

Theoretische Physik

Band 2A

Walter Greiner
Horst Stock

**Hydro-
dynamik**



Verlag Harri Deutsch

Theoretische Physik
Band 2A
Walter Greiner
Horst Stock
Hydrodynamik

Walter Greiner

Theoretische Physik

Band 1: Mechanik, Teil 1
Band 2: Mechanik, Teil 2
Band 3: Elektrodynamik
Band 4: Quantenmechanik, Teil 1: Einführung
Band 5: Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien
Band 6: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen
Band 7: Quantenelektrodynamik
Band 8: Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung
Band 9: Thermodynamik und Statistische Mechanik
Band 10: Quantenchromodynamik

Ergänzungsbände

Band 2 A: Hydrodynamik
Band 3 A: Spezielle Relativitätstheorie
Band 4 A: Quantentheorie, Spezielle Kapitel

In Vorbereitung:

Physik der Elementarteilchen, Theoretische Grundlagen
Modelle der Elementarteilchen
Kernmodelle
Quantenstatistik
Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation
Feldquantisierung

Theoretische Physik

Band 2A

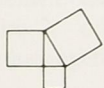
Walter Greiner
Horst Stock

Hydro- dynamik

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen
und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

4., überarbeitete und erweiterte Auflage 1991



Verlag Harri Deutsch

Professor Dr. rer. nat. Walter Greiner ist Direktor des Instituts für theoretische Physik der Universität Frankfurt.

Dr. phil. nat. Horst Stock ist bei der Firma EDAS in Limburg tätig.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Theoretische Physik. – Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch

Bd. 2A. Greiner, Walter: Hydrodynamik. – 4., überarb. und erw. Aufl. – 1991

Greiner, Walter:

Hydrodynamik : ein Lehr- und Übungsbuch ; mit zahlreichen Abbildungen und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen / Walter Greiner ; Horst Stock. – 4., überarb. und erw. Aufl. – Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch, 1991

(Theoretische Physik ; Bd. 2A)

ISBN 3-8171-1204-1

NE: Stock, Horst:

ISBN 3-8171-1204-1

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus –, sind vorbehalten.

Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden.

Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1991
Herstellung: Fuldaer Verlagsanstalt
Printed in Germany

Vorwort zur 1. Auflage

Die Theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Thermodynamik und Statistische Mechanik, Festkörperphysik, bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Das alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweißen; Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden. Dabei muß natürlich auch Unwesentliches weggelassen werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die Theoretische Physik in das 1. Studiensemester vorverlegt. Darum werden die Mechanik 1 und 2, die Elektrodynamik, die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie 2, Thermodynamik und Statistische Mechanik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungen und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon wie z. B. die zweisemestrigen Vorlesungen über Theoretische Kernphysik bzw. Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

Wir stellen hier mit der Hydrodynamik eine solche Ergänzungsvorlesung vor. Sie ist so gehalten wie die Grundvorlesungen auch: Zusammen mit ausführlichen Erläuterungen des notwendigen mathematischen Werkzeugs, vielen Beispielen und durchgerechneten Aufgaben, versuchen wir den Stoff so interessant wie möglich darzustellen. Dabei beschränken wir uns nicht nur auf die klassisch-hydrodynamischen Probleme wie z.B. ideale Flüssigkeiten, Potentialströmung, Schwere- und Schallwellen, zähe Flüssigkeiten, Kapillarität, sondern besprechen vor allem auch moderne Aspekte wie z.B. die Theorie der Stoßwellen, die relativistische Hydrodynamik, die Prandtl'sche Grenzschichttheorie, die Anwendung hydrodynamischer Konzepte in der Kernphysik und hochenergetischen Schwerionenphysik. Die Vorlesungen werden schließlich mit Betrachtungen über solitäre Wellen und Solitonen abgeschlossen.

Letzteres sind Themen, die junge Physiker faszinieren, weil sie ihnen zeigen, daß man auch schon im 2. oder 3. Studiensemester ohne Niveauverlust an moderne Forschungsgebiete herangeführt werden kann.

Wir bedanken uns bei den Damen M. Knolle, R. Lasarzig und B. Utschig für ihre große Hilfe bei der Anfertigung des Manuskripts. Ihre Geduld und Ruhe bei den immer wieder notwendigen Änderungen war bewundernswert.

Schließlich sprechen wir die Hoffnung aus, daß auch diese Vorlesungen über Hydrodynamik, spezielle Kapitel, viele Freunde finden mögen.

Frankfurt am Main, im Mai 1978

Walter Greiner

Horst Stock

Vorwort zur 4. Auflage

Die Vorlesungen über Theoretische Physik haben viele Freunde gefunden, so daß nach drei unveränderten Auflagen und mehreren Nachdrucken eine Neuauflage notwendig wurde. Dies gab uns Gelegenheit, Druck- und Flüchtigkeitsfehler der ersten drei Auflagen zu eliminieren und gleichzeitig notwendig erscheinende didaktische und sachliche Verbesserungen vorzunehmen.

Hervorzuheben ist die Einarbeitung biographischer Fußnoten, die mit Petitdruck Aufschluß über die wichtigsten Lebensstationen und das Werk bedeutender Physiker und Mathematiker geben sollen. Wir danken dem Verlag Harri Deutsch und dem F. A. Brockhaus Verlag für die Erlaubnis, biographische Informationen deren Lexika zu entnehmen. Darüber hinaus wurde ein neues Kapitel über die Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen aus der Statistischen Mechanik aufgenommen.

Das Buch erscheint von nun an fest gebunden, was sicher die Benutzer freuen wird.

Wir bedanken uns diesmal bei Herrn cand. phys. C. Best für seine Hilfe bei der Abfassung und Ausarbeitung neuer Aufgaben und Beispiele, insbesondere zu dem schon erwähnten neuen Kapitel, und vor allem bei Herrn Dipl. Phys. V. Blum für die gewissenhafte Überwachung der Drucklegung. Auch den Herren cand. phys. T. Achenbach, cand. phys. A. Bischoff, cand. phys. B. Ernsperger, cand. phys. D. Hilberg, cand. phys. H. Kang, Dipl. Phys. U. Katscher, Dipl. Phys. A. v. Keitz, cand. phys. S. Schneider und cand. phys. E. Stein, sowie Frau A. Steidl, die uns die Figuren gezeichnet hat, sei herzlich gedankt.

Frankfurt am Main, im Mai 1991

Walter Greiner

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung in die Hydrodynamik	1
Einführung	1
Lagrange'sche Darstellung	1
Euler'sche Darstellung	4
Stromlinie, Bahnlinie	6
Volumendilatation	10
Zeitliche Änderung einer Feldgröße	12
2. Thermodynamische Beziehungen	15
Temperatur	15
Spezifisches Volumen	15
Zustandsfunktion und äquivalente Größen	16
Innere Energie, Enthalpie	17
Spezifische Wärmen	19
Adiabatische Zustandsänderung	21
Entropie	21
Thermodynamische Potentiale, natürliche Variablen	23
Zustandsänderungen, Kreisprozeß	26
Irreversibilität, Reversibilität	27
3. Kontinuitätsgleichung	34
Verallgemeinerung der Kontinuitätsgleichung	40
4. Ideale Flüssigkeiten	42

Euler'sche Gleichung	42
Kontinuitätsgleichung der Entropie	44
Isentrope Bewegung	45
Hydrostatik	46
Gleichförmig rotierende Flüssigkeit	49
Bernoulli'sche Gleichung	62
Der Energiestrom	66
Impulsstrom	69
Erhaltung der Zirkulation	72
Helmholtz'sche Wirbelsätze	76
5. Potentialströmung	83
Ebene Potentialströmungen	85
Mathematische Ergänzung: Cauchy's Integralsatz und Integralformel	89
Mathematische Ergänzung: Laurentreihe, Residuensatz	92
Ebene Strömung um ein Hindernis	94
Mathematischer Einschub: Konforme Abbildung	104
6. Schwerewellen	112
Mathematische Ergänzung: Bessel-, Neumann- und Hankel- Funktionen	116
7. Schallwellen	129
Kugelförmige Schallwellen	130
Ebene Schallwellen, periodische Schallwellen	132
Schallabstrahlung	134
Schallenergie	137
Brechung und Reflexion von Schallwellen	139
Wellenpakete	143
Schallausbreitung in einem bewegten Medium	145
8. Beginn einer Flüssigkeitsbewegung	148

9. Ausbreitung von Störungen in Flüssigkeiten	152
Stationäre Strömung	156
10. Stoßwellen	162
Unstetigkeitsflächen	162
Bewegung der Stoßwelle	167
Änderung der thermodynamischen Größen beim Durchgang durch die Stoßwelle	170
Änderungsrichtung der thermodynamischen Größen an der Stoßwelle	172
Stoßwelle in eindimensionalen Strömungen	176
Schräge Stoßwelle	178
11. Relativistische Hydrodynamik	185
Der Energie-Impuls-Tensor	187
Die relativistischen Gleichungen	190
12. Zähe Flüssigkeiten	209
Die Bewegungsgleichung und der Reibungstensor	209
Ebene Strömung	216
Laminarströmung durch zylindrische Röhren	217
Kräfte an Grenzflächen	227
Transversale Schwingung in einer zähen Flüssigkeit	230
Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit	234
Energiedissipation	242
13. Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen aus der statistischen Mechanik	245
Verteilungsfunktion und Phasenraum	245
Mittelwerte	246
Substantielle Ableitung	247
Stoßterm	248
Wirkungsquerschnitte	250
Gleichgewichtsverteilung	253

Transportgleichung von Maxwell	254
Die hydrodynamischen Grundgleichungen	258
Das Momentenverfahren	268
14. Die Prandtl'sche Grenzschichttheorie	284
15. Flüssigkeitsbewegungen, beschrieben in rotierenden Bezugssystemen	294
16. Kapillarität	300
Laplace'sche Formel	300
17. Mathematische Ergänzung: Zur Theorie der Flächen	313
Bogenlänge einer Kurve auf der Fläche	315
Flächeninhalt eines Flächenbereiches	318
Die zweite Fundamentalform	321
Normal-Krümmungen	331
Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen	334
Krümmungslinien	346
Rodrigues'sche Formel	347
Asymptotenlinien	350
18. Hydrodynamische Konzepte in der Kernphysik	353
Riesenresonanzen	353
Riesenresonanzen in deformierten Atomkernen	366
Oberflächenschwingungen in Atomkernen	368
Stoßwellen in Kernmaterie	379
19. Solitäre Wellen und Solitonen	390
Lange Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten geringer Tiefe – die Gleichung von Korteweg und de Vries	390
Solitäre Lösungen und Solitonen	395
Die Sinus-Gordon-Gleichung	404

Aufgaben und Beispiele

1.1	Aufgabe: Lagrange'sche Darstellung einer Strömung	3
1.2	Aufgabe: Zusammenhang zwischen Euler'scher und Lagrange'scher Darstellung	5
1.3	Aufgabe: Bahn- und Stromlinien einer Strömung	9
1.4	Aufgabe: Volumendilatation einer Strömung	12
1.5	Aufgabe: Zeitliche Änderung eines zeitunabhängigen Vektorfeldes	13
2.1	Aufgabe: Differenz der spezifischen Wärmen eines idealen Gases	20
2.2	Aufgabe: Adiabatangleichung für ein ideales Gas	21
2.3	Aufgabe: Spezifische Entropie eines idealen Gases	22
2.4	Aufgabe: Spezifische thermodynamische Potentiale eines idealen Gases	25
2.5	Beispiel: Isotherm-isochorer Kreisprozeß	28
2.6	Beispiel: Carnot'scher Kreisprozeß	31
3.1	Aufgabe: Harmonische Schwingung einer kompressiblen Flüssigkeit	36
3.2	Aufgabe: Gleichförmige Bewegung eines Flüssigkeitstropfens . .	37
3.3	Aufgabe: Strömung durch eine Rohrverzweigung	39
4.1	Beispiel: Flüssigkeit im Schwerfeld der Erde	48
4.2	Beispiel: Rotationsabplattung von Weltkörpern	51
4.3	Beispiel: Das Prandtl'sche Staurohr	64
4.4	Aufgabe: Ausfluß aus einem Gefäß	65
4.5	Beispiel: Gasströmung aus einem Behälter in einen anderen . .	66
4.6	Beispiel: Ebene Zirkulationsströmung	74
4.7	Beispiel: Geschwindigkeitsfeld aus Wirbelfeld – Eine Analogie zur Elektrodynamik	80
5.1	Aufgabe: Strömung um einen Kreiszylinder	98

5.2	Beispiel: Ebene Strömung um beliebige Profile	107
5.3	Beispiel: Strömung um eine Kugel	108
6.1	Beispiel: Ringwellen	126
9.1	Aufgabe: Zusammenhang von Stromdichte und Geschwindigkeitsdichte bei stationären Strömungen	160
10.1	Aufgabe: Geschwindigkeitsdifferenz an einer Stoßwelle	166
11.1	Beispiel: Das relativistische Riemann-Problem	196
11.2	Beispiel: Hydrodynamische Konzepte in der Trägheitsfusion	202
11.3	Aufgabe: Rankine-Hugoniot-Relation für die Stoßwellenverdichtung eines idealen Gases	206
11.4	Beispiel: Stoßwellen in Supernova-Explosionen	207
12.1	Aufgabe: Laminarströmung durch ein Rohr	217
12.2	Aufgabe: Bewegung eines Zylinders in einem flüssigkeitsgefüllten Rohr	220
12.3	Aufgabe: Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht auf einer schiefen Ebene	222
12.4	Aufgabe: Strömung zwischen rotierenden Zylindern	224
12.5	Aufgabe: Kräfte auf bewegte Grenzflächen einer zähen Flüssigkeit	230
13.1	Aufgabe: Wirkungsquerschnitt bei Stößen starrer Kugeln	250
13.2	Beispiel: Pfadintegralformulierung und Relaxationsansatz	256
13.3	Aufgabe: Relaxationsansatz zur Wärmeleitung	263
13.4	Aufgabe: Relaxationsansatz zur Viskosität	266
14.1	Beispiel: Die Zirkulation am Tragflügel	289
16.1	Aufgabe: Druck in einer Seifenblase	304

16.2	Aufgabe: Flüssigkeitshaut zwischen Ringen	305
16.3	Aufgabe: Steighöhe in Kapillarrohr	307
16.4	Aufgabe: Oberflächengestalt in Wandnähe	309
17.1	Aufgabe: Kurve auf Einheitskugel	316
17.2	Aufgabe: Oberfläche eines Torus	320
17.3	Aufgabe: Zweite Fundamentalform	323
17.4	Aufgabe: Charakter der Punkte auf dem Torus	328
17.5	Aufgabe: Planare Punkte einer Fläche	330
17.6	Aufgabe: Normalenkrümmung auf der Kugel	333
17.7	Aufgabe: Klassifikation einer Fläche 2. Grades	336
17.8	Beispiel: Dupin'sche Indikatrix	339
17.9	Aufgabe: Mittlere Krümmung	343
17.10	Aufgabe: Normalenkrümmungsvektor und Normalenkrümmung	344
17.11	Aufgabe: Mittlere und Gauß'sche Krümmung auf der Kugel . .	344
17.12	Aufgabe: Krümmungen auf dem Torus	345
17.13	Beispiel: Krümmungslinien auf einem Paraboloid	347
17.14	Aufgabe: Haupttrichtungen auf dem Paraboloid	349
17.15	Beispiel: Asymptotenlinien	351
18.1	Aufgabe: Kinetische Energie der Oberflächenschwingung in Atomkernen	377
19.1	Aufgabe: Ein-Soliton-Lösung der Korteweg-de Vries-Gleichung	399
19.2	Aufgabe: Zwei-Solitonen-Lösung der Korteweg-de Vries-Gleichung	400
19.3	Aufgabe: Soliton-Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung	407

1. Einführung in die Hydrodynamik

Einführung

In diesem Buch wollen wir uns mit einigen dynamischen und statischen Problemen von Flüssigkeiten befassen. Die Ergebnisse sind auf nicht zu sehr verdünnte Gase anwendbar, auch wenn wir in der Regel nur von Flüssigkeiten sprechen werden.

Wir werden uns im wesentlichen mit mechanischen Problemen befassen. Wo es nötig ist, werden allerdings auch thermodynamische Beziehungen, wie z.B. Zustandsgleichungen und daraus abgeleitet GröÙen berücksichtigt werden.

Wir wollen die Flüssigkeit stets als ein Kontinuum ansehen, d.h. als einen von Masse stetig erfüllten Raum. Diese Art der Behandlung ist solange zulässig, wie wir das Konzept der kleinen Flüssigkeitselemente anwenden können. Wir verstehen dabei unter einem Flüssigkeitselement ein kleines Volumen innerhalb der Flüssigkeit, in dem die physikalischen GröÙen als konstant angesehen werden können. Die Volumenabmessungen müssen jedoch immer groß gegenüber der durchschnittlichen freien Weglänge der Flüssigkeitsmoleküle sein.

Ein wesentliches Problem der Hydrodynamik ist die Darstellung des Zusammenhangs der geometrischen Koordinaten von Flüssigkeitselementen mit der Zeit. In Analogie zur Mechanik eines Systems von Massenpunkten können wir versuchen, die Bahnkurven der einzelnen Flüssigkeitselemente anzugeben. Diese Art wird die *Lagrange'sche*¹ Darstellung genannt.

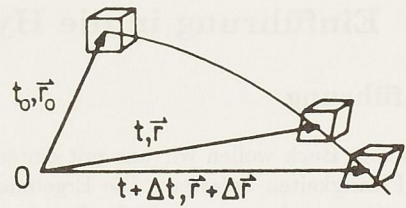
Lagrange'sche Darstellung

Wir denken uns das ganze von der Flüssigkeit eingenommene Volumen in Flüssigkeitselemente zerlegt. Jedes Element könnte dann mit einem Index bezeichnet werden. Wir wählen jedoch eine andere Art der Kennzeichnung.

Zu irgendeiner Zeit t_0 befinden sich die Flüssigkeitselemente an bestimmten Positionen im Raum. Die Ortsvektoren dieser Positionen (also zu dieser Zeit t_0) bezüglich eines von jetzt an festgehaltenen Koordinatensystems seien mit $\vec{r}_0$ bezeichnet. Wir beachten, daß hier $\vec{r}_0$ nicht einen einzigen Vektor bedeutet, sondern daß jedem Flüssigkeitselement ein solcher Vektor $\vec{r}_0$ zugeordnet ist.

¹Joseph Louis de Lagrange, ital.-franz. Mathematiker, geb. 25.1.1736 in Turin, gest. 10.4.1813 in Paris, Professor der Mathematik in Turin und Paris, Nachfolger von Euler als Direktor der mathematischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften. L. erstellte bahnbrechende Arbeiten auf fast allen Gebieten der Mathematik, besonders aber in der Variationsrechnung und der Theorie der analytischen Funktionen. Sehr verdient machte er sich auch auf dem Gebiet der Mechanik (Hauptprinzip der allg. Mechanik) und der Astronomie (Beweis der Stabilität unseres Planetensystems).

Wenn wir im folgenden nur ein einziges Flüssigkeitselement weiterverfolgen, so ist dies durch die Angabe $\vec{r}_0$, d.h. seine Position zur Zeit t_0 eindeutig charakterisiert. Umgekehrt ist dieses Verfahren für alle Elemente einer Flüssigkeit anwendbar. Die Bewegung der Flüssigkeit ist dann vollständig gegeben durch die Zeitabhängigkeit der Ortsvektoren $\vec{r}$ der verschiedenen Flüssigkeitselemente.



Bewegung und Deformation eines Flüssigkeitselements.

Da die Position eines bestimmten Elements, nun gegeben durch den entsprechenden Ortsvektor $\vec{r}$, zur Zeit t durch die Bewegung der Flüssigkeit aus einer bestimmten Position $\vec{r}_0$ zur Zeit t_0 heraus erreicht wird, besteht der Zusammenhang

$$\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_0, t). \quad (1.1)$$

Diese Relation besagt, daß sich die Position eines Flüssigkeitselements, das durch $\vec{r}_0$ charakterisiert ist, im allgemeinen im Laufe der Zeit ändert. Beziehen wir Gleichung (1.1) auf die gesamte Flüssigkeit, so finden wir die Ortsvektoren der Elemente zur Zeit t , indem wir alle Ausgangspositionen $\vec{r}_0$ einsetzen.

Für die Geschwindigkeit des durch $\vec{r}_0$ gekennzeichneten Flüssigkeitselements finden wir nach der Figur

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Big|_{\vec{r}_0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_0} \quad (1.2)$$

oder

$$\vec{w} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}(\vec{r}_0, t). \quad (1.3)$$

$\vec{r}_0$ ist dabei stets unverändert beizubehalten, und es sind im Grenzprozeß nur solche Ortsvektoren $\vec{r}$ zugelassen, die zur Bahnkurve des durch $\vec{r}_0$ charakterisierten Flüssigkeitselementes gehören.

Für die Beschleunigung finden wir analog

$$\vec{b} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{F}(\vec{r}_0, t). \quad (1.4)$$

Diese scheinbar einfache Methode zur Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung erweist sich in praktischen Fällen jedoch als sehr umständlich und schwierig. Im allgemeinen ist man auch gar nicht am Schicksal des einzelnen Flüssigkeitselementes, das sich als solches durch nichts von den anderen unterscheidet, interessiert. In den weitaus meisten Fällen kann man auf die individuelle Behandlung der einzelnen Flüssigkeitselemente verzichten. Man will meist nur den Strömungszustand und seine zeitliche Änderung an jedem Raumpunkt der Flüssigkeit kennen. Diese weniger weitreichende Problemstellung führt zur *Euler'schen*² Darstellung.

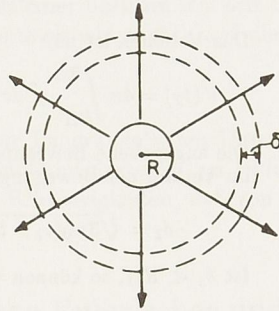
²Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker und Physiker, geb. 15.4.1707 in Basel, gest. 18.9.1783

1.1 Aufgabe: Lagrange'sche Darstellung einer Strömung

Die Ortsvektoren der Elemente einer Flüssigkeit seien außerhalb einer Kugel vom Radius R durch

$$\vec{r} = \vec{e}_r \sqrt[3]{3w_0(t - t_0) + r_0^3}, \quad r > R$$

gegeben. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitselemente. Wie ändert sich ein kugelschalenförmiges Volumen (Dicke δ) im Verlauf der Zeit (vgl. Figur)?



Fluß aus einer Quelle.

Lösung:

Gemäß Gleichung (1.3) ergibt sich die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselementes als

$$\vec{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Big|_{\vec{r}_0} = w_0 \vec{e}_r (3w_0(t - t_0) + r_0^3)^{-2/3}. \quad 2$$

Wie bereits aus der Angabe $\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0)$ zu ersehen war, liegt nur eine radiale Bewegung vor. Dieses Ergebnis zeigt zunächst, daß ein kugelschalenförmiges Volumen seine Gestalt beibehält, d.h. kugelschalenförmig bleibt, wobei sich lediglich die Radien ändern. Die Radien der inneren bzw. äußeren Oberflächen seien zu einer Zeit t_1 mit R_{11} bzw. $R_{12} = R_{11} + \delta_1$ bezeichnet. Das Volumen der Kugelschale zu dieser Zeit berechnet sich dann leicht aus

$$V(t_1) = 4\pi \int_{R_{11}}^{R_{12}} r^2 dr = \frac{4\pi}{3} (R_{12}^3 - R_{11}^3). \quad 3$$

Die Flüssigkeitselemente, die sich zur Zeit t_1 an der Oberfläche mit dem Radius R_{11} befinden, mögen zur Zeit t_0 auf der Fläche mit dem Radius r_0 gelegen haben, so daß wir

$$R_{11} = \sqrt[3]{3w_0(t_1 - t_0) + r_0^3} \quad 4$$

schreiben können. Zur Zeit $t_2 > t_1$ liegen sie dann auf einer Fläche mit dem Radius R_{21} und es gilt

$$\begin{aligned} R_{21} &= \sqrt[3]{3w_0(t_2 - t_0) + r_0^3} \\ &= \sqrt[3]{3w_0(t_2 - t_1) + 3w_0(t_1 - t_0) + r_0^3} \\ &= \sqrt[3]{3w_0(t_2 - t_1) + R_{11}^3}. \end{aligned} \quad 5$$

in St. Petersburg, Professor der Mathematik und Physik in Petersburg, Mitglied der Berliner sowie der Pariser Akademie der Wissenschaften. Euler begründete die Variationsrechnung und beschäftigte sich bahnbrechend mit analytischer Mechanik und Himmelsmechanik. Auch ist er der Entdecker der achromatischen Linsen. Er wird neben C.F. Gauß als einer der größten Köpfe in der Geschichte der Mathematik geführt.

verwendet haben. Die Gleichung (1.6) führt also auf den Satz von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{r^2}(a^2tx - bry) + \frac{ax}{r^2}(r_0 - at_0), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{r^2}(a^2ty + brx) + \frac{ay}{r^2}(r_0 - at_0).\end{aligned}\tag{4}$$

Durch Multiplikation mit x bzw. y und Addition bzw. Subtraktion entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= a^2t + a(r_0 - at_0) \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= rb.\end{aligned}\tag{5}$$

Nun ist aber

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}\tag{6}$$

und

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt}.\tag{7}$$

Also entsteht das einfache System

$$r \frac{dr}{dt} = a^2t + a(r_0 - at_0),\tag{8}$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = b.\tag{9}$$

Berücksichtigen wir die Anfangsbedingungen, so hat Gleichung 8 die Lösung

$$r(t) = a(t - t_0) + r_0.\tag{10}$$

Verwenden wir dieses Ergebnis, so kann auch Gleichung 9 integriert werden. Wir erhalten

$$\varphi(t) = \frac{b}{a} \ln \left(\frac{a(t - t_0)}{r_0} + 1 \right) + \varphi_0;\tag{11}$$

darin bedeutet die Integrationskonstante φ_0 den Winkel, der die Position des Flüssigkeitselementes zur Zeit $t = t_0$ auf den Kreis $r = r_0$ festlegt. Die Positionen der Flüssigkeitselemente werden durch

$$\vec{r}(t) = r(t) (\cos(\varphi(t)) \vec{e}_x + \sin(\varphi(t)) \vec{e}_y)\tag{12}$$

gegeben, wobei $r(t)$ und $\varphi(t)$ gemäß Gleichungen 10 und 11 für jede Zeit t zu berechnen sind.

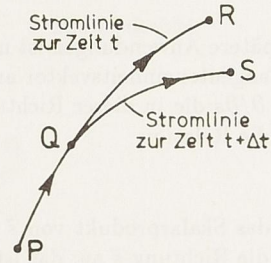
Stromlinie, Bahnlinie

Gemäß der Euler'schen Darstellung ist die Geschwindigkeit als Vektorfeld gegeben, d.h. in jedem Punkt des betrachteten Raumes hat die Geschwindigkeit bestimmte Werte des Betrages und der Richtung, wobei sich diese Werte im allgemeinen mit

der Zeit ändern. Betrachten wir das Feld jedoch in einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_1$, so können wir Kurven angeben, deren Richtung in jedem Kurvenpunkt mit der Richtung der Geschwindigkeit in dem entsprechenden Punkt übereinstimmt. Diese Kurven heißen *Stromlinien*.

Die Euler'sche Darstellung gibt also gleichsam in *Momentaufnahmen die augenblicklichen Strömungszustände* in einzelnen Zeitpunkten. Eine Beziehung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu den Stromlinien fehlt, denn im allgemeinen werden die Stromlinien zu verschiedenen Zeiten von verschiedenen Flüssigkeitsteilchen gebildet.

Das kann durch die Figur veranschaulicht werden: Zu einer Zeit t führe eine Stromlinie von P über den Nachbarpunkt Q nach R. Ein Flüssigkeitselement, das sich zu dieser Zeit bei P befindet, bewegt sich daher gemäß der Geschwindigkeit längs der Stromlinie zum Nachbarpunkt Q. Wenn es dort eintrifft, d.h. zu einer späteren Zeit, hat sich im allgemeinen die Stromlinie verändert und das Flüssigkeitselement bewegt sich nicht nach R, sondern nach S weiter.



Veränderung der Stromlinien mit der Zeit.

Ist $d\vec{s}$ ein Linienelement längs einer Stromlinie zu einem bestimmten Zeitpunkt, so lautet die Gleichung der Stromlinie

$$d\vec{s} \times \vec{v} = 0. \quad (1.8)$$

Für einen bestimmten Zeitpunkt unterscheidet sich diese Gleichung nicht von der Gleichung (1.6) für diesen Zeitpunkt. Die *Bahnlinie* berührt also zu dieser Zeit die Stromlinie an dem Ort, an dem sich das Flüssigkeitselement gerade befindet. Die *Bahnlinien* selbst ergeben sich aus der Lagrange'schen Darstellung als die Bahnkurven im Verlauf der Zeit.

Ein besonders wichtiger Fall ist der, bei dem das Geschwindigkeitsfeld (1.6) nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. $\vec{v} = \vec{f}(\vec{r})$. Das bedeutet also, daß die Bewegung in den einzelnen Raumpunkten zeitlich unverändert andauert. Man nennt solche Bewegungen *stationäre Bewegungen*.

In diesem Falle ist die Relation (1.6) zur Relation (1.8) zu allen Zeiten äquivalent (t ist lediglich ein Parameter), d.h. im stationären Bewegungszustand sind Bahnlinien