EUROPA-FACHBUCHREIHE
für elektrotechnische und elektronische Berufe

Mathematik für Elektroniker/in für Geräte und Systeme

Lehr- und Übungsbuch mit DVD der Mathematik und des Fachrechnens für Berufe der Informationstechnik, der Kommunikationstechnik und der Elektronik

16. Auflage

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
und Seminaren (siehe Rückseite)

Ihre Meinung zum Buch interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit. Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse lektorat@europa-lehrmittel.de

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 33064

Autoren von „Mathematik für Elektroniker/in für Geräte und Systeme“

Günther Buchholz	Dipl.-Ing. (FH), Oberstudienrat	Stuttgart
Monika Burgmaier	Oberstudiendirektorin	Durbach
Elmar Dehler	Studiendirektor	Ulm
Bernhard Grimm	Oberstudienrat	Sindelfingen, Leonberg
Patricia Burgmaier	Dipl.-Ing. (BA)	Melsungen
Jörg Andreas Oestreich	Dipl.-Ing.	Schwäbisch Hall
Werner Philipp	Dipl.-Ing.	Heilbronn
Bernd Schiemann	Dipl.-Ing.	Durbach

Bildbearbeitung:
Wissenschaftliche PublikationsTechnik Kernstock, 73230 Kirchheim/Teck
Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel GmbH & Co. KG, Ostfildern

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:
Dipl.-Ing. Bernd Schiemann, Durbach

ISBN 978-3-8085-3636-0

Diesem Buch wurden die neuesten Ausgaben der DIN-Blätter und der VDE-Bestimmungen zugrunde gelegt. Verbindlich sind jedoch nur die DIN-Blätter und VDE-Bestimmungen selbst.

Die DIN-Blätter können von der Beuth-Verlag GmbH, Burggrafenstraße 4–7, 10787 Berlin, und Kamekestraße 2–8, 50672 Köln, bezogen werden. Die VDE-Bestimmungen sind bei der VDE-Verlag GmbH, Bismarckstraße 33, 10625 Berlin, erhältlich.

16. Auflage 2017, korrigierter Nachdruck 2020

Druck 5 4 3 (keine Änderung seit der 2. Druckquote)

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

www.Europa-Lehrmittel.de

Satz: Wissenschaftliche PublikationsTechnik Kernstock, 73230 Kirchheim/Teck

Umschlag: braunwerbeagentur, Radevormwald

Umschlagidee: Bernd Schiemann

Druck: RCOM Print GmbH, 97222 Rimpar

Kapitelübersicht

Vorwort zur 16. Auflage

Das Buch „Mathematik für Elektroniker/in für Geräte und Systeme“ beinhaltet elektronische Aufgabenstellungen in den Bereichen der Geräte- und Systemtechnik sowie in den angrenzenden Bereichen der Kommunikations- und Informationstechnik.

Zielgruppen: Auszubildende der Fachrichtung Elektroniker/-in für Geräte und Systeme, Informationselektroniker/in der Fachrichtungen Geräte- und Systemtechnik und Bürotechnik, Systeminformatiker/in, IT-Systemelektroniker/in, Industrieelektroniker/in Fachrichtung Geräte und Systeme sowie für Schüler und Schülerinnen an Berufsfachschulen, Berufskollegs (BW) und Technischen Gymnasien und Studenten an Fachschulen für Technik und Fachhochschulen, aber auch Praktiker im Beruf.

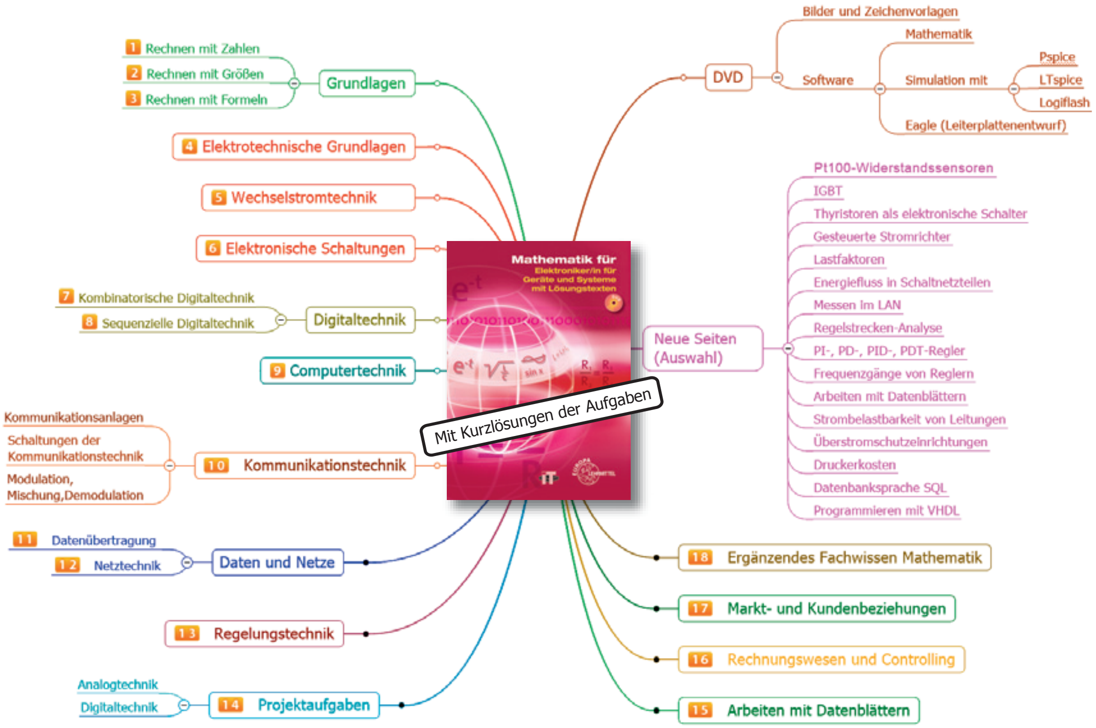
Methodische Schwerpunkte: Klare Strukturierung der Inhalte, z. B. der verwendeten Formeln und Benennung der Formelzeichen, Einführungsbeispiele zu jedem Thema, zahlreiche Schaltungsbeispiele und Grafiken aus Datenblättern, Vertiefung des Gelernten durch eine große Zahl von Übungsaufgaben. Ergänzt wird das Buch durch Angabe der Ergebnisse der Aufgaben in Kurzform am Buchende.

Zum Fördern und Vertiefen weitergehender mathematischer Zusammenhänge dient das Kapitel „Ergänzendes Fachwissen Mathematik“.

Mathematikprogramme und Programme zur Schaltungssimulation runden das Angebot in der Auflage ab.

Wir danken den Firmen für die Genehmigung zur Veröffentlichung der Software auf der CD.

Informationen zum Buch im Überblick:



Sommer 2017

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel

Inhaltsverzeichnis

6 Elektronische Schaltungen

7 Digitaltechnik

1 Rechnen mit Zahlen

Zahlen bestehen aus Ziffern. Im dekadischen Zahlensystem (von lat. decem = zehn) verwendet man Dezimalzahlen, die aus den Ziffern 0 bis 9 gebildet werden. Reelle Zahlen (Kurzzeichen ℝ) sind Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind (rationale Zahlen, Kurzzeichen ℚ) oder es sind Kommazahlen mit unendlich vielen nicht periodischen Nachkommastellen (irrationale Zahlen). Außer den reellen Zahlen von **Tabelle 1** gibt es komplexe Zahlen (Seite 292).

Die Zahlen gehören meist mehreren Zahlenmengen an. So gehört z. B. die Zahl 5 den Mengen der natürlichen Zahlen, der ungeraden natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen an. Die Zahl 5 ist jeweils ein Element (Kurzzeichen ∈, sprich: ist Element von) der angegebenen Zahlenmengen.

Beispiel 1: Zahlen zuordnen

Zu welchen Zahlenmengen gehören die Zahlen

a) 3 b) 1,8 c) π?

Lösung:

a) 3 ∈ ℕ, ℤ b) 1,8 ∈ ℝ, ℚ c) ℝ, π **ist eine irrationale Zahl.**

1.1 Grundgesetze

1.1.1 Vertauschungsgesetz, Verbindungsgesetz, Verteilungsgesetz

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)[1]

> Bei der Addition kann man die Glieder eines Terms beliebig vertauschen. Dasselbe gilt für die Multiplikation.

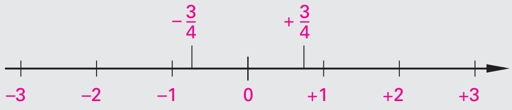
Ein Term (von lat. terminus = Ausdruck) besteht aus Zahlen, die mit Rechenzeichen verknüpft sind, z. B. −4 + 7. Bei der Multiplikation sind die Vorzeichenregeln zu beachten.

Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz)[2]

> Bei der Addition können die Glieder eines Terms beliebig durch Klammern zusammengefasst werden. Dasselbe gilt für die Multiplikation.

Die Klammern werden zuerst ausgerechnet. Das Malzeichen oder Multiplikationszeichen (·) kann zwischen Faktoren entfallen, außer bei Zahlen ohne Klammern.

Tabelle 1: Reelle Zahlen ℝ

Rationale Zahlen ℚ	
Ganze Zahlen ℤ z. B. −2; −1; 0; 11; 12; …	Gebrochene Zahlen (Brüche) z. B. $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{7}$; 0,5; 0,3
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}_0$ z. B. 0; 1; 2; 3; 4; …	
Zahlengerade  	
Irrationale Zahlen ℝ\ℚ	
Algebraische irrationale Zahlen z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$	Transzendente irrationale Zahlen z. B. e, π, log 7
Zahlengerade  	

Vorzeichenregeln

+ · + = +	+ · − = −
− · + = −	− · − = +
+ : + = +	+ : − = −
− : + = −	− : − = +

Beispiel 2: Kommutativgesetz anwenden

Wenden Sie auf den Term (−3) · 5 · (−6) das Kommutativgesetz an und berechnen Sie ihn.

Lösung:

(−3) · 5 · (−6) = 5 · (−3) · (−6) = (−6) · (−3) · 5 = 90

Beispiel 3: Assoziativgesetz anwenden

Wenden Sie auf den Produktterm 3·2·5 das Assoziativgesetz an und berechnen Sie.

Lösung:

3 · 2 · 5 = 3 · (2 · 5) = 3 (2 · 5) = 3 · 10 = 30

---

[1] lat. commutare = ändern, vertauschen,

[2] lat. associare = verbinden

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)[1]

Kommen in einer Rechnung Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division gemischt vor, ohne dass Klammern gesetzt sind, so sind zuerst die durch Malzeichen oder durch Teilzeichen verbundenen Terme zu berechnen (Punktrechnung geht vor Strichrechnung), z. B. ist 5 + 2 · 4 = 5 + 8 = 13. Wenn anders gerechnet werden soll, setzt man Klammern, z. B. ist (5 + 2) · 4 = 7 · 4 = 28.

Bei der Multiplikation von Klammern wird jeder Summand mit dem Faktor multipliziert.

Beispiel 1: Distributivgesetz anwenden
Berechnen Sie nach dem Distributivgesetz:
(–5) · (2 + 7).

Lösung:
(–5) · (2 + 7) = (–5) · 2 + (–5) · 7 = –10 – 35 = **–45**

Aufgaben zu 1.1.1

Wenden Sie das Kommutativgesetz an und berechnen Sie die Terme.

1\. a) 3 – 5 + 8 – 1 b) 6 + 12 – 10 – 3
c) 2 – 4 + 5 – 9 d) 8 – 7 + 5

2\. a) 7 – 3 – 2 + 8 b) 5 – 2 + 3 – 1
c) 9 – 2 + 7 d) 3 – 1 – 5 + 23

3\. a) (–3) · 2 · 2 b) 2 · (–5) · (–3)
c) 2 · 3 · (–7) d) 3 · (–2) · 9

4\. a) (–8) · 4 · 2 b) 3 · (–5) · (–3)
c) 2 · 5 · (–2) d) 6 · (–1) · 1

Wenden Sie das Assoziativgesetz auf Terme an und berechnen Sie diese.

5\. a) 6 + 2 + 4 b) –3 + 2 – 5
c) 3 – 8 + 11 d) 8 + 2 – 4

6\. a) 5 + 4 + 3 b) 4 + 2 – 3
c) 3 – 9 + 6 d) 8 + 2 – 4

7\. a) 3 · 5 · 4 b) (–3) · 5 · 2

8\. a) 6 · 4 · 2 b) (–2) · 4 · 3

Berechnen Sie nach dem Distributivgesetz.

9\. a) 3 (5 + 2) b) 5 (7 – 4)

10\. a) 4 (8 + 3) b) 3 (5 – 2)

11\. a) (–2) (7 + 5) b) 3 (7 – 6 + 1)
c) (–6) (8 – 3) d) (–5) (6 – 14)

12\. a) (–7) (8 – 6) b) 5 (9 – 5 – 4)
c) (–4) (6 – 2) d) (–9) (8 – 12)

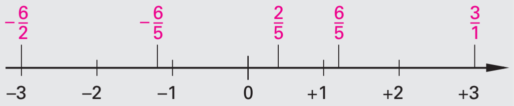
1.1.2 Bruchrechnen

Brüche entstehen bei der Division von z. B. ganzen Zahlen. Die Vorzeichenregeln beim Dividieren entsprechen den Vorzeichenregeln beim Multiplizieren. Man unterscheidet verschiedene Arten von Brüchen (**Tabelle 1**).

Tabelle 1: Arten von Brüchen

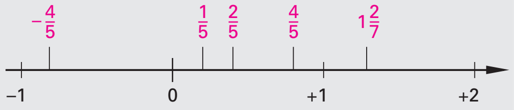
Echter Bruch	Unechter Bruch	Scheinbruch
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{1}$
Zähler kleiner als Nenner	Zähler größer als Nenner	Nenner gleich 1

Zahlengerade



Gemischte Zahl	Gleichnamige Brüche	Ungleichnamige Brüche
$1\frac{2}{7} = 1 + \frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{5}{9}$
Ganze Zahl und Bruch	Nenner alle gleich	Nenner alle ungleich

Zahlengerade



Beispiel 2: Rechnen mit Brüchen
Schreiben Sie 15 : 6 als Bruch und berechnen Sie den Dezimalbruch.

Lösung:
$15 : 6 = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{2{,}5}$

Für das Rechnen mit Brüchen gelten besondere Rechenregeln (**Tabelle 1**, folgende Seite).

Brüche werden erweitert oder gekürzt, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl vervielfacht oder durch die gleiche Zahl teilt.

---

[1] lat. distribuere = verteilen

Aufgaben zu 1.1.2

Berechnen Sie.

1. a) $\frac{+65}{+13}$ b) $\frac{+144}{+16}$ c) $\frac{-96}{+4}$ d) $\frac{+48}{-3}$
e) $\frac{-27}{-9}$ f) $\frac{+169}{-13}$ g) $\frac{-144}{-12}$ h) $\frac{-27}{+9}$

2. a) $\frac{+88}{-11}$ b) $\frac{+136}{+17}$ c) $\frac{+64}{-16}$ d) $\frac{+156}{-12}$
e) $\frac{-81}{-9}$ f) $\frac{+171}{-19}$ g) $\frac{-232}{-8}$ h) $\frac{-36}{-6}$

3. a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{5}-\frac{2}{15}+\frac{7}{30}$
c) $\frac{7}{24}-\frac{11}{30}-\frac{8}{15}+\frac{3}{8}$ d) $\frac{2}{8}+\frac{4}{7}-\frac{8}{6}$

4. a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{8}-\frac{5}{24}+\frac{5}{48}$
c) $\frac{17}{18}-\frac{7}{9}+\frac{11}{12}-\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

5. a) $\frac{2}{53}\cdot 8$ b) $\frac{5}{7}:\frac{3}{4}$ c) $\frac{8}{21}\cdot 1\frac{2}{5}$
d) $\frac{5}{31}:\frac{2}{13}$ e) $8\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}$ f) $\frac{3}{9}:\frac{4}{8}$

6. a) $\frac{5}{37}\cdot 7$ b) $\frac{3}{27}\cdot 4\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{15}\cdot 2\frac{3}{7}$
d) $\dfrac{\frac{7}{75}}{\frac{8}{5}}$ e) $\dfrac{\frac{4}{9}}{7\frac{5}{13}}$ f) $\dfrac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{9}}$

7. Wandeln Sie in Dezimalbrüche um.
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{12}{125}$ d) $\frac{35}{55}$ e) $\frac{154}{224}$

8. Wandeln Sie in Brüche um.
a) 0,25 b) 0,875 c) 1,23 d) 2,05 e) 0,0075

9. Berechnen Sie.
a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(2\frac{2}{5}-\frac{5}{4}\right)$
b) $\left(4\frac{4}{5}-3\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2\frac{1}{5}+1\frac{5}{6}\right)$

10. Berechnen Sie.
a) $\dfrac{8\frac{7}{5}-6\frac{5}{8}}{3\frac{8}{9}+2\frac{2}{5}}$ b) $\dfrac{4\frac{5}{8}-6\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}}{6\frac{1}{3}-2\frac{4}{5}-1\frac{1}{8}}$

Tabelle 1: Rechnen mit Brüchen

Art	Regeln, Beispiele
Addition / Subtraktion	**Gleichnamige Brüche:** Zähler addieren oder subtrahieren, Nenner bleibt gleich. $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2-1+4}{5}=\frac{5}{5}=1$
	Ungleichnamige Brüche: Nenner gleichnamig machen (Hauptnenner bilden, Bruch erweitern). $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{12}+\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{15}-\frac{2}{3}\cdot\frac{20}{20}$ $=\frac{24+45-40}{60}=\frac{29}{60}$
Multiplikation	**Ganze Zahl mit Bruch:** Ganze Zahl mal Zähler, Nenner bleibt gleich. $5\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5\cdot 3}{1\cdot 7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$
	Bruch mit Bruch: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}$
	Gemischte Zahl mit ganzer Zahl: Gemischte Zahl in Bruch verwandeln. $2\frac{1}{5}\cdot 4=\frac{11}{5}\cdot 4=\frac{11}{5}\cdot\frac{4}{1}=\frac{44}{5}=8\frac{4}{5}$ oder $2\frac{1}{5}\cdot 4=\left(2+\frac{1}{5}\right)\cdot 4=8+\frac{4}{5}=8\frac{4}{5}$
	Gemischte Zahl mit gemischter Zahl: Gemischte Zahlen in Brüche verwandeln. $1\frac{2}{3}\cdot 2\frac{3}{5}=\frac{5\cdot 13}{3\cdot 5}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$
Division	**Bruch durch ganze Zahl:** Ganze Zahl mal Nenner, Zähler bleibt gleich. $\frac{1}{4}:5=\frac{1}{4}:\frac{5}{1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$
	Ganze Zahl durch Bruch: Ganze Zahl mal Kehrwert des Bruches. $5:\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\cdot\frac{7}{3}=\frac{5\cdot 7}{3}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$
	Bruch durch Bruch: Zählerbruch mal Kehrwert des Nennerbruches. $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$

Ein Bruch wird durch einen Bruch geteilt, indem man mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

1.2 Potenzen

In der Mathematik versteht man unter einer Potenz ein Produkt gleicher Zahlen in verkürzter Schreibweise.

1.2.1 Zehnerpotenzen

1.2.1.1 Werte der Zehnerpotenzen

Wird die Zahl 10 als Faktor n-mal verwendet, so bildet man die Potenz, indem man die Grundzahl (Basis) 10 hinschreibt und *n* als Hochzahl (Exponent) dazusetzt (**Bild 1**).

Beispiel 1: Als Zehnerpotenz schreiben
Schreiben Sie 10 · 10 · 10 · 10 als Zehnerpotenz.
Lösung:
10 · 10 · 10 · 10 = $\mathbf{10^4}$ (sprich: zehn hoch vier).

Umgekehrt berechnet man eine Zehnerpotenz, indem man sie als Faktorenreihe hinschreibt und diese ausrechnet (**Tabelle 1**).

Beispiel 2: Potenzwert berechnen
Berechnen Sie 10^9 (sprich: zehn hoch neun).
Lösung:
$10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{1\,000\,000\,000}$

Man berechnet den Kehrwert einer Potenz, indem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.

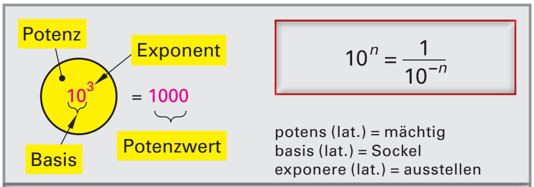
Eine negative Hochzahl bedeutet also, dass der Kehrwert der Potenz mit derselben positiven Hochzahl zu berechnen ist.

Beispiel 3: Negativen Potenzwert berechnen
Berechnen Sie 10^{-3} (sprich: zehn hoch minus drei).
Lösung:
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

Jede Potenz mit der Hochzahl 0 hat den Wert 1.

Zahlen, insbesondere sehr große oder sehr kleine Zahlen, kann man als Produktterme von überschaubaren Zahlen und Zehnerpotenzen darstellen. Man ermittelt dazu die Zehnerpotenz der Einerstelle des Faktors.

Beispiel 4: Kommastellen versetzen
Die Zahl 0,000 000 001 52 ist so darzustellen, dass 1,52 der Faktor ist.
Lösung:
Die 1 steht an 9. Nachkommastelle ≙ 10^{-9}
⇒ 0,000 000 001 52 = $\mathbf{1{,}52 \cdot 10^{-9}}$



$$10^n = \frac{1}{10^{-n}}$$

potens (lat.) = mächtig
basis (lat.) = Sockel
exponere (lat.) = ausstellen

Bild 1: Zehnerpotenz und Kehrwert

Tabelle 1: Zehnerpotenzen (Beispiele)

Potenz	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
Potenzwert	100	10	1	0,1	0,01

Bei Computern und Taschenrechnern werden große und kleine Zahlen als Produktterme mit Zehnerpotenzen ausgegeben und können auch so eingegeben werden. Für die Basis 10 wird dabei E oder EE ausgegeben oder eingegeben; die nach E folgende Zahl ist der Exponent zur Basis 10. Vor E muss ein Faktor stehen, z. B.: 1EE6 ≙ $1\ ^{6}$ ≙ $1 \cdot 10^6$.

Beispiel 5: Potenzwert als Zahl darstellen
Als Ergebnis erscheint auf einem Bildschirm 10.5 E+4. Welcher Zahlenwert ist das?
Lösung:
10.5 E+4 = $10{,}5 \cdot 10^4$ = **105 000**

Aufgaben zu 1.2.1.1

Schreiben Sie als Faktorenreihe.

1. a) 10^{+4} b) 10^{-1} c) 10^{+3} d) 10^{-6}
2. a) 10^{-2} b) 10^{+5} c) 10^{-7} d) 10^{+8}

Berechnen Sie die Werte folgender Potenzen.

3. a) 10^6 b) 10^{-3} c) 10^{-2} d) 10^{-9}
4. a) 10^{-1} b) 10^0 c) 10^{-6} d) 10^8

Bilden Sie die Kehrwerte.

5. a) 10^{-6} b) 10^7 c) 10^9 d) 10^{-12}
6. a) 10^{-3} b) 10^0 c) 10^3 d) 10^1

Berechnen Sie die Dezimalzahl der Kehrwerte.

7. a) 10^0 b) 10^1 c) 10^{-3} d) 10^4
8. a) 10^{-6} b) 10^{-4} c) 10^2 d) 10^{-5}

Schreiben Sie als Produkt mit einer Zehnerpotenz.

9. a) 24 000 b) 0,0023 c) 700 000
10. a) 12 000 b) 0,000 12 c) 340 000

1.2.1.2 Rechnen mit Zehnerpotenzen

Addition und Subtraktion sind vereinfacht bei gleichen Exponenten.

Beispiel 1: Potenzen addieren

Berechnen Sie $10^6 + 10^3$.

Lösung:

$10^6 + 10^3 = 1000 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 = 1001 \cdot 10^3 = \mathbf{1\,001\,000}$

Zehnerpotenzen werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert.

Beispiel 2: Potenzen multiplizieren

Berechnen Sie $10^6 \cdot 10^3$.

Lösung:

$10^6 \cdot 10^3 = 10^{6+3} = \mathbf{10^9}$

Durch eine Zehnerpotenz wird dividiert, indem man deren Hochzahl subtrahiert.

Beispiel 3: Potenzen dividieren

Berechnen Sie $10^6 / 10^3$.

Lösung:

$10^6 / 10^3 = 10^{6-3} = \mathbf{10^3}$

Zehnerpotenzen werden potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert.

Beispiel 4: Potenzen potenzieren

Berechnen Sie $(10^3)^4$.

Lösung:

$(10^3)^4 = 10^{3 \cdot 4} = \mathbf{10^{12}}$

Oft werden für die Darstellung von Zahlen mit Potenzen Vorsätze verwendet (**Tabelle 1**).

Aufgaben zu 1.2.1.2

Berechnen Sie.

1. a) $10^6 + 10^2 - 10^0$ b) $10^{-3} + 10^1 - 10^2$
   c) $10^6 + 10^3 + 10^3$

2. a) $10^2 - 10^1 - 10^{-2}$ b) $10^{-6} + 10^{-7} + 10^0$
   c) $10^{-3} + 10^3 - 10^{-6}$

Stellen Sie als Zehnerpotenz dar.

3. a) $10^{13} : 10^9$ b) $10^6 \cdot 10^5$ c) $10^{12} : 10^{-6}$

4. a) $10^9 : 10^6$ b) $10^{27} : 10^{14}$ c) $10^{-3} \cdot 10^{-6}$

Berechnen Sie.

5. a) $10^{-12} \cdot 10^{12}$ b) $10^3 \cdot 10^{-6}$ c) $10^8 \cdot 10^0 \cdot 10^{-6}$

6. a) $10^0 : 10^{12}$ b) $10^1 \cdot 10^{-6}$ c) $10^{-3} \cdot 10^9$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

a, *b* beliebige Zahlen
m, *n* Hochzahlen

Tabelle 1: Vorsätze (anstelle von Zehnerpotenzen)

Zeichen	Vorsatz	Faktor	Zeichen	Vorsatz	Faktor
Y	Yotta	10^{24}	d	Dezi	10^{-1}
Z	Zetta	10^{21}	c	Zenti	10^{-2}
E	Exa	10^{18}	m	Milli	10^{-3}
P	Peta	10^{15}	µ	Mikro	10^{-6}
T	Tera	10^{12}	n	Nano	10^{-9}
G	Giga	10^9	p	Piko	10^{-12}
M	Mega	10^6	f	Femto	10^{-15}
k	Kilo	10^3	a	Atto	10^{-18}
h	Hekto	10^2	z	Zepto	10^{-21}
da	Deka	10^1	y	Yokto	10^{-24}

Berechnen Sie für folgende Brüche den Wert als Dezimalzahl.

7. a) $\frac{10 \cdot 10^6}{10^{-3} \cdot 10^6}$ b) $\frac{1}{10^6 \cdot 10^{-3}}$ c) $\frac{10^3 \cdot (10^{-6})^2}{10^{-9} \cdot 10^{-2}}$

8. a) $\frac{10^2 \cdot 10^{-4}}{10^{-12} \cdot 10^9}$ b) $\frac{10^{-3} \cdot 10^6}{10^{-4} \cdot 10^5}$ c) $\frac{10^{-2} \cdot (10^6)^2}{10^3 \cdot 10^4}$

Zerlegen Sie in Faktoren mit Zehnerpotenzen und berechnen Sie.

9. a) $\frac{42\,000 \cdot 500}{0{,}06}$ b) $\frac{46\,000 \cdot 0{,}5}{50\,000}$
   c) $\frac{0{,}0065 \cdot 0{,}025}{13\,000 \cdot 0{,}0005}$ d) $\frac{4200 \cdot 0{,}007}{35\,000}$

10. a) $\frac{0{,}0035 \cdot 620}{310 \cdot 0{,}07}$ b) $\frac{0{,}007 \cdot 630}{0{,}0009}$
    c) $\frac{28\,000 \cdot 0{,}4}{7000 \cdot 400}$ d) $\frac{22 \cdot 0{,}0004}{880}$

11. $$\frac{(28 \cdot 10^2 - 2{,}6 \cdot 10^3) \cdot 4{,}47 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 43 \cdot 10^7}{12{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 122 \cdot 10^{-3}}$$

12. $$\frac{(22{,}7 \cdot 10^5 - 2{,}8 \cdot 10^4) \cdot 343 \cdot 10^{-6} \cdot 66 \cdot 10^{-7}}{21{,}9 \cdot 10^{-2} \cdot 12{,}2 \cdot 10^{-4}}$$

1.2.2 Sonstige Potenzen mit ganzen Exponenten

Man kann sämtliche Zahlen als Grundzahlen (Basis) für Potenzen verwenden.

Je nach Basis unterscheidet man außer den Zehnerpotenzen z. B. Zweierpotenzen, Achterpotenzen und Sechzehnerpotenzen.

Bei Speichern in der Datentechnik wird z. B. die Anzahl der Speicherelemente aus der Anzahl der Adressleiter und der Anzahl der Datenleiter mit Zweierpotenzen berechnet (**Bild 1**).

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert. Sie werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Sie werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert oder dividiert, indem man auf die Basen das Assoziativgesetz anwendet und das Ergebnis potenziert.

Beispiel 1: Speicherzellenzahl berechnen
Wie viele Speicherzellen können mit 20 Adressleitern bei 8 Datenleitern adressiert werden (**Bild 1**)?

Lösung:
$z = 2^{20} \cdot 2^3 = 2^{23} = 8\,388\,608$

Beispiel 2: Potenzen dividieren
Berechnen Sie $8^4 : 2^4$.

Lösung:
$8^4 : 2^4 = \left(\frac{8}{2}\right)^4 = 4^4 = \mathbf{256}$

Beispiel 3: Potenzwert berechnen
Berechnen Sie die Potenz $(3^2)^4$.

Lösung:
$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 = \mathbf{6561}$

Aufgaben zu 1.2.2

1. Bestimmen Sie die Zweierpotenzen mit folgenden Exponenten.
a) 2 b) 1 c) 0 d) 4

2. Ermitteln Sie die Achterpotenzen mit folgenden Exponenten.
a) 2 b) 1 c) 0 d) 3

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} = a^n$

$z = 2^n$

a beliebige Zahl
n ganzer Exponent (Hochzahl), z. B. Adressleiter
z Anzahl der Speicherzellen

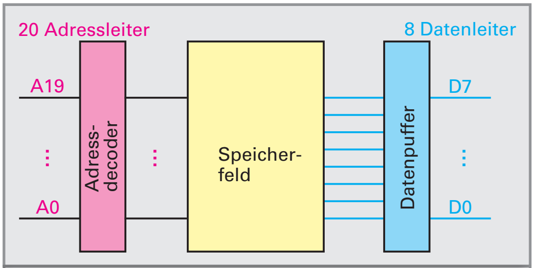


Bild 1: Vereinfachter Speicheraufbau

Berechnen Sie.

3. a) $8^2 + 6^2$; b) $8^2 \cdot 8^3$; c) $8^2 \cdot 4^2$; d) $\frac{8^4}{2^4}$

4. a) $\frac{16^2}{8^2}$; b) $4^2 \cdot 4^3$; c) $\frac{4^3}{4^4}$; d) $(4^2)^3$

5. a) $\frac{3^2 \cdot 6^3}{3^4 \cdot 6^4}$; b) $\frac{10^2 \cdot 6^3}{3^{-1} \cdot 6^4}$; c) $\frac{2^8 \cdot 2^{-5}}{2^{-3} \cdot 2^4}$

6. a) $\frac{4^2 \cdot 6^3}{3^3 \cdot 8^2}$; b) $\frac{3^4}{1{,}5^4} + 3^8 \cdot 3^{-6}$; c) $\frac{3^{-2}}{3^{-4}}$

7. a) $\frac{(8^4)^3}{64^3}$ b) $3^{-6} : (3 \cdot 3 \cdot 3)^{-2}$

8. a) $\left(\frac{28 \cdot 2^{-3}}{4 \cdot 2^{-4}}\right)^2$ b) $\left(\frac{7^3 - 3{,}5^2}{7^3 \cdot 2^2}\right)^{-1}$

9. Wie viele Speicherzellen können mit 8 Adressleitern bei 8 Datenleitern adressiert werden?

10. Beim Speicher **Bild 1** ist D7 unterbrochen. Welche Zahlen können mit D0 bis D6 noch dargestellt werden?

11. Die Adressleiter A18 und A19 sind unterbrochen (**Bild 1**). Wie viele Speicherzellen können noch benutzt werden?

1.3 Rechnen mit Wurzeln

Beim Wurzelziehen oder Radizieren[1] zerlegt man eine Zahl *a* in eine mögliche Anzahl *n* gleicher Faktoren. Der Faktor ist die Wurzel *c*.

Wurzeln haben bei geradem Exponenten positives Vorzeichen, bei ungeradem Exponenten ist auch ein negatives Vorzeichen möglich.

> **Beispiel 1:** Quadratwurzel bestimmen
> Zerlegen Sie die Zahl $a = 36$ in $n = 2$ gleiche Faktoren und geben Sie die Wurzel an.
>
> *Lösung:*
> $36 = \mathbf{6 \cdot 6} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$
> ($\sqrt{36}$ sprich: Wurzel aus 36)

Die 2. Wurzel heißt auch Quadratwurzel. Bei allen Wurzeln außer der Quadratwurzel müssen die Wurzelexponenten angegeben werden.

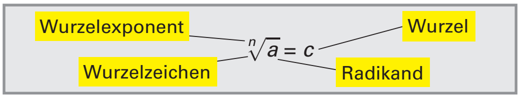
> **Beispiel 2:** 3. Wurzel berechnen
> Berechnen Sie die 3. Wurzel aus 27.
>
> *Lösung:*
> $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$
> ($\sqrt[3]{27}$ sprich: Dritte Wurzel aus 27)

Wurzeln können auch als Potenzen geschrieben werden. Der Radikand erhält dabei als Exponent den Kehrwert des Wurzelexponenten. Für die Berechnung von in Potenzen umgewandelten Wurzeln gelten die Potenzrechenregeln.

> **Beispiel 3:** Potenzwert berechnen
> Wandeln Sie $\sqrt[6]{74}$ in eine Potenz um und berechnen Sie.
>
> *Lösung:*
> $\sqrt[6]{74} = 74^{\frac{1}{6}} = 74^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \left(74^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{74}} = \mathbf{2{,}049}$

Quadratwurzeln berechnet man mit dem Taschenrechner. Zur Ermittlung der Stellenzahl der Wurzel zerlegt man die Radikanden in einen Faktor und eine Zehnerpotenz mit *geradzahliger* Hochzahl.

> Ist der Radikand ein Summenterm, so muss dieser zuerst berechnet und anschließend die Wurzel gezogen werden.



$$\sqrt[n]{a} = c$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

a, b beliebige Zahlen
m, n Exponenten
| | Kurzzeichen für Betrag

Tabelle 1: Vorzeichen von Wurzeln

Wurzelart	Wurzelvorzeichen	Beispiel
Wurzelexponent geradzahlig, Radikand positiv	+	$\sqrt{36} = +6$
Wurzelexponent ungerade, Radikand positiv	+	$\sqrt[3]{27} = +3$ da $(+3)^3 = +27$
Wurzelexponent ungerade, Radikand negativ	−	$\sqrt[3]{-27} = -3$ da $(-3)^3 = -27$

Aufgaben zu 1.3

Berechnen Sie.

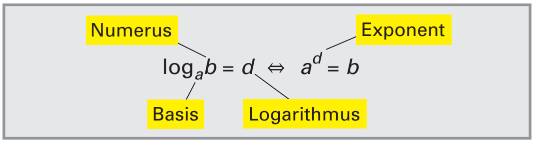
1. a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{2500}$ c) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{1600}$
2. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{3600}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{900}$
3. a) $\sqrt{4240}$ b) $\sqrt{68\,775}$ c) $\sqrt{455\,870}$ d) $\sqrt{30428}$
4. a) $\sqrt{6540}$ b) $\sqrt{41\,433}$ c) $\sqrt{867\,654}$ d) $\sqrt{3422}$
5. a) $\sqrt{3^2 + 5^2}$ b) $\sqrt{3{,}5^2 + 4{,}2^2}$ c) $\sqrt{2^2 + 2{,}5^2}$
6. a) $\sqrt{5^2 + 2^2}$ b) $\sqrt{4{,}2^2 + 5{,}3^2}$ c) $\sqrt{2{,}5^2 + 3^2}$
7. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{17}$ c) $\sqrt{16} : \sqrt{4}$
   d) $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5}$ e) $(\sqrt{5})^3$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
8. a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt{25} : \sqrt{5}$
   d) $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8}$ e) $(\sqrt{7})^3$ f) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$

---

[1] lat. radix = Wurzel

1.4 Logarithmen

1.4.1 Rechenregeln, natürlicher und binärer Logarithmus



$$\log_a b = d \Leftrightarrow a^d = b$$

Der Logarithmus (von griech. logos = Verhältnis und griech. arithmós = Zahl) ist der Exponent, mit welcher man die Basis *a* potenzieren muss, um den Numerus *b* (lat. numerus = Zahl) zu erhalten. $d = \log_a b$ heißt: *d* ist der Logarithmus von Numerus *b* zur Basis *a*.

Beispiel 1: Beliebige Basis
Berechnen Sie den Logarithmus zur Basis *a* von $c = a^n$.
Lösung:
$\log_a c = \log_a a^n = n$
($\log_a c$ sprich: Logarithmus zur Basis *a* von *c*)

Beispiel 2: Logarithmus zur Basis 10
Berechnen Sie $\log_{10} 0{,}01$.
Lösung:
$0{,}01 = 10^{-2} \Rightarrow \log_{10} 0{,}01 = \mathbf{-2}$

Natürliche Logarithmen, z. B. ln 5, haben die Basis e = 2,718... Man kann sie meist direkt dem Taschenrechner entnehmen.

Binäre Logarithmen, z. B. lb 3, haben die Basis 2. Man kann alle Logarithmen untereinander umrechnen.

Beispiel 3: Logarithmus zur Basis 2
Bestimmen Sie den binären Logarithmus der Zahl 32,6.
Lösung:
Mit dem Taschenrechner ermittelt man lg 32,6 = 1,5132;
$\Rightarrow \mathrm{lb}\, 32{,}6 = 3{,}3219 \cdot 1{,}5132 = \mathbf{5{,}0268}$

Aufgaben zu 1.4.1

Ermitteln Sie die natürlichen Logarithmen.

1. a) ln 12 b) ln 24 c) ln 47 d) ln 86 e) ln 96
2. a) ln 35 b) ln 21 c) ln 56 d) ln 75 e) ln 89

Bestimmen Sie die binären Logarithmen.

3. a) lb 12 b) lb 35 c) lb 2 d) lb 8 e) lb 65
4. a) lb 5 b) lb 33 c) lb 7 d) lb 69 e) lb 6

Rechenregeln für Logarithmen

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a (c^m) = m \cdot \log_a c$$

$$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \log_a c$$

Die Rechenregeln gelten für $a > 1$ und $c > 0$ und $d > 0$.
$\log_a 0 = -\infty$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

Durch Logarithmieren werden Multiplikationen zu Additionen, Divisionen zu Subtraktionen, Potenzrechnungen und Wurzelrechnungen zu Multiplikationen.

Umrechnungen

$\log_{10} x = \lg x$ $\log_2 x = \mathrm{lb}\, x$ $\log_e x = \ln x$

Beispiel für $a = 2$:

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$ $\mathrm{lb}\, x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

e	Euler'sche Zahl ≈ 2,718 281 828 459 045 235 ...
ln	natürlicher Logarithmus, Basis e ≈ 2,718
lg	Zehnerlogarithmus, Basis 10
lb	binärer Logarithmus, Basis 2

Rechnen Sie die Dezimalzahlen in natürliche Logarithmen um.

5. a) 0,3577 b) 2,4689 c) 1,6643 d) 3,7712
6. a) 0,9934 b) 1,7832 c) 4,2231 d) 0,2121

Rechnen Sie die natürlichen Logarithmen in Zehnerlogarithmen um.

7. a) 3,4012 b) 1,45 c) 4,7274 d) 1,7918
8. a) 0,3478 b) 1,6094 c) 6,0162 d) 3,4012

Rechnen Sie die Zehnerlogarithmen in binäre Logarithmen um.

9. a) 1,6551 b) 2,7681 c) 0,3324 d) 0,7455
10. a) 0,0917 b) 2,6287 c) 1,3424 d) 0,6800

1.4.2 Zehnerlogarithmen

Die Zehnerlogarithmen, z. B. lg 2, haben die Basis 10. Man entnimmt sie dem Taschenrechner mit der Taste `log`.

In der Elektronik benötigt man zur Darstellung von Kennlinien oft logarithmische Maßstäbe, um einen großen Zahlenbereich zu umfassen. Der Abstand eines beliebigen Wertes *x* vom Anfangspunkt der Achse lässt sich berechnen. Die Zusammenhänge zeigt **Bild 1**.

> Logarithmen dienen zur Darstellung großer Zahlenbereiche.

Beispiel 1: Logarithmische Einteilung
Teilen Sie eine Strecke von 5 cm von 1 bis 10 im logarithmischen Maßstab.

Lösung:

Man sucht die Zehnerlogarithmen von 1 bis 10 und multipliziert sie jeweils mit der Länge der gewählten Strecke. Die sich ergebenden Werte trägt man vom Anfang der Strecke aus ab und beschriftet die Punkte mit 1 … 10 **(Bild 2)**.

> Durch Einteilen einer Strecke in
> **3 Teile – 4 Teile – 3 Teile**
> erhält man eine logarithmische Teilung für die Werte **1, 2, 5** und **10 (Bild 3)**.

Aufgaben zu 1.4.2

Berechnen Sie.

1. a) lg 15 b) lg 23 c) lg 41 d) lg 86 e) lg 87
2. a) lg 26 b) lg 68 c) lg 77 d) lg 96 e) lg 240
3. a) lg 0,5 b) lg 3,5 c) lg 6,8 d) lg 0,043
4. a) lg 0,7 b) lg 8,7 c) lg 5,925 d) lg 0,0084
5. Teilen Sie eine Strecke von 16 cm im logarithmischen Maßstab von 1 bis 10 000.
6. Stellen Sie eine logarithmische Teilung von 1 bis 100 000 auf einer Strecke mit der Länge von 15 cm her.
7. Welchen Wert l_x in cm hat der Punkt $x = 50$, wenn der Anfangswert $x_A = 10$, Endwert $x_E = 150$ und $l_{10} = 8$ cm sind?

$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\lg x = 0{,}4343 \cdot \ln x$$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$l_x = l_{10} \cdot \lg \frac{x}{x_A}$$

lg	Zehnerlogarithmus
ln	natürlicher Logarithmus
l_x	Abstand des Wertes *x* von x_A
l_{10}	Abstand für den Faktor 10
x	Zahlenwert an der Achse
x_A	Zahlenwert am Anfang der Achse

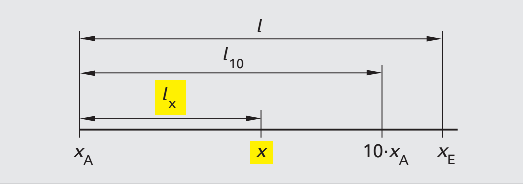


Bild 1: Logarithmische Teilung

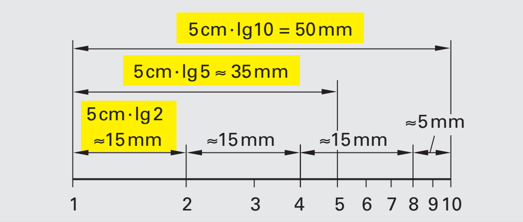


Bild 2: Längeneinteilung bei logarithmischer Teilung

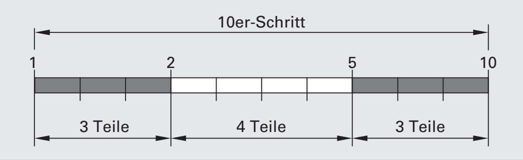


Bild 3: Maßstab zum Zeichnen

8. Welchen Wert l_x in cm hat der Punkt $x = 0{,}04$ einer Achsteilung, wenn der Endwert $x_E = 0{,}1$ ist? Anfangswert $x_A = 0{,}01$, $l_{10} = 10$ cm.
9. Der Wert x_E einer Achsteilung entspricht 0,3. Sein Abstand vom Achsanfang mit $x_A = 0{,}01$ beträgt 9,54 cm. Wie groß ist l_{10}?
10. Bei einer Achsteilung ist $l_{10} = 8$ cm und entspricht dem Endwert 0,5. Welchem Wert *x* entspricht $l_x = 6{,}23$ cm ($x_A = 0{,}05$)?

1.4.3 Logarithmische Darstellung, Linearisieren

Durch logarithmische Teilung der Achsen können mehrere Zehnerpotenzen einer Kennlinie übersichtlich dargestellt werden.

Bild 1 zeigt die Kennlinie eines lichtabhängigen Widerstandes (LDR) in doppelt logarithmischer Darstellung. **Bild 2** zeigt die Linearisierung durch Logarithmierung, links linearer, rechts doppelt logarithmischer Maßstab.

> Logarithmisch geteilte Achsen haben keinen Nullpunkt.

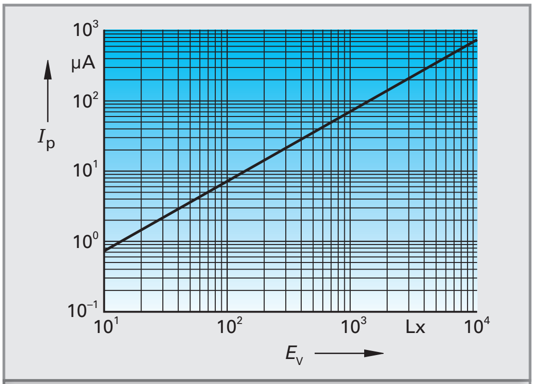


Bild 1: Kennlinie lichtabhängiger Widerstand in doppelt logarithmischer Darstellung

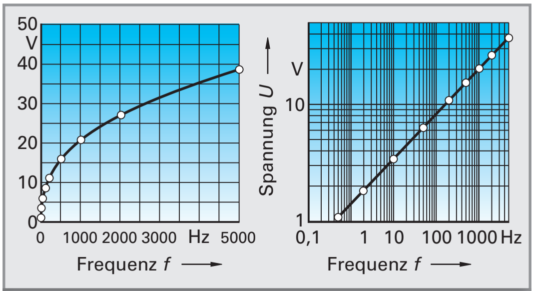


Bild 2: Linearisierung einer Kennlinie

Beispiel 1: LDR–Stromstärke ablesen

Welcher Strom I_p fließt bei einer Beleuchtungsstärke von 10^3 lx nach **Bild 1**?

Lösung:

Abgelesen aus Kennlinie: I_p = **80 µA**

Aufgaben zu 1.4.3

1. Lesen Sie die jeweils zugehörige Beleuchtungsstärke nach **Bild 1** ab für a) I = 200 µA, b) I = 5 µA.
2. Lesen Sie die jeweils zugehörige Stromstärke nach **Bild 1** ab für a) E = 100 lx, b) E = 2000 lx.
3. Lesen Sie den jeweils zugehörigen Spannungswert nach **Bild 2** ab für a) f = 1000 Hz, b) f = 500 Hz
4. Lesen Sie die jeweils zugehörige Frequenz nach **Bild 2** ab für a) U = 30 V, b) U = 5 V.

1.5 Kehrwert, Prozentrechnen

$$1\,\% = \frac{1}{100} \cdot G \qquad \frac{p}{100} = \frac{W}{G}$$

%	Prozent	W	Prozentwert
p	Prozentsatz	G	Grundwert

Mit der Kehrwerttaste $\boxed{1/x}$ oder $\boxed{x^{-1}}$ wird der Kehrwert der zuletzt eingegebenen Zahl bzw. des zuletzt ermittelten Zwischenergebnisses gebildet.

Mit der Tastfolge „Grundwert $\boxed{\times}$ Prozentsatz $\boxed{\%}$“ wird der Prozentwert ermittelt.

Aufgaben zu 1.5

Berechnen Sie

1. a) 13,82 + 1,85 + 1,85 + 1,85 + 1,85 + 1,85
   b) 64,8 – 2,45 – 2,45 – 2,45 – 2,45
2. a) 35 : 7 b) 83 : 7 c) 18,3 : 7
   d) 65,75 : 7 e) –43,2 : 7 f) 0,7732 : 7
3. Mit der Konstantenautomatik sind die Potenzwerte zu berechnen für $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^9$.
4. Eine Energiesparlampe kostet 1,35 €.
   Wie viel kosten
   a) 3 b) 7 c) 9 d) 13 e) 18 f) 23
   Energiesparlampen?
5. Für 1,– € erhält man 1,569 $. Wie viele Dollar erhält man für
   a) 150,– € b) 380,– € c) 25,– €
   d) 420,– € e) 1250,– €?
6. Ein Pkw verbraucht auf 100 km durchschnittlich 9,8 l Benzin. Wie viel Benzin braucht er für
   a) 20 km b) 180 km c) 65 km
   d) 285 km e) 1480 km?

Berechnen Sie

7. a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{7+4-3}$
8. a) $\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{20} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15}$
9. a) 14 % von 458 b) 162 % von 384,– €
10. a) 28,5 % von 64 N b) 18,5 % von 680 m^2

2 Rechnen mit Größen

2.1 Begriffe beim Rechnen mit Größen

Physikalische Größen, z.B. Länge, Masse, Energie, Stromstärke, sind messbare Eigenschaften von Gegenständen, physikalischen Zuständen oder Vorgängen. Der spezielle Wert einer Größe wird *Größenwert* und in der Messtechnik *Messwert* genannt.

> Der spezielle Wert einer Größe ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

Das Malzeichen (·) wird weggelassen, wie es beim Rechnen mit Buchstaben meist üblich ist.

Einheiten sind oft aus einem Fremdwort entstanden oder auch zu Ehren von Wissenschaftlern benannt, z.B. das Volt[1].

Einheitenzeichen verwendet man zur Abkürzung der Einheit **(Tabelle 1)**. Einheitenzeichen sind senkrecht gedruckt **(Bild 1)**.

Formelzeichen verwendet man zur Abkürzung der Größen, insbesondere bei Berechnungen. Als Formelzeichen verwendet man Großbuchstaben oder Kleinbuchstaben des lateinischen oder des griechischen Alphabets, bei Bedarf mit einem angehängten, tiefgesetzten Zeichen (*Index*), z.B. U_1 für die Spannung am Eingang. Formelzeichen sind *kursiv* (schräg) gedruckt, Indexzeichen aufrecht.

> Formelzeichen werden im Buch *kursiv* geschrieben, Einheitenzeichen aufrecht.

Ein Formelzeichen in einer eckigen Klammer bedeutet „Einheit von ...“. $[l]$ bedeutet „Einheit der Länge“, z.B. $[l]$ = m.

Die meisten Formelzeichen, Einheiten und Einheitenzeichen sind genormt **(Tabelle 1)**. *Basisgrößen* sind 7 festgelegte Größen, aus denen alle anderen Größen abgeleitet wurden.

Aufgaben zu 2.1

1. Geben Sie von folgenden Angaben die physikalischen Größen in Worten an.
   a) U = 220 V b) I = 16 A c) t = 70 s
   d) l = 80 m e) R = 80 Ω

Tabelle 1: Wichtige Größen

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
Basisgrößen (Auswahl)			
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Abgeleitete Größen (Beispiele)			
Frequenz	f	Hertz	Hz
Kraft	F	Newton	N
Leistung	P	Watt	W
Spannung	U	Volt	V
Widerstand	R	Ohm	Ω

Bild 1: Darstellung eines Messwertes

> Beim Rechnen mit Größen müssen die Einheiten angegeben werden, auch bei der Zwischenrechnung.

2. Geben Sie von folgenden Angaben die Einheiten in Worten an.
   a) U = 1500 V b) I = 0,7 A c) m = 70 kg
   d) R = 750 Ω e) t = 420 s

3. Schreiben Sie die Sätze a) und b) nach dem folgenden Muster vollständig:
   In einer Glühlampe fließt ein Strom von 0,5 A.
   a) ______ Diode _______ Spannung von 1,5 __
   b) ______ Schichtwiderstand ______ Strom von 0,6 A.

4. Wie heißen die Sätze a) und b) nach dem folgenden Muster vollständig?
   Durch eine Spule fließt ein Strom von 0,3 A.
   a) _______ Kondensator liegt _________ 120 V.
   b) _______ Diode _____________________ 0,2 A.

---

[1] nach Alessandro Volta, ital. Physiker, 1745 bis 1827

2.2 Umrechnen der Einheiten

Vorsätze. Ist der Zahlenwert einer Größe sehr klein, z.B. bei 0,000002 A, oder aber sehr groß, z.B. bei 20000 V, so verwendet man einen Vorsatz zur Einheit. Dieser gibt eine Zehnerpotenz an, mit welcher der Zahlenwert malzunehmen ist (**Tabelle 1**).

Beispiel 1: Widerstand
100 kΩ sind in Ω auszudrücken.

Lösung:

100,00000... kΩ = 100000 Ω

Beispiel 2: Strom
50000 µA sind in A auszudrücken.

Lösung:

50000 µA = 050,0 mA = **0,050 A**

Zur Vermeidung von Verwechslungen von Vorsatz m (Milli) mit Einheit m (Meter) wird die Einheit m (Meter) stets an das Ende gesetzt. Am bedeutet also Ampere mal Meter, mA bedeutet Milliampere.

Soll eine aus Einheiten zusammengesetzte Einheit, z.B. km/h (h von lat. hora = Stunde), in eine aus anderen Einheiten zusammengesetzte Einheit umgerechnet werden, so rechnet man die gegebenen Einheiten einzeln nacheinander um. Dabei multipliziert man mit Brüchen vom Wert 1, z.B. $\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}$, die so gewählt sind, dass die unerwünschte Einheit herausgekürzt wird.

Beispiel 3: Geschwindigkeit

Eine Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Drücken Sie diese in m/s aus.

Lösung:

$72\,\text{km/h} = \frac{72\,\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}} \cdot \frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}} = \mathbf{20\,m/s}$

Aufgaben zu 2.2

1. Wandeln Sie um.
   a) 44200 mV in V b) 0,002 A in mA
   c) 220 µV in V d) 88000 µV in mV
2. Wandeln Sie um.
   a) 7,05 kV in V b) 880 mΩ in Ω
   c) 840 µA in mA d) 825 ns in s
3. Der Eingangswiderstand eines Feldeffekttransistors beträgt 10^{10} Ω. Wie viel MΩ sind das?

Tabelle 1: Vorsätze zu Einheiten, Vorsatzzeichen

Exponent > 1	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo
	E	P	T	G	M	k
	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}
Exponent < 1	Milli	Mikro	Nano	Piko	Femto	Atto
	m	µ	n	p	f	a
	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

4. Ein Isolationswiderstand beträgt 820 Millionen Ω. Wie viel kΩ sind das?
5. Bei einem Kurzschluss treten 8020 A auf. Wie viel kA sind das?
6. Die Leistung eines Thermoelements berechnet man zu $18 \cdot 10^{-4}$ W. Wie viel mW sind das?

2.3 Addition und Subtraktion

Man kann nur Größen mit gleicher Einheit addieren oder subtrahieren. Dabei wandelt man diese Größen so um, dass ihre Einheiten die gleichen Vorsätze haben.

Beispiel 4: Addition
20 mV + 1,5 V = 0,02 V + 1,5 V = **1,52 V**
oder
20 mV + 1,5 V = 20 mV + 1500 mV = **1520 mV**

Für die Subtraktion gilt das Kommutativgesetz ebenfalls, man muss aber die Größen zusammen mit ihren Vorzeichen vertauschen.

Beispiel 5: Subtraktion
12 V – 4 V + 2 V = 12 V + 2 V – 4 V = **10 V**

Aufgaben zu 2.3

Addieren Sie.

1. a) 233 V und 1,1 kV b) 0,38 A und 400 mA
   c) 144 Ω und 0,12 kΩ
2. a) 2330 mA und 1,2 A b) 220 mV und 0,3 A
   c) 27 cm und 1220 mm