Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Teil 2

Teil 3

Teil 4

Klasse 11,1 - Oberthema B

Differenzialrechnung

Arbeitsblatt 01: Änderungsrate

Aufgabe 1

$$m = \frac{f(2{,}01\,s) - f(2\,s)}{2{,}01\,s - 2\,s} = \frac{16{,}16\,m - 16\,m}{0{,}01\,s} = 16\ {}^{m}/_{s}$$

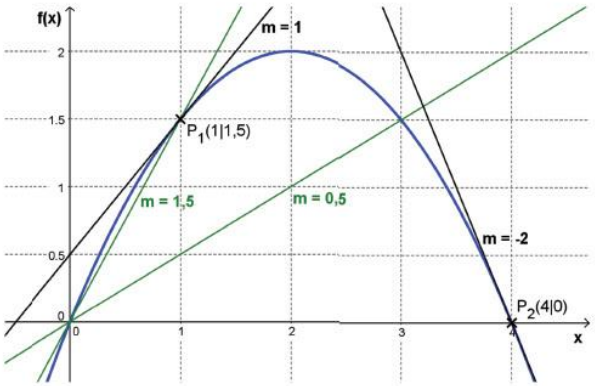
$$m = \frac{f(6{,}01\,s) - f(6\,s)}{6{,}01\,s - 6\,s} = \frac{144{,}48\,m - 144\,m}{0{,}01\,s} = 48\ {}^{m}/_{s}$$

$$m = \frac{f(6\,s) - f(2\,s)}{6\,s - 2\,s} = \frac{144\,m - 16\,m}{4\,s} = 32\ {}^{m}/_{s}$$

$$100\,m = 4\,{}^{m}/_{s^2} \cdot t^2 \ \rightarrow\ t^2 = 25\,s^2 \ \rightarrow\ t = 5\,s$$

$$m = \frac{f(5{,}01\,s) - f(5\,s)}{5{,}01\,s - 5\,s} = \frac{100{,}4\,m - 10\,m}{0{,}01\,s} = 40\ {}^{m}/_{s}$$

Aufgabe 2



$$m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1{,}5 - 0}{1} = 1{,}5$$

$$m = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{1{,}5 - 0}{3} = 0{,}5$$

$$m = \frac{f(1{,}01) - f(1)}{1{,}01 - 1} = \frac{1{,}51 - 1{,}5}{0{,}01} = 1$$

$$m = \frac{f(4{,}01) - f(4)}{4{,}01 - 4} = \frac{-0{,}02 - 0}{0{,}01} = -2$$

Aufgabe 3

Die Beschleunigung gibt an, wie sich die Geschwindigkeit des Motorrads ändert. Sie ist also die Änderungsrate der Geschwindigkeit oder eben die *„Änderungsrate der Änderungsrate“* des Weges. Schaut man sich die momentanen Geschwindigkeiten nach jeder vollen Sekunde an, sieht man, dass die Geschwindigkeit immer um 8 m/s zunimmt. Die Änderungsrate der Geschwindigkeit und somit die Beschleunigung entspricht daher 8 m/s pro Sekunde.

Aufgabe 4 und Aufgabe 5:

Erklärungen siehe Video

Arbeitsblatt 02: Ableitung mit Differenzenquotient

Aufgabe 1

$$f'(-2) = \frac{f(-1{,}99) - f(-2)}{-1{,}99 - (-2)} = \frac{0{,}04 - 0}{0{,}01} = 4$$

x-Methode:

$$f'(-2) = \frac{(-x^2 + 4) - (-(-2)^2 + 4)}{x - (-2)} = \frac{-x^2 + 4 - (-4 + 4)}{x + 2} = \frac{-x^2 + 4}{x + 2}$$

Polynomdivision: $(-x^2 + 4) : (x + 2) = -x + 2$

Einsetzen der Stelle $x_0 = -2$ führt zu $f'(-2) = -x + 2 = -(-2) + 2 = 4$

Beide Ansätze liefern das gleiche Ergebnis.

Aufgabe 2

$x_{\text{nicht diff.bar}} = \{-3; 1; 2; 3; 4, 5\}$

Aufgabe 3

$$f'(x_0) = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{x_0 + h - x_0} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$$

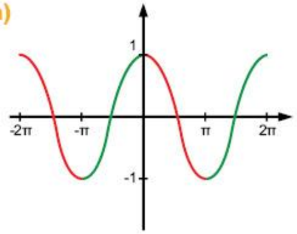
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 = 3x_0^2$$

Diese Vorgehensweise liefert eine allgemeine Lösung, mit der an jeder beliebigen Stelle x_0 in der gegebenen Funktion die Steigung bestimmt werden kann.

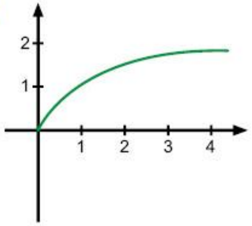
Aufgabe 3

rot ist monoton fallend
grün ist monoton steigend

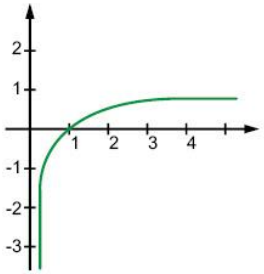
a)



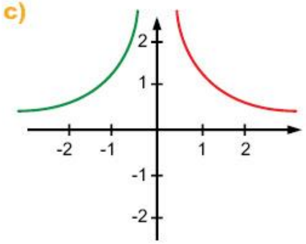
b)



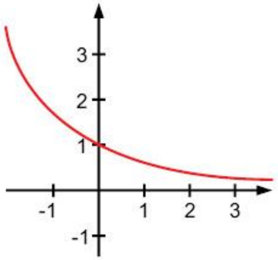
d)



c)



e)



Arbeitsblatt 02: Lokale Extremwerte

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 4x^3 - 2x \qquad 0 = 2x(2x^2 - 1)$

$x_{E1} = 0$ und $x_E^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x_{E2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \qquad 0 = 2x - \frac{1}{x^2}$

$2x_E = \frac{1}{x_E^2} \rightarrow x_E^3 = \frac{1}{2} \rightarrow x_E = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79$

c) $f'(x) = -\cos(x) \qquad 0 = -\cos(x) \qquad 0 = \cos(x)$

$x_E = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Aufgabe 2

$f'(x) = x^4 + 3x^3 - 17x^2 - 39x - 20$ und $f''(x) = 4x^3 + 9x^2 - 34x - 39$

Einsetzen der x_E:

$f'(x_{E1} = -5) = (-5)^4 + 3 \cdot (-5)^3 - 17 \cdot (-5)^2 - 39 \cdot (-5) - 20 = 0$

$f'(x_{E2} = -1) = 0$

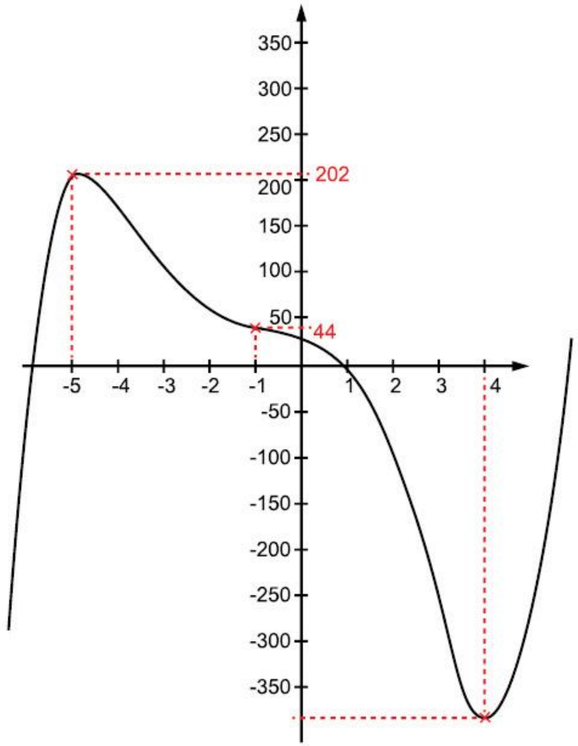
$f'(x_{E3} = 4) = 0$

$f''(x_{E1} = -5) = 4 \cdot (-5)^3 + 9 \cdot (-5)^2 - 34 \cdot (-5) - 39 = -144 < 0$, daher Hochpunkt

$f''(x_{E2} = -1) = 0$

$f''(x_{E3} = 4) = 225 > 0$, daher Tiefpunkt

Da auch die zweite Ableitung an der Extremstelle x_{E2} null ist, ist es plausibel, dass ein Extrempunkt in der ersten Ableitung vorliegt. Dieser Extrempunkt berührt die x-Achse, schneidet sie aber nicht. Es handelt sich folglich um einen Berührpunkt in der ersten Ableitung, wodurch kein Vorzeichenwechsel der Steigung erfolgt. Die Steigung der Funktion f(x) wird also null und nimmt dann wieder mit dem gleichen Vorzeichen betragsmäßig zu (vgl. Monotonie/strenge Monotonie im vorherigen Kapitel; siehe auch nächstes Kapitel „Wende- und Sattelpunkt").



Klasse 11,2 - Oberthema E

Integralrechnung 2

Arbeitsblatt 01: Rauminhalte von Rotationskörper

Aufgabe 1

$$V = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(e^{-\frac{1}{2}x} + 0{,}5\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x} + 0{,}25\right) dx = \pi \cdot \left[-e^{-x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + 0{,}25x\right]_{-4}^{4}$$

$$V = \pi \cdot \left(\left(-e^{-4} - 2e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} + 0{,}25 \cdot 4\right) - \left(-e^{-(-4)} - 2e^{-\frac{1}{2}\cdot(-4)} + 0{,}25 \cdot (-4)\right)\right)$$

$$V = \pi \cdot \left((-e^{-4} - 2e^{-2} + 1) - (-e^{4} - 2e^{2} - 1)\right) = \pi \cdot (-e^{-4} - 2e^{-2} + e^{4} + 2e^{2} + 2) \approx 223{,}33$$

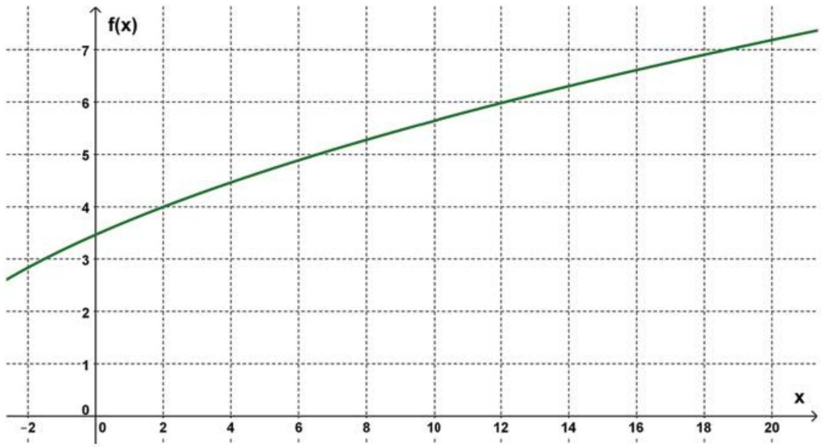
Aufgabe 2

a)

$$V = 2000\,\text{cm}^3 = \pi \cdot \int_0^{20} \left(\sqrt{qx + 12}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{20} qx + 12\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}qx^2 + 12x\right]_0^{20}$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot q \cdot 20^2 + 12 \cdot 20\right)$$

$2000 = \pi \cdot (200q + 240) \quad \rightarrow \quad \mathbf{q = 1{,}98}$



b)

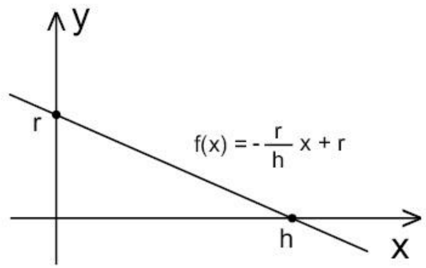
Formel für die Oberfläche erstellen, analog zum Volumen auf die Kreisformeln zurückgreifen; Oberfläche entspricht den über die Höhe der Vase aufsummierten Umfängen, also das Integral der „Umfangsfunktion“:

$$O = 2\pi \cdot \int_0^{20} \sqrt{1{,}98x + 12}\,dx = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{1{,}98} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1{,}98x + 12)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{20} = 696{,}21$$

Die Stammfunktion ist vielleicht nicht ganz leicht zu bestimmen. Dafür muss man evtl. schon die folgenden Kapitel zu Integrationsregeln bearbeiten. Mit ein bisschen ausprobieren und nachdenken, sollte es jedoch möglich sein, auch so auf das Ergebnis zu kommen.

Aufgabe 3

Kegel als Rotationskörper lässt sich durch eine Gerade beschreiben wie folgt:



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(-\frac{r}{h}x + r\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 - \frac{2r^2}{h}x + r^2\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}x^3 - \frac{r^2}{h}x^2 + r^2x\right]_0^h$$

$$V = \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}h^3 - \frac{r^2}{h}h^2 + r^2h\right) - 0\right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}r^2h - r^2h + r^2h\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{q.e.d.}$$

Arbeitsblatt 02: Mittelwerte von Funktionen

Aufgabe 1

$$\overline{m} = 4 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} 2t^2 - 4t + 1\,dt = \frac{1}{t_2 - 0}\int_0^{t_2} 2t^2 - 4t + 1\,dt = \frac{1}{t_2}\left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t\right]_0^{t_2}$$

$$= \frac{1}{t_2}\left(\left(\frac{2}{3}t_2^3 - 2t_2^2 + t_2\right) - 0\right) = \frac{2}{3}t_2^2 - 2t_2 + 1$$

$$4 = \frac{2}{3}t_2^2 - 2t_2 + 1 \quad \rightarrow \quad 0 = t_2^2 - 3t_2 - 4{,}5 \quad \rightarrow t_2 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4{,}5}$$

nur ein positiver Wert für t_2 ist möglich: $\mathbf{t_2 = 4{,}1}$ (in Sekunden)

Arbeitsblatt 03: Kugeln und Ebenen

Aufgabe 1

Lotvektor zu Ebenengleichung E : $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = b$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d = \left| \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_2 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

$$6 = \left| \frac{1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - b}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \right|$$

$$6 = \left| \frac{1 - b}{\sqrt{9}} \right|$$

$$18 = |1 - b| \quad \rightarrow \quad b = 19 \quad \text{oder} \quad b = -17$$

Aufgabe 2

Punkt auf Ebene: verschiedene Wege, entweder $|\vec{t} - \vec{m}|$ bestimmen oder einsetzen
hier Einsetzen leichter:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 + x_3^2 = 25 \rightarrow (4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 + 4^2 = 25 \rightarrow \textbf{stimmt}$$

Bestimmung der Tangentialeben ebenfalls auf zwei Arten möglich, entweder gemäß Formel oder Normalenvektor bestimmen. Formel leicht doch Rechenaufwand höher. Klassische Methode mit Normalenvektor lässt sich mit den bekannten Methoden gut schnell anwenden:

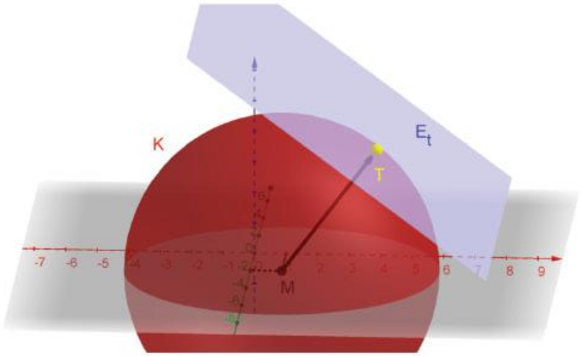
Tangentialebene liegt normal zur Strecke vom Mittelpunkt zum Berührpunkt T, entspricht Lot (vgl. Beispielaufgabe). Für Koordinatengleichung der Ebene den Normalenvektor bestimmen:

Normalenvektor/Lot: $\vec{n} = \overrightarrow{MT} = \vec{t} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Daraus Gleichung der Tangentialebene : $E_t: 3x_1 + 4x_3 = b$

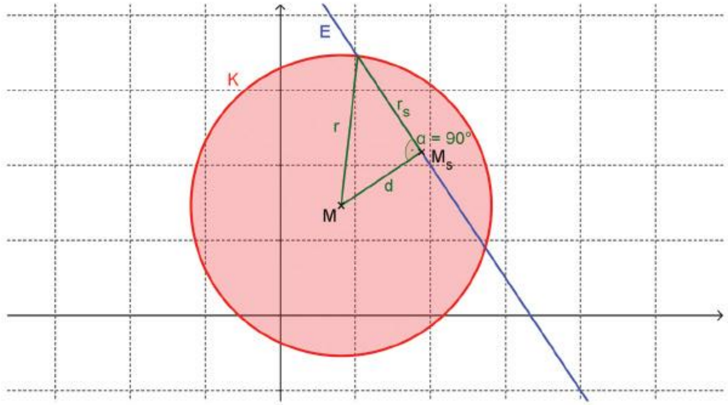
b bestimmen durch Einsetzen von T : $3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = b \quad \rightarrow \quad b = 28$

$$\mathbf{E_t: 3x_1 + 4x_3 = 28}$$



Aufgabe 3

Kugel in Schnittperspektive betrachten:



Deutlich erkennbar ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten r, r_s, d . Es gilt der Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck:

$$r^2 = r_s^2 + d^2$$
$$r_s = \sqrt{r^2 - d^2}$$

Arbeitsblatt 04: Polarebenen bei Kugeln und Geraden

Aufgabe 1

Zunächst Abstand zwischen Punkt P und Kugelmittelpunkt M bestimmen, Punkt P muss außerhalb liegen:

$$|\vec{p} - \vec{m}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Abstand ist größer als Radius der Kugel (r = 3) ; Punkt P als Pol annehmen.

$$E_p: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$$

$$E_p: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 9$$

$$E_p: \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 9$$

$$E_p: 3x_1 - 4x_2 = 2$$

Klasse 12,2 - Oberthema B

Prozesse und Matrizen

Arbeitsblatt 01: Prozesse mit Matrizen beschreiben

Aufgabe 1

a)

Wenn man alle Werte in der Tabelle addiert, muss man die Gesamtanzahl der Haushalte erhalten.

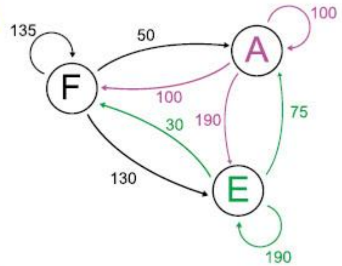
$m_{23} = 1000 - (135 + 100 + 30 + 50 + 100 + 130 + 190 + 190) = 75$

b)

Die 130 steht für die Anzahl der Kunden, die bislang Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen bezogen haben und im nächsten Jahr zu Strom aus erneuerbaren Energiequellen wechseln.

Die 30 steht für Kunden, die nach einem Jahr von Strom aus erneuerbaren Energien zu Strom aus fossilen Brennstoffen wechseln.

c)



d)

Um die Verteilung nach einem Zeitschritt (in diesem Fall ein Jahr) zu berechnen, müssen wir als erstes berechnen, wie groß die Anteile der wechselnden Kunden an der Gesamtanzahl der Kunden der einzelnen Sektoren (Fossil, Atom, Erneuerbar) sind. Daraus ergibt sich die Austauschmatrix. Diese wird im nächsten Schritt mit der Anfangsverteilung multipliziert und es ergibt sich die Verteilung nach einem Jahr:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{135}{315} & \frac{100}{390} & \frac{30}{295} \\ \frac{50}{315} & \frac{100}{390} & \frac{75}{295} \\ \frac{130}{315} & \frac{190}{390} & \frac{190}{295} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 315 \\ 390 \\ 295 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 225 \\ 510 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a)

$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 25 \\ 160 & 220 & 180 \\ 80 & 90 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

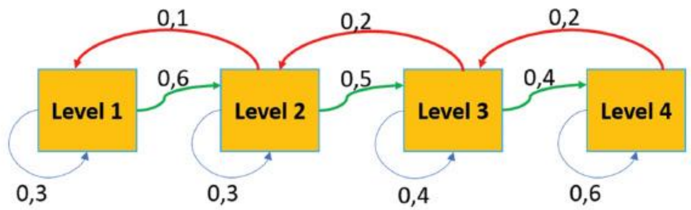
b)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 25 \\ 160 & 220 & 180 \\ 80 & 90 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28500 \\ 179400 \\ 75300 \end{pmatrix}$$

Gehäuse = 28.500 € Technik = 179.400 €

Montage = 75.300 € Gesamt = 283.200 €

Aufgabe 3



Als Matrix geschrieben:

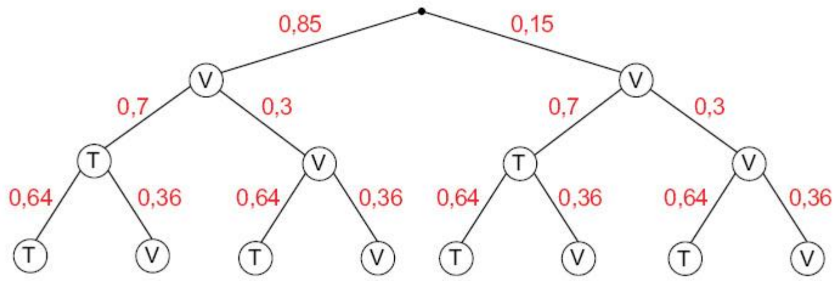
$$\vec{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 & 0,05 \\ 0,6 & 0,3 & 0,2 & 0,15 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_t$$

Startvektor $\vec{x}_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ somit $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,38 \\ 0,37 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0,088 \\ 0,293 \\ 0,373 \\ 0,246 \end{pmatrix}$

Der letzte Vektor zeigt die Wahrscheinlichkeiten, zu denen nach drei Spielrunden ein bestimmtes Level erreicht wird. Zu ca. 24,6 % hat man also bereits das vierte Level erreicht. Zu ca. 8,8 % und somit sehr unwahrscheinlich, befindet man sich wie zum Start im ersten Level.

Aufgabe 3

Wie immer starten wir mit dem passenden Baumdiagramm zu der Aufgabe, wobei ‚T‘ für ‚Treffer‘ und ‚V‘ für ‚Verschossen‘ stehen soll:



Hier ergibt sich als einziger Pfad an dem das Ereignis nicht erfüllt ist die Kette (V,V,V). Nun hätte man die Möglichkeit, anstatt aller Ereignispfade, einfach 1-P(V,V,V) zu berechnen.

$1 - P(V,V,V) = 1 - (0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}36) = 1 - 0{,}0162 = 0{,}9838 = 98{,}38\%$

Es ist also sehr wahrscheinlich, dass mindestens einer trifft.

Arbeitsblatt 04: Vierfeldertafel

Aufgabe 1

a) In der Tabelle siehst du die ergänzten Werte fettgedruckt. Rot = 38 Schüler finden das Schulsystem akzeptabel; grün = 100 befragte Personen finden das Schulsystem nicht akzeptabel; gelb = 114 Schüler wurden befragt; blau = 150 Personen wurden insgesamt befragt.

	A	$\bar{A}$	Summe
S	38	**76**	**114**
L	**12**	24	**36**
Summe	50	**100**	**150**

b) Wie viele Personen sind Schüler/innen **und** finden das Schulsystem ‚nicht akzeptabel‘? Ant.: 76 . Hier geht es um die sogenannte Schnittmenge $S \cap \bar{A} = 76$.

Wie viele Personen sind Lehrkräfte **oder** finden das Schulsystem akzeptabel? Ant.: 36 Lehrkräfte plus 38 Schüler, die das Schulsystem akzeptabel finden, aber keine Lehrer sind. Hier geht es um die sogenannte Vereinigungsmenge $L \cup \bar{A} = 74$.

c) $P(\bar{E}_2) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$; $\quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{24}{150} = 0{,}16$; $\quad P(E_1 \cup E_2) = \frac{36+76}{150} \approx 0{,}7466$

Aufgabe 2

a)

	F	$\bar{F}$	Summe
M	3.185	33.215	36.400
W	1.365	27.235	28.600
Summe	4.550	60.450	**65.000**

	F	$\bar{F}$	Summe
M	0,049	0,511	0,56
W	0,021	0,419	0,44
Summe	0,07	0,93	**1**

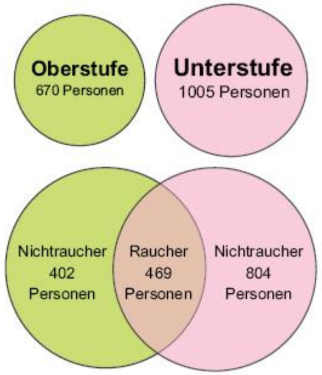
b) $P(M \cap \bar{F}) = 0{,}511$

c) $P(W \cup F) = 0{,}44 + 0{,}049 = 0{,}489$

Tiefergehende Erklärungen zur Schnitt- bzw. Vereinigungsmenge findest du im Video.

Aufgabe 3

O = Oberstufe; U = Unterstufe; R = rauchen



	R	$\bar{R}$	Summe
O	268	402	670
U	201	804	1005
Summe	469	1206	**1675**

Das Venn-Diagramm weist die Gruppe an Rauchern aus der Oberstufe und Unterstufe nicht separat aus.

Arbeitsblatt 05: Urnenmodelle

Aufgabe 1

Beim Kartenspielen ist die Reihenfolge der Karten auf der Hand normalerweise egal. Außerdem kann ein Element nicht doppelt auftreten. Also Modell 4: o.Z./o.R. mit n = 32 und k = 3. Anzahl Kombinationen = $\binom{n}{k} = \binom{32}{3} = \frac{32!}{3! \cdot (32-3)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.960$

Für Ereignis E = „Einen Drilling ausgeteilt bekommen“ gilt

E = {(7,7,7); (8,8,8); (9,9,9); (10,10,10); (B,B,B); (D,D,D); (K,K,K); (A,A,A)} . Die Anzahl der Ergebnisse, die in E enthalten sind, ist 8. Somit können wir über die Formel für Laplace-Wahrscheinlichkeiten die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen:

$P(E) = \frac{8}{4960} \approx 0{,}001613 = 0{,}1613\%$. Also besteht eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, einen Drilling ausgeteilt zu bekommen.

Aufgabe 3

$$A = \int_a^b 4x^2 + 7\,dx - \int_a^b 4x^2 + 2\,dx$$

$$= \left[\tfrac{4}{3}x^3 + 7x\right]_a^b - \left[\tfrac{4}{3}x^3 + 2x\right]_a^b$$

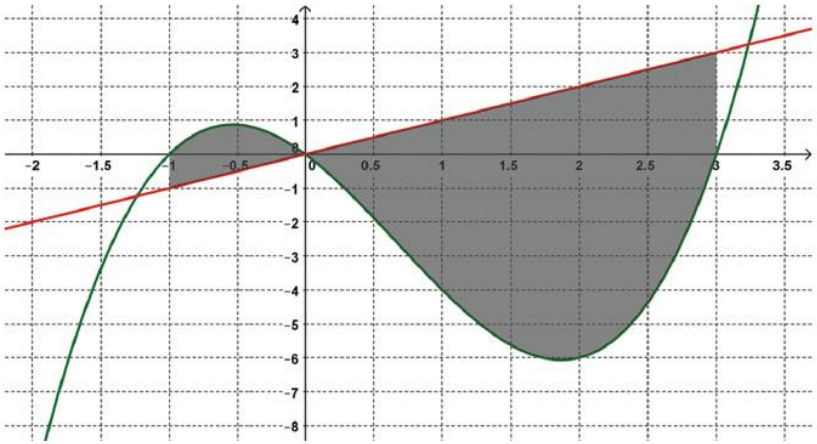
$$= \tfrac{4}{3}b^3 + 7b - \tfrac{4}{3}a^3 - 7a - \tfrac{4}{3}b^3 - 2b + \tfrac{4}{3}a^3 + 2a$$

$$= 7b - 7a - 2b + 2a = 5(b - a)$$

Arbeitsblatt 10: Flächen zwischen Graphen und Differenzfunktion

Aufgabe 1

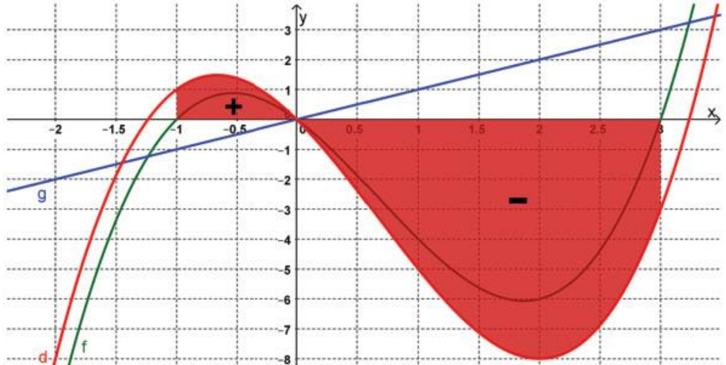
Die beiden gegebenen Funktionen mit gesuchter Fläche im Koordinatensystem:



Differenzfunktion:

$d(x) = f(x) - g(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x) - x = x^3 - 2x^2 - 4x$

Differenzfunktion im Koordinatensystem mit zu berechnender Fläche (in rot):



Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass auch die Differenzfunktion eine Nullstelle bzw. einen Vorzeichenwechsel hat (da zunächst f(x) größer ist und dann g(x)). Die Schnittstelle der beiden Funktionen ist die Nullstelle: $x_S^3 - 2x_S^2 - 3x_S = x_S$

Hier lässt sich die eine gesuchte Lösung direkt ablesen (die anderen beiden Schnittstellen liegen außerhalb des betrachteten Intervalls): $x_S = 0$

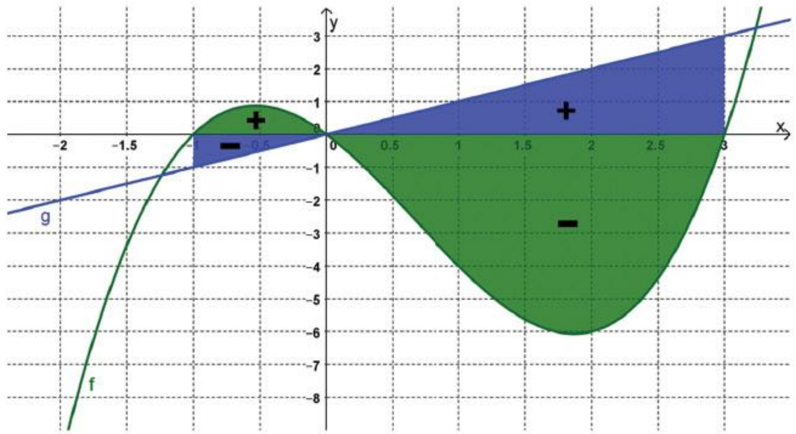
Somit wird das Integral bei $x_S = 0$ aufgeteilt in:

$$A = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 4x\,dx + (-1)\int_{0}^{3} x^3 - 2x^2 - 4x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{0}^{3} = \left(0 - \left(-\frac{13}{12}\right)\right) - \left(-\frac{63}{4}\right) = \frac{101}{6}$$

Aufgabenteil b)

Die graphische Aufteilung der Fläche:



a) P(X = 50) = 0,0576 Wir können die Wahrscheinlichkeit in der GeoGebra Tabelle ablesen, sie mit dem GTR (binompdf(365,1/7,50) ermitteln oder sie über die Formel von Bernoulli $P(X = 50) = \binom{365}{50} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{50} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)^{365-50} = 0{,}0576$ berechnen.

b) P(X ≤ 41) = 0,0523 Es heißt ja, an „weniger als 42 Tagen“. Daraus ergibt sich das Intervall [0; 42) bzw. [0; 41] weil X eine diskrete Zufallsvariable ist.
Mit der GeoGebra Tabelle wird es sehr mühsam, die Einzelwahrscheinlichkeiten für k = 0, 1, 2, 3, 4, … ,41 zu kumulieren (aufzusummieren). Daher empfiehlt sich der Einsatz des Taschenrechners: binomcdf(365,1/7,41) = 0,0523

c) „Mehr als 42 Tage“. Hierbei sollte man mit der Gegenwahrscheinlichkeit arbeiten. Mehr als 42 Tage bedeutet als Intervall [43; 365]. Dieses Intervall enthält die Werte für X, die das Ereignis erfüllen. Das Intervall [0; 42] enthält alle Werte, die das Ereignis nicht erfüllen. Daher rechne ich einfach 1 – F(42) bzw. 1 – binomcdf(365,1/7,42). Denn so rechnen man aus der Gesamtwahrscheinlichkeit ‚1‘ alle Einzelwahrscheinlichkeiten der Werte heraus, die das Ereignis nicht erfüllen.

$$P(X \geq 43) = 1 - P(X \leq 42) = 1 - binomcdf\left(365, \frac{1}{7}, 42\right) = 0{,}9284$$

d) $P(45 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 44) = binomcdf(60) - binomcdf(44)$

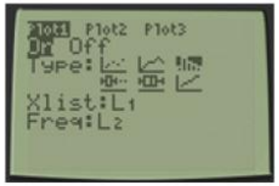
F(60) – F(44) = 0,7676

Ein Histogramm können wir auch mit dem GTR oder mit dem CAS zeichnen. Hier die Schritte für den GTR: 2nd – Stat Plot – On – Type: ‚Histogram‘ – L1 und L2

Dann gehst du auf Stat – Edit und füllst die Listen aus: Oben auf L1 gehen – Enter – 2nd list – OPS – seq – ausfüllen, wie auf Bild 3 - Enter - Enter

Dann gehst du auf L2 wie im Bild 4. 2nd – DISTR – Binompdf – Einstellungen wie in Bild 5 – paste - Enter

Nun noch die Window-Einstellungen so wählen, dass sie zu den Listen L1 und L2 passen (siehe Bild 6).



Aufgabe 2

X ~ binom(n = 8 ; π = $\frac{4}{9}$)

Du gehst beim GTR in den Bereich „Stat – Edit“. Dort füllst du die Liste L1 mit den möglichen Ergebnissen (k) aus. k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

In L2 führst du den Befehl „binompdf(8, 4/9, L1)“ aus. Bitte schaue dir das Video an, weil man es hier nur sehr rudimentär erklären kann.