Malnehmen, engl. to multiply) werden die Faktoren miteinander malgenommen und ergeben den Produktwert.

Das mathematische Zeichen für Multiplizieren ist \cdot oder \times .

Bei allgemeinen Zahlen kann das Malzeichen weggelassen werden.

Die Ziffer 1 wird meist nicht mitgeschrieben. **Beispiel:** 1 $a = a$



Rechenregeln beim Multiplizieren	Formeln	Beispiele
Ist ein Faktor 0, so ist das ganze Produkt 0. Die Faktoren können vertauscht werden. Teilprodukte lassen sich zusammenfassen.	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$ $a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$ $a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$	$387 \cdot 229 \cdot 712 \cdot 0 = 0$ $15 \cdot 28 \cdot 77 = 77 \cdot 28 \cdot 15$ $5 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 30 \text{ m}^3$
Vorzeichen beim Multiplizieren Die Multiplikation von 2 Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergibt ein positives Produkt. Die Multiplikation von 2 Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen ergibt ein negatives Produkt.	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$ $(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$ $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$2 \cdot 3 = 6 ; (-7) \cdot (-3) = 21$ $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$ $5 \cdot (-2) = -10 ; (-6) \cdot 3 = -18$ $a \cdot (-b) = -ab ; (-4) \cdot m = -4m$
Multiplizieren von Klammerausdrücken Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert.	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3$ $= 63 - 27 = 36$ $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$
Zwei Klammerausdrücke werden multipliziert, indem jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$	$(12 - 7) \cdot (3 + 5)$ $= 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 5$ $= 36 + 60 - 21 - 35 = 40$
Bei Klammerausdrücken mit bestimmten Zahlen wird zuerst der Zahlenwert der Klammer ermittelt und dann das Produkt berechnet.		$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36$ $(12 - 7) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40$
Ausklammern (Faktorisieren) Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann er ausgeklammert werden. Die Summe wird dadurch in ein Produkt umgewandelt.	$ax + bx + cx$ $= x \cdot (a + b + c)$	$19 \cdot 7 - 19 \cdot 5 = 19 \cdot (7 - 5)$ $= 19 \cdot 2 = 38$ $3 \pi x + 3 \pi y = 3\pi(x + y)$ $L_0 + L_0 \alpha \cdot \Delta \vartheta = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta \Delta)$

Aufgaben zum Multiplizieren

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

- a) $(+3) \cdot (-15)$
- b) $(+9) \cdot (+7)$
- c) $(-7) \cdot (-12)$
- d) $(+5) \cdot 0$
- e) $(0) \cdot (-16)$
- f) $(-3a) \cdot (+8b) \cdot (+2c)$
- g) $(+9x) \cdot (-4y)$
- h) $(+13m) \cdot (+4m) \cdot (+2m)$

2. Führen Sie die Multiplikationen aus:

- a) $3(3a - 2b)$
- b) $9(7u + 8v)$
- c) $(-5) \cdot (-4x - 7y)$
- d) $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32)$
- e) $(6c - 3d) \cdot (+2a)$
- f) $-x(y - z)$
- g) $4uv(9r - 5s)$
- h) $-(4ab + 7xy) \cdot (-12)$
- i) $W = p \cdot (V_2 - V_1)$
- j) $m_M = \rho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)$

3. Multiplizieren Sie die Ausdrücke:

- a) $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k)$
- b) $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x)$
- c) $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z)$
- d) $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y)$

4. Welche Zahl liefert der Ausdruck, wenn für $x = 3$ und $y = 4$ gesetzt wird?

$$7(5 - 2x) \cdot (-4) \cdot (-3 + 6y)$$

5. Klammern Sie aus:

- a) $2ab + 2ac + 2ad$
- b) $\pi nr_1 + \pi nr_2$
- c) $-30rs + 20ls$
- d) $\pi r_1^2 + \pi h^2$

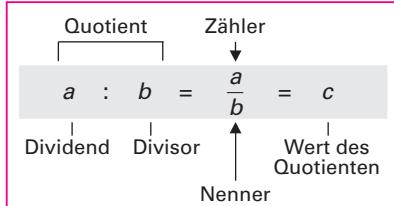
1.3.3 Dividieren

Das Dividieren (Teilen, engl. divide) ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Das Doppelpunkt-Zeichen : und der Bruchstrich sind gleichbedeutend.

Dividend und Divisor dürfen **nicht** vertauscht werden.

Ist der Divisor (Nenner) Null, so hat der Quotient keinen bestimmten Wert, er kann nicht bestimmt werden.



Rechenregeln beim Dividieren	Formeln	Beispiele
Vorzeichen beim Dividieren Gleiche Vorzeichen bei Dividend und Divisor ergeben einen positiven Quotienten. Ungleiche Vorzeichen von Dividend und Divisor ergeben einen negativen Quotienten.	$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}; \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}; \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$(+2) : (+3) = +\frac{2}{3}; \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$ $\frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}; \frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$
Dividieren von Klammerausdrücken Ein Klammerausdruck wird dividiert, indem jedes Glied in der Klammer mit dem Divisor geteilt wird. Der Bruchstrich fasst die Ausdrücke auf und unter dem Bruchstrich zusammen, als ob sie von einer Klammer umschlossen wären.	$(a-b) : x = a : x - b : x$ $\frac{a-b}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$ $\frac{a+b}{c \cdot d} = \frac{a \cdot d}{c} + \frac{b \cdot d}{c}$	$\begin{aligned} & \frac{36xyz - 24xuv}{6x} \\ &= \frac{36xyz}{6x} - \frac{24xuv}{6x} \\ &= 6yz - 4uv \end{aligned}$
Kürzen, Erweitern Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt. Es können nur Faktoren gekürzt werden oder es müssen alle Summanden gekürzt werden. Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert.	$\frac{4ab}{6ac} = \frac{4 \cdot a \cdot b \cdot c}{6 \cdot a \cdot c \cdot 3} = \frac{2b}{3c}$ $\frac{a(b+c)}{a} = b+c$ $\frac{ab+ac}{a} = b+c$ $b+c = \frac{(b+c)a}{a}$	$\begin{aligned} & \frac{-48xy}{36x} = \frac{-4 \cdot 12 \cdot x \cdot y}{3 \cdot 12 \cdot y} \\ &= -\frac{4}{3}x \\ & \frac{9x-2y}{5z} \text{ erweitern mit } (-3) \Rightarrow \\ & \frac{(9x-2y) \cdot (-3)}{5z \cdot (-3)} = \frac{-27x+6y}{-15z} \end{aligned}$

Aufgaben zum Dividieren

1. a) $63 : (-7)$ b) $(-64) : (-4)$ c) $(-91) : 13$ d) $\frac{105}{15}$ e) $\frac{-96}{8}$ f) $\frac{-132}{-11}$
2. a) $\frac{(-7) \cdot (18)}{12}$ b) $\frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)}$ c) $\frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)}$
3. a) $(156 - 72) : 14$ b) $(391 - 144) : (121 - 102)$
4. Kürzen Sie soweit als möglich:
 a) $\frac{-12uv}{3v}$ b) $\frac{6a-3b}{3}$ c) $\frac{81xyz}{-9yz}$ d) $\frac{-187rs + 153rs + 34rs}{-17s}$ e) $\frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)}$
 f) $\frac{-(x-5)}{(5-x)}$ g) $\frac{-(7x-y) \cdot (3+2b)}{-2b-3}$
5. Erweitern Sie:
 a) $\frac{7a}{5b}$ mit (-3) b) $\frac{3x}{-8y}$ mit (-1)

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

Bei der Berechnung von Ausdrücken, die sowohl Additionen und Subtraktionen (Strichrechnungen $+$ $-$) als auch Multiplikationen und Divisionen (Punktrechnungen \cdot $:$) enthalten, werden die Rechenoperationen in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt.

1. Enthält der zu berechnende Ausdruck nur Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Zuerst die Punktrechnungen müssen vor den Strichrechnungen ausgeführt werden.

Beispiele: $5 \cdot 7 + 65 : 13 = 35 + 5 = 40$; $\frac{21}{7} - \frac{48}{6} + (-3) \cdot (-9) = 3 - 8 + 27 = 22$
$$\frac{122 - 66}{8} \cdot 14 = \frac{56}{8} \cdot 14 = 7 \cdot 14 = 98; \quad 125 : (+5) - (-80) : (-4) = +25 - 20 = 5$$

2. Enthält ein Ausdruck neben Punktrechnungen und Strichrechnungen noch Klammern, so gilt:

Zuerst die Klammerausdrücke berechnen, dann die Punktrechnungen und anschließend die Strichrechnungen ausführen.

Beispiele: $3 \cdot (23 - 17) + 12 = 3 \cdot 6 + 12 = 18 + 12 = 30$
 $5a \cdot (11b - 8b) - 2b \cdot (3a + 4a) = 5a \cdot 3b - 2b \cdot 7a = 15ab - 14ab = ab$
$$\frac{7 \cdot (23,2 - 23,3)}{(2,4 + 4,6) \cdot (-0,5)} = \frac{\cancel{7} \cdot (-0,1)}{\cancel{7} \cdot (-0,5)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

3. Enthält der Ausdruck ineinander verschachtelte Klammerausdrücke, so gilt:

Zuerst die innerste Klammer, dann die nächstäußere Klammer zusammenfassen usw.

Beispiel: $4ac + [(3a + 7a) \cdot 5c + 5ac] = 4ac + [10a \cdot 5c + 5ac] = 4ac + 50ac + 5ac = 59ac$

4. Enthält ein Ausdruck Klammern sowie Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:
Es wird in der Reihenfolge – Klammerausdrücke – Punktrechnungen – Strichrechnungen – ausge-rechnet.

Aufgaben zum Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

- a) $-4 \cdot (0,2 - 3,2) + (14,5 - 8,5) \cdot (-0,1)$ b) $12x \cdot (-3y) + (0,75x - 0,50x) \cdot (+80)$
- a) $\frac{(-2,5) \cdot (86 - 82)}{(1,3 - 0,8) \cdot (42 - 38)}$ b) $\frac{222}{37} - \frac{0,125 \cdot (-85 + 117)}{(0,4) \cdot (-8) \cdot (2,5)}$ c) $24,7 \cdot \frac{(1 - 0,392)}{(1 - 0,065)}$
- a) $(23,8 - 21,3) \cdot \frac{2,14 + 0,86}{4,52 - 4 \cdot 0,38}$ b) $\frac{18,06 - 17,56}{0,25} + \frac{27}{3,2 + 5,8} - \frac{(0,2 + 2,8) \cdot (5,4 - 3,4)}{2,4 \cdot 2,5}$
- a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$ b) $4,5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a(c - b)$
c) $[-0,2a - (1,7b - 1,9a)] : \left[\frac{5,5a}{10} - 0,85b + 0,3a \right]$
- a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5(2a - xy)$ b) $0,3a \cdot \{5xy - (92x - 87y) - (84y - 82x)\}$
c) $\{-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot (0,5 + 6,5)] + 29y\} \cdot \frac{1}{x+y}$

1.5 Bruchrechnen

Ein Bruch (engl. fraction) ist eine Divisionsaufgabe, die mit einem Bruchstrich geschrieben ist.

Ein Bruch besteht aus dem Zähler und dem Nenner.

Jeden Bruch kann man in eine Dezimalzahl umrechnen, z.B. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

Mit Brüchen wird bevorzugt bei der Umwandlung von Formeln gerechnet.

Es gibt verschiedene **Brucharten**:

Benennungen bei Brüchen

Zähler → $\frac{a}{b}$ = c
 Nenner → $\frac{\boxed{a}}{\boxed{b}}$ = c
 Bruch Wert des Bruchs

Brucharten	Beispiele	Merkmale	Brucharten	Beispiele	Merkmale
Echte Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{5}{7}; \frac{2}{5}$	Zähler < Nenner	Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}$	Brüche mit gleichen Nennern
Unechte Brüche	$\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{3}{2}$	Zähler ≥ Nenner Wert des Bruchs ≥ 1	Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$	Brüche mit ungleichen Nennern
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}; 3\frac{2}{3}$	Ganze Zahl und Bruch	Scheinbrüche	$\frac{3}{1}; \frac{6}{2}; \frac{10}{5}$	Der Wert des Bruchs ist eine ganze Zahl

Die Regeln des Kürzens und Erweiterns von Brüchen wurden bereits beim Dividieren genannt (Seite 12).

- Das Kürzen dient meist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung oder des Ergebnisses.
- Durch Erweitern wird der Bruch so umgeformt, wie es für die weitere Rechnung vorteilhaft ist.

Beispiele zum Kürzen: $\frac{7}{21} = \frac{\cancel{7}1}{\cancel{21}3} = \frac{1}{3}$; $\frac{8ab}{14a} = \frac{\cancel{8}\cancel{a}b}{\cancel{14}\cancel{a}7} = \frac{4b}{7}$; $\frac{32a+4ab}{6a} = \frac{\cancel{4}\cancel{a}(8+b)\cdot 2}{\cancel{6}\cancel{a}\cdot 3} = \frac{2(8+b)}{3}$

Beispiele zum Erweitern: $\frac{2a-3b}{2}$ erweitern auf den Nenner $10a \Rightarrow \frac{(2a-3b)\cdot 5a}{2\cdot 5a} = \frac{5a(2a-3b)}{10a}$

1.5.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler zusammenfasst und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$; $\frac{3x}{5b} + \frac{7x}{5b} - \frac{4x}{5b} = \frac{3x+7x-4x}{5b} = \frac{6x}{5b}$

Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a+b-c}{x}$$

Brüche mit ungleichen Nennern (ungleichnamige Brüche) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren in Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) umgewandelt werden und können erst dann zusammengefasst werden. Den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche nennt man **Hauptnenner**. Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz das **kgV** der einzelnen Nenner.

Schema zur Ermittlung der Summe ungleichnamiger Brüche:

$$\text{Beispiel: } \frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{7}{10}$$

1. Zerlegung in Primzahlfaktoren
 Nenner Primzahlfaktoren

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 6 & = & 2 \cdot 3 \\ 10 & = & 2 \cdot 5 \\ \hline \text{kgV} & = & [2 \cdot 2 \cdot 2] \cdot [3 \cdot 5] = 120 \end{array}$$

2. Hauptnenner (kgV) bestimmen
 Das kgV ist das Produkt der größten Anzahl jeder vorkommenden Primzahl.
 (Primzahlen sind die kleinsten Faktoren, in die eine Zahl zerlegt werden kann.)

3. Erweiterungsfaktor der einzelnen Brüche bestimmen
 $120 : 8 = 15$
 $120 : 6 = 20$
 $120 : 10 = 12$

4. Gleichnamigmachen der einzelnen Brüche durch Erweitern

$$\frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} + \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 20} - \frac{7 \cdot 12}{10 \cdot 12}$$

5. Addieren bzw. Subtrahieren der jetzt gleichnamigen Brüche

$$\frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{84}{120} = \frac{61}{120}$$

Zusammenfassen mehrerer Brüche mit bestimmten und allgemeinen Zahlen

Beispiel: $\frac{3x}{2a} - \frac{2x}{9ab} + \frac{5x}{18b}$

1. Zerlegen in Primzahlen und Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \cdot a \\ 9ab &= 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ 18b &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \end{aligned}$$

$$\text{kgV} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 18ab$$

2. Erweiterungsfaktor bestimmen:

$$\begin{aligned} 18ab : 2a &= 9b \\ 18ab : 9ab &= 2 \\ 18ab : 18b &= a \end{aligned}$$

3. Erweitern und Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{3x \cdot 9b}{2a \cdot 9b} - \frac{2x \cdot 2}{9ab \cdot 2} + \frac{5x \cdot a}{18b \cdot a} &= \frac{27bx}{18ab} \\ - \frac{4x}{18ab} + \frac{5ax}{18ab} &= \frac{x(27b - 4 + 5a)}{18ab} \\ &= \frac{x(5a + 27b - 4)}{18ab} \end{aligned}$$

Aufgaben: Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$	b) $\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$	2. a) $\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b}$	b) $\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b}$
--	--	--	---

1.5.2 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Rechenregeln	Formeln	Beispiele
Multiplizieren Brüche werden multipliziert, indem die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden. Gemischte Zahlen werden untereinander multipliziert, indem sie zuerst in unechte Brüche umgewandelt und diese dann miteinander multipliziert werden.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot f = \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15};$ $\frac{3y}{x} \cdot \frac{4x}{y} = \frac{3y \cdot 4x}{x \cdot y} = 12$ $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$
Dividieren Ein Bruch wird durch einen 2. Bruch dividiert, indem der 1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruchs multipliziert wird. Ganze Zahlen können als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $a = \frac{a}{1}$	$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10};$ $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} : \frac{5}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$ $7 : \frac{7}{4} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 7} = 4$

Aufgaben zum Bruchrechnen

- Fassen Sie zusammen:
a) $\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8}$ b) $3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5}$ c) $\frac{8x+4y}{4a+6b} + \frac{9x}{9b+6a} - \frac{5}{3}$
- Multiplizieren Sie:
a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22}$ c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{3}{15}$ e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a}$
- Dividieren Sie:
a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7}$ c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15}$ d) $3xy : \frac{1}{2}z$ e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y}$ f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v}$
- Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit als möglich zusammen
a) $14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right)$ b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22}$ c) $\frac{8x+8y}{3r-3s} : \frac{4x+4y}{9r-9s}$
 d) $\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10}\right) \cdot 8$ e) $\frac{5a-3b}{6n} + \frac{5a-3b}{3m}$ f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10}\right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2}\right)\right]$
 g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5}$ h) $\left(12 : 2\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{9}$ i) $\left(\frac{u+v}{l+k} + \frac{3(u+v)}{2(l+k)} - \frac{5(u-v)}{3(k+l)}\right) \cdot \frac{1}{2}$

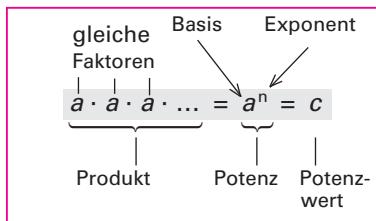
1.6 Rechnen mit Potenzen

Definition des Potenzbegriffs

Besteht ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren, so kann es abgekürzt als Potenz (engl. power) geschrieben werden.

Der Exponent (Hochzahl) gibt an, wie viel Mal die Basis (Grundzahl) mit sich selbst multipliziert wird.

Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (gesprochen: 2 hoch 5)
 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$



Die Potenzwerte von Potenzzahlen werden mit dem **Taschenrechner** berechnet. Dazu haben die Taschenrechner eine Potenziertaste y^x oder \wedge .

Beispiel: Es ist zu berechnen: $3,25^3$

Eingabe	3,25	y^x	3	=
Anzeige	3,25	$3,25^3$		34.328125

Vorzeichen beim Potenzieren

Beispiele: $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$; $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
 $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; usw.

Merke:

- Ist die Basis positiv, so ist der Potenzwert immer positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.
- Ist die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz mit negativem Exponenten (z.B. a^{-n}) kann auch als Kehrwert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten geschrieben werden.

Umgekehrt kann eine Potenz mit positivem Exponenten im Zähler eines Bruchs als Potenz mit negativem Exponenten im Nenner des Bruchs gesetzt werden.

Beispiele: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0,008$; $\frac{3^{-4}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^4} = \frac{16}{81} = 0,1975$; $\frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = \frac{b^{-y}}{a^{-x}}$$

Sonderfälle bei Potenzen

Potenzen mit Basis 1

Beispiel: $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Merke: Jede Potenz mit der Basis 1 hat immer den Potenzwert 1.

$$1^n = 1$$

Potenzen mit dem Exponent 0

Beispiel: $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$, da $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$

Merke: Jede Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1.

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Sehr große und sehr kleine Zahlen können als Vielfaches der Potenzen der Basis 10 (Zehnerpotenzen) geschrieben werden.

Große positive Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten ausgedrückt.

Beispiele: $100\,000\,000 = 10^8$; $7\,200\,000 = 7,2 \cdot 1\,000\,000 = 7,2 \cdot 10^6$

Sehr kleine Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten geschrieben.

Beispiele: $0,0085 = 85 \cdot 10^{-4}$; $0,0002938 = 2938 \cdot 10^{-7} = 2,938 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Potenzform:

- a) $2l \cdot 4l \cdot 8l$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b$

- c) $1,5 \text{ cm} \cdot 2,3 \text{ cm} \cdot 1,4 \text{ cm}$

2. Berechnen Sie den Potenzwert:

- a) $21^{2,5}$ b) $(-6,3)^3$
- c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ d) $2,4^{3,5}$

3. Schreiben Sie als Zehnerpotenz:

- a) 5 000 000 b) 0,0023
- c) 96 485 d) 0,000 082

Rechenregeln beim Potenzieren	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Potenzen Potenzen können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl dieselbe Basis als auch denselben Exponenten haben. Potenzausdrücke zuerst ordnen und dann die gleichnamigen Glieder zusammenfassen.	$x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n$	$9 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 = (9 - 6) \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $4,2 \text{ cm}^2 + 5,8 \text{ cm}^2 = (4,2 + 5,8) \cdot \text{cm}^2 = 10,0 \text{ cm}^2$
Multiplizieren von Potenzen Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und mit der Summe der Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem ihre Basen multipliziert und der Exponent beibehalten wird.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ $10^{-3} \cdot 10^6 \cdot 10^{(-3+6)} = 10^3$ $m^3 \cdot m^{-2} = m^{(3-2)} = m^1 = m$ $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$ $4,0^3 \cdot \text{cm}^3 = (4,0 \cdot \text{cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$
Dividieren von Potenzen Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Basis beibehalten und mit der Differenz der Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem ihre Basen dividiert und der Exponent beibehalten wird.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$ $\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$ $\frac{12^3}{10^3} = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1,728$
Potenzieren von Potenzen Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$ $(r^2)^x = r^{2 \cdot x} = r^{2x}$
Potenzieren von Summen aus Zahlen Eine Summe oder eine Differenz aus Zahlen wird zuerst ausgerechnet und dann potenziert.		$(2+5)^2 = 7^2 = 49$ $(9-3)^3 = 6^3 = 216$

Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen

1. Addieren und Subtrahieren von Potenzen

- a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2$ b) $12m^2 + 7m^3 - 7m^2 + 5m^3$ c) $6,2x^4 + 3,4y^2 + 7,5x^4 - 3,4y^2$
d) $2,8\pi r^2 h + \frac{5}{4}\pi r^3 - 1,75\pi r^3 + 2,2hr^2\pi$ e) $-14,3 \cdot 7^3 + 6,9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1,1 \cdot 11^4 + 8,7 \cdot 7^3$

2. Multiplizieren von Potenzen

- a) $10^7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$ b) $0,4a^4 \cdot 0,5a^5$ c) $2,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}$ d) $(r^3 - 2,5r^2) \cdot 2r^2$
e) $a^{0,5x} \cdot a^{7x+3}$ f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n}$ g) $(r+s)^2 \cdot (r+s)^3$ h) $(x+y)^a \cdot (x+y)^b$

3. Dividieren von Potenzen

- a) $\frac{10^3}{10^2}$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3}$ c) $\frac{225^3}{15^3}$ d) $\frac{780x^5}{39y^5}$ e) $\frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3}$ f) $\frac{n^3 \cdot x^4}{x^4} : \frac{n^3 \cdot x^4}{a}$

4. Potenzieren von Potenzen

- a) $(5^3)^2$ b) $(10^3)^{-2}$ c) $(4^2 \cdot axy^2)^3$ d) $5 \cdot (u^2v^3)^5$ e) $(1^7)^2 \cdot (3^0)^3$ f) $(7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$

5. Potenzieren von Summen

- a) $(3+7)^3$ b) $(22-17)^5$ c) $(23-14)^5$ d) $(5+9)^4$

1.7 Wurzeln

Definition des Wurzelbegriffs

Das Wurzelziehen, auch Radizieren genannt, ist die Umkehrung des Potenzierens.

Durch Wurzelziehen (engl. extraction) soll ermittelt werden, welche Zahl (x) z.B. ins Quadrat (Exponent 2) erhoben werden muss, um den Potenzwert (25) zu erhalten. Als Operatorzeichen für das Wurzelziehen verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{}$, kurz Wurzel genannt.

Beispiele: $\sqrt[2]{16} = ?$; Lösung: $\sqrt[2]{16} = 4$, da $4^2 = 16$
 $\sqrt[2]{9} = ?$; Lösung: $\sqrt[2]{9} = 3$, da $3^2 = 9$

Ein Wurzelausdruck besteht aus dem Wurzelzeichen mit Wurzelexponent und der darunter stehenden Basis. Das Ergebnis ist der Wurzelwert.

Es gilt eine Einschränkung auf bestimmte Zahlen: Um Probleme beim Rechnen zu vermeiden, müssen die Basis a und der Wurzelwert c positive Zahlen und der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein.

Verschiedene Wurzelexponenten

Da es bei Potenzen verschiedene Exponenten gibt (2, 3, 4, ...), gibt es auch Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (2, 3, 4, ...).

Die einfachste Wurzel hat den Wurzelexponenten 2. Sie heißt Quadratwurzel oder einfach Wurzel. Beim Schreiben wird der Wurzelexponent 2 im Wurzelzeichen meist weggelassen: $\sqrt{}$.

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt Kubikwurzel oder 3. Wurzel.

Ab dem Wurzelexponent 4 wird der Wurzelname nur noch mit dem Wurzelexponent gebildet, also 4. Wurzel ($\sqrt[4]{}$), 5. Wurzel ($\sqrt[5]{}$) usw.

Außer bei 2 muss der Wurzelexponent immer geschrieben werden.

Wurzeln in Potenzschreibweise

Ein Wurzelausdruck kann auch in Potenzschreibweise geschrieben werden. Dem Wurzeloperator entspricht ein Potenzbruch.

Der Zähler des Potenzbruchs ist der Exponent der Basis und sein Nenner ist der Wurzelexponent.

Da das Wurzelzeichen die Umkehrung des Potenzierens ist, heben sich Wurzelziehen (Radizieren) und Potenzieren mit demselben Exponenten auf.

In umgekehrter Reihenfolge gilt das bei negativen Zahlen nicht immer.

Berechnen von Wurzelzahlen

Der Wurzelwert von Wurzelzahlen wird mit dem Taschenrechner berechnet.

Zur Berechnung von Quadratwurzeln haben die Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste, z.B. $\sqrt{}$ oder $\sqrt[x]{}$.

Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten werden mit den entsprechenden Rechntasten berechnet, z.B. $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ oder $\sqrt[5]{}$.

Beispiel: Potenzieren

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Beispiel: Wurzelziehen

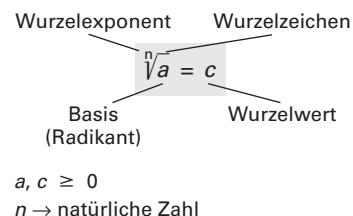
$$x^2 = 25; x = ?$$

Schreibweise mit Wurzelzeichen:

$$\sqrt[2]{25} = ?$$

Lösung:

$$\sqrt[2]{25} = 5, \text{ da } 5^2 = 25$$



Beispiel: Quadratwurzel

$$\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$$

(sprich: Wurzel aus 36 ist 6)

Beispiel: Kubikwurzel

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad (\text{da } 4^3 = 64)$$

(sprich: Kubikwurzel oder 3. Wurzel aus 64 ist 4)

Beispiel: 4. Wurzel

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad (\text{da } 2^4 = 16)$$

Wurzel als Potenzausdruck

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Beispiel: } \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

Aufheben des Wurzelziehens

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\text{Beispiel: } (\sqrt[3]{64})^3 = 64$$

Beispiel: Es ist zu berechnen:

$$\sqrt[4]{39,0625}$$

a)	Eingabe	4	$\sqrt[4]{}$	39,0625	=
	Anzeige	4	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[4]{39,0625}$	2,5000

Rechenregeln beim Wurzelziehen	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Wurzeln Es können nur Wurzeln mit gleichen Wurzel-exponenten und gleicher Basis (so genannte gleichnamige Wurzeln) addiert oder subtrahiert werden. Man klammert die gleichnamige Wurzel aus und addiert bzw. subtrahiert die Beizahlen (Koeffizienten).	$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y) \cdot \sqrt[n]{a}$	$5 \cdot \sqrt[3]{125} + 12 \cdot \sqrt[3]{125} - 14 \cdot \sqrt[3]{125} = (5 + 12 - 14) \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
Radizieren von Produkten Ein Produkt wird radiziert, indem <ul style="list-style-type: none"> • entweder der Produktwert radiziert wird oder • jeder einzelne Faktor des Produkts radiziert wird. 	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$	$\sqrt[3]{36 \cdot 81} = \sqrt[3]{2916} = 54$ oder $\sqrt{36} \cdot \sqrt{81} = 6 \cdot 9 = 54$
Radizieren von Quotienten (Brüchen) Ein Quotient wird radiziert, indem <ul style="list-style-type: none"> • entweder der Quotientenwert radiziert wird oder • Zähler und Nenner getrennt radiziert werden. 	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$ oder $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$
Radizieren von Potenzen Eine Potenz wird radiziert, indem man <ul style="list-style-type: none"> • die Wurzel aus der Basis zieht und den Wurzelwert mit dem Exponenten der Basis potenziert, oder • die Wurzel in Potenzschreibweise umwandelt. 	$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$ $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$\sqrt{9^4} = (\sqrt{9})^4 = 3^4 = 81$ $\sqrt[4]{9^4} = \sqrt[4]{9^2} = 9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$
Radizieren von Summen und Differenzen Eine Summe oder eine Differenz kann nur radiziert werden, wenn vorher der Summenwert zahlenmäßig ausgerechnet oder zu einem Produkt zusammengefasst wurde.	$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{(a+b)}$	$\sqrt[3]{81+44} = \sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{289-145} = \sqrt[3]{144} = 12$ $\sqrt{39x^2y^2+25x^2y^2} = \sqrt{64x^2y^2} = 8xy$

Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Berechnen Sie den Wurzelwert:

a) $\sqrt{45796}$ b) $\sqrt{0,0065324}$ c) $\sqrt{1432,6225}$ d) $\sqrt[3]{39,785}$ e) $\sqrt[4]{42,424}$ f) $\sqrt{\pi}$

2. Berechnen Sie, nachdem Sie möglichst weit zusammengefasst haben:

a) $2,8 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5} - 1,6 \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22,5}$
 d) $(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3})$ e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}}$ g) $\frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\sqrt[3]{27^4}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

3. Berechnen Sie:

a) $\sqrt{1444 \cdot 729}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27}$ c) $\sqrt{64^2}$ d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{2560}{\sqrt[3]{5}}}$ f) $\sqrt[4]{81^6}$ g) $\sqrt[3]{(\frac{3}{7})^6}$
 h) $4,3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3,8 \cdot \sqrt[3]{343}$ i) $1 \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2 \frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\left(\frac{(3,9 \text{ m} - 2,7 \text{ m})^2}{3} + (0,3 \text{ m})^2\right)}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.1 Definition des Logarithmus

Soll in einem Potenzausdruck $a^n = c$ der unbekannte Exponent n bestimmt werden, so ist das dazu erforderliche Rechenverfahren das **Logarithmieren** (engl. logarithm).

$$n = \log_a c$$

↓ Numerus
Logarithmus ↑ ↑ Basis

Der Logarithmus ist der Exponent n , mit dem die Basis a potenziert werden muss, um den Numerus c zu erhalten.

Man schreibt: $n = \log_a c$. Man spricht: n ist gleich dem Logarithmus von c zur Basis a .

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Potenzrechnung, der Wurzelrechnung und dem Logarithmieren:

Bei der **Potenzrechnung**: berechnet wird der Potenzwert c :

$$c = a^n$$

z. B. $100 = 10^2$

Bei der **Wurzelrechnung**: berechnet wird die Basis a :

$$a = \sqrt[n]{c}$$

z. B. $10 = \sqrt[2]{100}$

Beim **Logarithmieren**: berechnet wird der Exponent n :

$$n = \log_a c$$

z. B. $2 = \log_{10} 100$

Beispiele für Logarithmen:

$$\log_2 8 = 3$$

da $2^3 = 8$;

$$\log_2 32 = 5$$

da $2^5 = 32$

$$\log_3 9 = 2$$

da $3^2 = 9$;

$$\log_3 27 = 3$$

da $3^3 = 27$

$$\log_5 25 = 2$$

da $5^2 = 25$;

$$\log_5 125 = 3$$

da $5^3 = 125$

$$\log_{10} 10 = 1$$

da $10^1 = 10$;

$$\log_{10} 100 = 2$$

da $10^2 = 100$

$$\log_{10} 1000 = 3$$

da $10^3 = 1000$

$$\log_{10} 10\,000 = 4$$

da $10^4 = 10\,000$

$$\log_{10} 0,1 = -1$$

da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$

$$\log_{10} 0,01 = -2$$

da $10^{-2} = \frac{1}{10^{-2}} = 0,01$

Alle Logarithmen einer Basis bilden ein Logarithmensystem. Als Basis kann außer 0 und 1 jede positive Zahl verwendet werden.

Logarithmensysteme

In den Naturwissenschaften und der Technik sind zwei Logarithmensysteme in Gebrauch.

Das Logarithmensystem mit der Basis 10 ist rechnerisch am einfachsten zu handhaben und deshalb das in der Technik und den Naturwissenschaften übliche Logarithmensystem.

Logarithmen der Basis 10 werden **dekadische Logarithmen** oder **BRIGG'sche Logarithmen** genannt. Man schreibt sie entweder \log_{10} oder vereinfacht nur **Ig**.

Auf der Taschenrechnertastatur berechnet man dekadische Logarithmen mit der Taste: **[log]** oder **[LOG]**.

In den Naturwissenschaften, wie z.B. der Chemie oder Physik, wird außerdem ein Logarithmensystem mit der Basis e angewandt: \log_e . Es wird **natürlicher Logarithmus** genannt und abgekürzt **In** geschrieben. (e ist eine Zahl, die zur Beschreibung natürlicher Wachstumsvorgänge benutzt wird. Sie beträgt $e = 2,7182818\dots$; mit unendlich vielen Stellen.)

Auf dem Taschenrechner berechnet man natürliche Logarithmen mit der Taste: **[ln]** oder **[LN]**.

Die Logarithmen der beiden Systeme können mit einem Faktor ineinander umgerechnet werden (siehe rechts).

Beispiel: Es soll der natürliche Logarithmus (**In**) der Zahl 126 mit einem Taschenrechner ermittelt werden, der nur eine **[log]**-Taste besitzt.

Lösung: Mit der **[log]**-Taste wird bestimmt: $\lg 126 = 2,1003705$

Mit der Umrechnungsgleichung folgt:

$$\ln 126 = 2,3025851 \cdot \lg 126 = 2,3025851 \cdot 2,1003705 = 4,8362819$$

Umrechnen der Logarithmen

$$\lg x = 0,4342945 \cdot \ln x$$

$$\ln x = 2,3025851 \cdot \lg x$$