

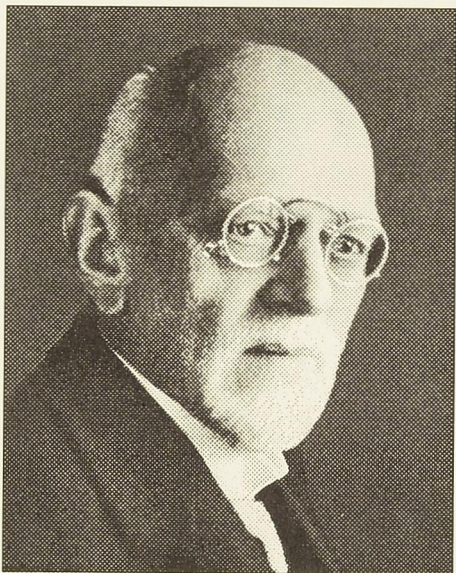
**OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 252**

**Die Hilbertschen
Probleme**

**von
David Hilbert**

Verlag Harri Deutsch

OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 252



David Hilbert
23.1.1862–14.2.1943

**OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 252**

Die Hilbertschen Probleme

Vortrag „Mathematische Probleme“

gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß Paris 1900

von
David Hilbert

erläutert von einem Autorenkollektiv
unter der Redaktion von
P. S. Alexandrov



Verlag Harri Deutsch

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-3401-4

Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und das Speichern und die Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH,
Frankfurt am Main, 2007

1. Auflage Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig
4. Auflage 2002, 2007

Druck: Rosch - Buch Druckerei GmbH, Scheßlitz
Printed in Germany

Inhalt

Geleitwort	7
Vorwort zur deutschen Ausgabe	9
P. S. ALEKSANDROV: Einleitende Bemerkungen zu den Hilbertschen Problemen	17
DAVID HILBERT: Mathematische Probleme	22
<i>Kommentare zu den Hilbertschen Problemen</i>	
A. S. ESENIN-VOL'PIN: Zum ersten Hilbertschen Problem ...	81
A. S. ESENIN-VOL'PIN: Zum zweiten Hilbertschen Problem ...	102
V. G. BOLTJANSKIJ: Zum dritten Hilbertschen Problem	114
I. M. JAGLOM: Zum vierten Hilbertschen Problem	118
E. G. SKLJARENKO: Zum fünften Hilbertschen Problem	126
B. V. GNEDENKO: Zum sechsten Hilbertschen Problem	145
A. O. GELFOND†: Zum siebenten Hilbertschen Problem	151
JU. V. LINNIK: Zum achten Hilbertschen Problem	160
D. K. FADDEEV: Zum neunten Hilbertschen Problem	164
JU. I. CHMELEVSKIJ: Zum zehnten Hilbertschen Problem	177
JU. I. MANIN: Zum elften Hilbertschen Problem	196
JU. I. MANIN: Zum zwölften Hilbertschen Problem	203
A. G. VITUŠKIN: Zum dreizehnten Hilbertschen Problem	208
JU. I. MANIN: Zum vierzehnten Hilbertschen Problem	218
JU. I. MANIN: Zum fünfzehnten Hilbertschen Problem	223
O. A. OLEJNIK: Zum sechzehnten Hilbertschen Problem	233
JU. I. MANIN: Zum siebzehnten Hilbertschen Problem	250
B. N. DELONE: Zum achtzehnten Hilbertschen Problem	254

A. G. SIGALOV: Zum neunzehnten und zwanzigsten Hilbertschen Problem	259
O. A. OLEJNIK: Zum neunzehnten Hilbertschen Problem	275
H. RÖHRL: Zum einundzwanzigsten Hilbertschen Problem ...	279
B. V. ŠABAT: Zum zweiundzwanzigsten Hilbertschen Problem	284
L. Ė. ĖL'SGOL'C†: Zum dreiundzwanzigsten Hilbertschen Problem	286

Geleitwort

Der sowjetische Verlag „Nauka“ legte mit seinem 1969 erschienenen Sammelband „Die Hilbertschen Probleme“ (Problemy Gil'berta) ein bedeutendes mathematisch-historisches Werk vor, das dem Gedenken an den überragenden, humanistisch gesinnten deutschen Mathematiker DAVID HILBERT (1862—1943) gewidmet ist.

Als HILBERT auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris im Jahre 1900 dreiundzwanzig Probleme formulierte, auf die als Schlüsselprobleme weiteren Fortschritts die Kräfte zu lenken seien, da war seine Rede eine Prognose. Sie erwies sich in den Jahrzehnten danach als ein reales Programm, denn es zeigte sich immer deutlicher, daß HILBERT tatsächlich fast durchgängig Kernprobleme der Entwicklung der Mathematik getroffen hatte — eine mit dieser Präzision und fast die gesamte Mathematik umspannenden Universalität vor HILBERT und nach ihm nicht erreichte Leistung.

Für den Mathematiker der Gegenwart, der, bewußt oder unbewußt, direkt und auf vielfältige Weise indirekt, in Hilbertscher Tradition und Ideenwelt steht, kann es nur im höchsten Grade reizvoll sein, Originalfassung, Entwicklung und gegenwärtigen Stand der Hilbertschen Probleme kennenzulernen. Dieser schönen Aufgabe der Berichterstattung haben sich führende, hauptsächlich sowjetische Mathematiker unterzogen; das Resultat ist ein Buch, das geradezu in idealer Weise historische Würdigung eines der bedeutendsten Mathematiker mit dem Zugang zur gegenwärtigen mathematischen Forschung verbindet.

Als Herausgeber ist es mir eine Freude und eine Ehre, nun eine deutschsprachige Ausgabe dieses schönen Buches vorlegen zu können. Die gewiß nicht leichte Übertragung der Kommentare zu den Hilbertschen Problemen ins Deutsche hat eine Gruppe jüngerer Wissenschaftler an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig vorgenommen, freundlich und uneigennützig unterstützt von einer Reihe Professoren und Dozenten. Ihnen allen, den Übersetzern Doz. Dr. S. GOTTWALD, Prof. Dr. V. WÜNSCH, Dr. M. BURKHARDT, Doz. Dr. J. VOM SCHEIDT, Doz. Dr. R. SCHIMMING und den Beratern Prof. Dr. G. EISENREICH, Prof. Dr. P. GÜNTHER, Prof. Dr. H.-J. ROSSBERG, Prof. Dr. E. ZEIDLER sei an dieser Stelle herzlich gedankt, insbesondere auch den verantwortlichen Bearbeitern der deutschen Ausgabe, Frau Dr. H. BERNHARDT (Humboldt-Universität Berlin) und Herrn Doz. Dr. W. PURKERT (Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität). Ein weiterer Dank geht an die Herren Prof. Dr. A. P. JUŠKEWITSCH und Dr. S. S. DEMIDOV (Institut für Geschichte der Naturwissenschaften und Technik bei der sowjetischen Akademie der Wissenschaften, Moskau) und an die Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, durch deren Vermittlung und Initiative die deutsche Ausgabe zustande kommen konnte.

Möge dieser weitere Band aus der traditionsreichen Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ auf seine Weise das Vermächtnis HILBERTS erfüllen helfen, das er selbst einmal in die folgenden Worte gekleidet hatte, die nun über seinem Grab in Göttingen stehen:

Wir müssen wissen.

Wir werden wissen.

H. WUSSING, Leipzig

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Der Einfluß von DAVID HILBERT auf die Mathematik des 20. Jahrhunderts kann kaum hoch genug eingeschätzt werden. In vieler Hinsicht hat HILBERT nach Methode und Fragestellung die weitere Entwicklung der Mathematik geprägt. HILBERTS unermüdliches Wirken in Forschung und Lehre und bei der Förderung des Nachwuchses machte einen wesentlichen Kristallisationspunkt jener weitreichenden Aktivitäten aus, die Göttingen seit dem Ende des 19. bis zum ersten Drittel des 20. Jahrhunderts als ein führendes mathematisch-naturwissenschaftliches Zentrum der Erde hervortreten ließen.

Und als nach dem Machtantritt des Faschismus Göttingen schwere Verluste an führenden Wissenschaftlern hinnehmen mußte, trugen HILBERTS Freunde, seine Schüler und viele seiner damaligen Mitstreiter in Göttingen HILBERTS humanistische Vorstellungen über die Wissenschaft und seine moderne Auffassung vom Wesen der Mathematik in die Welt. Er selbst, schon im 8. Lebensjahrzehnt stehend, mußte zurückbleiben. Sein Lebenswerk aber ist heute unveräußerlicher Bestandteil aller progressiven mathematischen Tradition auf der ganzen Welt.

HILBERT wurde am 23. Januar 1862 im damaligen Königsberg als einziger Sohn des preußischen Amtsgerichtsrates OTTO HILBERT und seiner Frau MARIA THERESIA, geb. ERDTMANN geboren. Sein Vater war ein etwas einseitiger, gelegentlich auch mißtrauischer Mensch. Die Mutter dagegen war bemerkenswert vielseitig, außerordentlich gebildet und an Philosophie und Astronomie interessiert.

Eine jüngere Schwester HILBERTS ist schon im 28. Lebensjahr verstorben.

DAVID HILBERT durchlief in seiner Heimatstadt verschiedene Gymnasien. Er beschäftigte sich damals nicht intensiv mit Mathematik, da er, wie er später erklärte, schon damals gewußt habe, daß er das später tun werde.

Im Jahre 1880 legte HILBERT das Abitur ab und bezog im Herbst die heimatliche Universität. In den dortigen Mathematikern H. WEBER, F. LINDEMANN und A. HURWITZ fand HILBERT vorzügliche akademische Lehrer. Die abstrakte, strenge Auffassung der Mathematik, wie sie in Berlin insbesondere durch E. E. KUMMER, L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS vertreten wurde, lernte HILBERT durch H. MINKOWSKI kennen. Mit ihm, der ebenfalls in Königsberg ansässig war, in Berlin studiert hatte und schon mit 19 Jahren eine internationale mathematische Berühmtheit darstellte, schloß HILBERT eine herzliche Freundschaft, die bis in die spätere gemeinsame Zeit in Göttingen und bis zu MINKOWSKIS frühem Tode unverändert fortbestand.

Der Promotion an der Königsberger Universität im Jahre 1885 und dem Staatsexamen als Lehrer für Mathematik und Physik folgten Studienaufenthalte bei F. KLEIN in Leipzig und bei CH. HERMITE in Paris. Im Jahre 1886 habilitierte sich HILBERT in Königsberg und war dort bis 1892 Privatdozent. Einem Extraordinariat schloß sich 1893 eine ordentliche Professur für Mathematik in Königsberg an, aber schon 1895 folgte er einer Berufung nach Göttingen, die ihm auf Grund eines Vorschlages von F. KLEIN angeboten worden war. Diesem hat man einmal vorgeworfen, er habe es sich bequem gemacht, einen solchen jungen Mann zu sich nach Göttingen zu holen. Doch KLEIN antwortete: „Sie irren, ich habe mir den allerunbequemsten geholt.“

Jedenfalls rechtfertigte sich diese Berufung auf das allerbeste, auch das persönliche Verhältnis zwischen KLEIN und HILBERT entwickelte sich ausgezeichnet. Mit HILBERT er-

hielt Göttingen einen Forscher allerersten Ranges, einen hervorragenden akademischen Lehrer, einen hochgeschätzten Kollegen in der Fakultät, und einen humanistisch gesinnten Gelehrten, der systematisch auf die Heranbildung des Nachwuchses bedacht war. HILBERT hat als einer der wenigen bedeutenden deutschen Gelehrten die Unterschrift unter jenes schmähhliche chauvinistische Dokument zu Anfang des 1. Weltkrieges verweigert, das die Kriegsschuld des deutschen Imperialismus bestritt. Nach dem 1. Weltkrieg war HILBERT darum einer der ersten deutschen Gelehrten, der wieder gleichberechtigt auf einem internationalen Kongreß zugelassen wurde.

Trotz ehrenvoller Berufungen blieb HILBERT Göttingen treu. Seine Frau KÄTHE, geb. JEROSCH war ihm Zeit seines Lebens eine treue und verständnisvolle Gefährtin. Im Jahre 1930 wurde HILBERT emeritiert; Vorlesungen hielt er sogar noch bis 1934.

Die zwanziger Jahre sahen HILBERT auf dem Höhepunkt der Anerkennung, die er auf der ganzen Erde fand, unabhängig davon, ob alle seiner Auffassung vom Wesen der Mathematik und seinen hochgespannten Intensionen zu folgen vermochten.

Die Machtergreifung der deutschen Faschisten aber hatte die schlimmsten Folgen, auch für Göttingen. Die Mathematiker E. NOETHER, E. ARTIN, H. WEYL, R. COURANT und P. BERNAYS wurden vertrieben, ebenso der Nobelpreisträger der Physik M. BORN. Der Zahlentheoretiker E. LANDAU und der Nobelpreisträger J. FRANCK wurden ihrer Ämter enthoben. HILBERTS enger persönlicher Freund, der Mathematiker O. BLUMENTHAL emigrierte nach Holland; später, 1944, wurde er in Terežin (Theresienstadt) umgebracht.

HILBERT hat das Wesen des Faschismus nicht mehr in seiner vollen gesellschaftlichen Tragweite zu erkennen vermocht, aber er blieb sich selbst treu. Als ihn der nazistische Unterrichtsminister fragte, wie die Mathematik in Göttingen

gen gedeihe, nun, nachdem sie vom jüdischen Einfluß befreit sei, hat er mutig geantwortet: Die Mathematik in Göttingen, die gibt es nicht mehr.

Der verbrecherisch ausgelöste Krieg schlug furchtbar auf Deutschland zurück. HILBERTS Leben erlosch um jene Zeit, als sich das Scheitern der faschistischen Aggression deutlich abzuzeichnen begann: Am 2. Februar 1943 kapitulierten die letzten faschistischen Truppen in Stalingrad, am 14. Februar starb HILBERT. Nur ein knappes Dutzend Personen geleitete DAVID HILBERT zur letzten Ruhe, unter ihnen seine fast erblindete Frau KÄTHE. Von allen seinen Freunden aus glücklichen Tagen hatte nur der theoretische Physiker A. SOMMERFELD aus München kommen können. Am Sarge stehend resümierte er HILBERTS Lebenswerk, das ihn unstreitig als bedeutendsten Mathematiker am Beginn des 20. Jahrhunderts auswies.

Es ist eine Merkwürdigkeit, daß sich HILBERT bei aller Universalität zeitlich ziemlich scharf getrennten Forschungsbereichen zugewendet hat. Die relative Vollendung, die er jedem Gebiet zu geben wußte und die rasche, erfolgreiche Hinwendung zu einem anderen Problemkreis, das sind typische Züge der Schaffensweise von HILBERT und machen seine fast unglaubliche Leistung aus. Das Lebenswerk von HILBERT ist von großer, bestechender Einheitlichkeit. H. GRELL,¹⁾ der in einem Vortrag anläßlich der 25. Wiederkehr des Todestages von HILBERT 1968 auf der Jahresversammlung der mathematischen Gesellschaft der DDR die Gesamtpersönlichkeit HILBERTS würdigte, sagte in diesem Zusammenhang: „Eine Konsequenz aber dieses synthetischen Spürsinns war, daß er im Laufe seines Lebens

¹⁾ H. GRELL: DAVID HILBERT, Gesamtpersönlichkeit und algebraisch-zahlentheoretisches Werk. Vortrag auf der Jahresversammlung der Mathematischen Gesellschaft der DDR zu Rostock am 14. 2. 1968. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR 2 (1968) S. 40.

zu einer Universalität führte, wie sie bis heute keiner der großen Mathematiker wieder erreicht zu haben scheint. In seiner Arbeitsweise bedingen sich Vereinheitlichung, Vereinfachung und ein Herausarbeiten der Grundprobleme.“

Seine erste schöpferische Periode von etwa 1885 bis 1893 gehörte der Invariantentheorie, eine zweite Periode schloß 1897 die Hinwendung zur Theorie der algebraischen Zahlkörper mit dem sog. „Zahlbericht“ ab. Auf eine anschließende tiefgründige Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie, die auch eine neue Auffassung vom Wesen der axiomatischen Methode implizierte, folgte seit 1902 bis etwa 1912 die grandiose Periode der Forschungen im Gebiet der Integralgleichungen. Als direkte Reaktion auf A. EINSTEINS Veröffentlichungen zur Relativitätstheorie schloß sich hier eine erfolgreiche Hinwendung zur mathematischen Physik an. Die letzte fruchtbare, schöpferische Periode HILBERTS zwischen 1922 und 1930 gehörte ganz den logischen Grundlagen der Mathematik und der Beweistheorie selbst.

Nicht in allen Punkten hat die weitere Entwicklung HILBERTS Ansichten und Absichten bestätigt. Aber sie hat ihn hervortreten lassen als einen der fruchtbarsten und tiefgründigsten Mathematiker der Neuzeit.

Es ist hier weder Platz noch Gelegenheit, das umfassende mathematische Werk von DAVID HILBERT analysierend zu würdigen. Dazu sei der Leser etwa verwiesen auf das Heft 2 (1968) der „Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR“; dort findet man die Beiträge von H. GRELL: „DAVID HILBERTS Gesamtpersönlichkeit und algebraisch-zahlentheoretisches Werk“, K. SCHRÖDER: „Hilberts Beiträge zur Analysis und Physik“ und G. ASSER: „Das Wirken DAVID HILBERTS auf dem Gebiet der Grundlagen der Mathematik“. Höchst lesenswert ist ferner der (englischsprachige) wissenschaftliche Nachruf „David Hilbert and His Mathematical Work“, den H. WEYL, selbst

langjähriger Kollege HILBERTS in Göttingen, noch während des Krieges, 1944, im Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. 50 (1944) erscheinen ließ. Eine gekürzte Fassung dieses wunderbaren Nekrologes findet sich im Anhang der erst kürzlich erschienenen Biographie HILBERTS von C. REID: „Hilbert“ (Berlin/Heidelberg/New York 1970).

Die gesammelten Abhandlungen HILBERTS wurden 1932/35 in Berlin in drei Bänden herausgegeben; dazu kommen die dort nicht aufgenommenen Monographien „Grundlagen der Geometrie“ und „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“ sowie die Standardwerke der mathematischen Literatur R. COURANT/D. HILBERT: „Methoden der mathematischen Physik“, D. HILBERT/W. ACKERMANN: „Grundzüge der theoretischen Logik“, D. HILBERT/S. COHN-VOSSEN: „Anschauliche Geometrie“ und D. HILBERT/P. BERNAYS: „Grundlagen der Mathematik“, an denen HILBERT Mitautor war. Übrigens enthalten auch die „Gesammelten Abhandlungen“ sehr wertvolle Analysen der Bedeutung von HILBERTS Forschungen sowie eine großartige Lebensskizze HILBERTS von seinem Freund O. BLUMENTHAL.

Alle diese Literaturangaben werden dem Leser behilflich sein bei weiteren Studien über Leben und Werk DAVID HILBERTS. Hier, in diesem Bändchen wird seine berühmte Adresse „Mathematische Probleme“ vorgelegt, die er an den 2. Internationalen Mathematikerkongreß (Paris, 6.—12. August 1900) gerichtet hat. HILBERT vertrat in Paris die Deutsche Mathematiker-Vereinigung, bei deren Gründung er selbst maßgeblich mitgewirkt hatte.

An dem Kongreß in Paris nahmen 226 Gelehrte aus allen Teilen der Erde teil. S. S. DEMIDOV hat im Vorwort zur russischen Ausgabe dieses Buches (Vorwort, S. 3/4, Moskau 1969) einen interessanten Überblick über die Arbeit des Kongresses gegeben, vervollständigt durch eine Zusammen-

stellung der Teilnehmer und der von ihnen gehaltenen Beiträge.

Der Kongreß tagte in sechs Sektionen: Arithmetik und Algebra, Analysis, Geometrie, Mechanik und mathematische Physik, Geschichte und Bibliographie der Mathematik sowie Unterricht und Methodologie der Mathematik. In einer gemeinsamen Sitzung der fünften und sechsten Sektion hielt HILBERT am 8. August 1900 seinen berühmten Vortrag.

HILBERT war damals noch nicht vierzig Jahre alt. Und doch zeigte er sich bereits im Besitz eines umfassenden Überblicks über das Gesamtgebäude der damaligen Mathematik.

Es nimmt in Anbetracht dieser außergewöhnlichen Leistung nicht Wunder, daß seither HILBERTS Vortrag „Mathematische Probleme“ ständige Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat und daß man diesen Vortrag heute als ein geradezu klassisches Beispiel einer wissenschaftlichen Prognose heranzieht.

In seinem Nachruf auf D. HILBERT schrieb H. WEYL im Jahre 1944 über diesen berühmten Pariser Vortrag: „Seine Pariser Adresse über „Mathematische Probleme“ ... überdeckt alle Gebiete unserer Wissenschaft. Beim Versuch, das zu entschleiern, was die Zukunft für uns bereit hält, stellte und diskutierte er dreiundzwanzig ungelöste Probleme, welche in der Tat, wie wir heute rückblickend feststellen können, eine bedeutende Rolle während der folgenden ungefähr vierzig Jahre gespielt haben. Ein Mathematiker, der eines von ihnen gelöst hatte, rückte darum ein in die Ehrenklasse der Gemeinschaft der Mathematiker“.

Weitere drei Jahrzehnte haben diese Einschätzung nur noch vertieft. HILBERTS Vortrag „Mathematische Probleme“ zählt daher zu den außergewöhnlichen Kostbarkeiten mathematischer Literatur, sowohl im historischen wie im mathematischen Sinne. Ein zusammenfassender

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Hilbertschen Probleme ehrt HILBERT, und er würdigt jene Vielzahl von schöpferischen Mathematikern aus aller Welt, die im Anschluß an HILBERT die mathematische Wissenschaft vorangebracht haben.

H. BERNHARDT, H. WUSSING

Vorwort zur dritten Auflage

Da das Interesse an dem Buch unvermindert anhält, haben sich Verlag und Herausgeber zu einer unveränderten dritten Auflage entschlossen, obwohl es wünschenswert gewesen wäre, in den letzten 10 Jahren erzielte Resultate einzuarbeiten. Das war jedoch zum jetzigen Zeitpunkt nicht möglich.

HILBERTS Vortrag gewinnt in der heutigen Zeit, da in der mathematischen Forschung das Problembewußtsein und der Zusammenhang der Mathematik mit den verschiedensten Wissenschaften, vor allem mit der Physik, wieder stärker in den Vordergrund rücken, eine besondere Bedeutung. Denn HILBERT wirft Fragen auf, die gegenwärtig besonders aktuell sind, z. B.: Was kennzeichnet die Lebensfähigkeit eines Zweiges der mathematischen Wissenschaften? Wie soll ein gutes mathematisches Problem beschaffen sein? Kann es in der Mathematik gelingen, den zunehmenden Differenzierungsprozeß zu bewältigen und einen gewissen Blick für das Ganze zu bewahren?

HILBERT selbst gab Antworten, deren Tragfähigkeit in methodologischer Hinsicht nach nahezu einem Jahrhundert deutlicher hervortritt als zuvor. Seine Probleme, die er „gleichsam zur Probe“ aus der Fülle heraushob, haben auch in dieser Hinsicht ihre historische Bewährungsprobe bestanden.

Doz. Dr. sc. W. PURKERT

Prof. Dr. sc. H. WUSSING

Einleitende Bemerkungen zu den Hilbertschen Problemen

Von P. S. ALEKSANDROV

Auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Paris im Jahre 1900 trat der große deutsche Mathematiker DAVID HILBERT mit einem Vortrag unter dem Titel „Mathematische Probleme“ auf. Dieser Vortrag wurde dann einige Male im Original und in der Übersetzung veröffentlicht.¹⁾ Die letzte Fassung des Originals steht im 3. Band der gesammelten Werke HILBERTS.²⁾

Soviel ich weiß, traten weder bis zum Vortrag HILBERTS im Jahre 1900 noch danach Mathematiker mit wissenschaftlichen Arbeiten hervor, die die Probleme der Mathematik im ganzen umfassen.³⁾ So stellt der Vortrag

¹⁾ Erstmals veröffentlicht in Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1900, Heft 3, S. 253—297.

²⁾ D. HILBERT: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3, 1935, S. 290 bis 329.

³⁾ Der Vortrag des amerikanischen Mathematikers J. v. NEUMANN auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Amsterdam im Jahre 1954 widerspricht dieser Behauptung nicht. Zwar nannte sich der Vortrag v. NEUMANNS „Ungelöste Probleme der Mathematik“, aber der Vortragende begann seine Ausführungen mit der Bemerkung, daß es unsinnig wäre, in Nachahmung HILBERTS über die Probleme der Mathematik im ganzen zu sprechen, und er schlug vor, sich auf Probleme einiger Gebiete der Mathematik (vor allem auf Gebiete, die der Funktionalanalysis nahestehen) zu beschränken. Das einzige darüber in den Veröffentlichungen des Amsterdamer Kongresses Gedruckte ist die Bemerkung, daß dem Herausgeber das Manuskript des Vortrages nicht zugänglich war; offenbar existiert es nicht. Daher kann man diesen Vortrag gegenwärtig nur nach den Erinnerungen der Hörer beurteilen.

HILBERTS eine völlig einmalige Erscheinung in der Geschichte der Mathematik und in der mathematischen Literatur dar. Und noch heute, nach fast 70 Jahren, behält der Vortrag HILBERTS sein Interesse und seine Bedeutung.

HILBERT übte auf die gesamte Entwicklung der modernen Mathematik einen außergewöhnlichen Einfluß aus, der fast alle Richtungen des mathematischen Denkens umfaßte. Das erklärt sich daraus, daß HILBERT ein Mathematiker war, in dem sich die Kraft des mathematischen Denkens mit seltener Breite und Vielseitigkeit vereinte. Dieser Vielseitigkeit war er sich in vollem Maße bewußt. HILBERT betont ständig, daß die Mathematik einheitlich ist, daß ihre verschiedenen Teile in ständiger Wechselwirkung untereinander und mit den Naturwissenschaften stehen, und daß in dieser Wechselbeziehung nicht nur der Schlüssel für das Verständnis des Wesens der Mathematik selbst liegt, sondern daß sie auch das beste Mittel gegen den Zerfall der Mathematik in einzelne, nicht miteinander verbundene Teile darstellt, — eine Gefahr, die man in unserer Zeit riesigen qualitativen Wachstums und erschreckender Spezialisierung der mathematischen Forschungen ständig im Auge behalten muß. Mit großer Eindringlichkeit und Überzeugung spricht HILBERT insbesondere am Ende seines denkwürdigen Vortrages über den einheitlichen Charakter der Mathematik als der Grundlage der gesamten exakten naturwissenschaftlichen Erkenntnis. Diese seine Überzeugung dient auch in bedeutendem Maße als Leitfaden für den gesamten Vortrag und leitete zweifellos in vielen Fällen den Autor bei der Auswahl der von ihm behandelten mathematischen Probleme.

Der Vortrag beginnt mit einem interessant, ich möchte sagen begeistert geschriebenen allgemeinen Teil, in dem nicht nur von der Bedeutung „gut gestellter“ spezieller Probleme für die Mathematik die Rede ist, sondern in dem auch Urteile über die mathematische Strenge, über den

Zusammenhang der Mathematik mit der Naturwissenschaft und über andere Dinge ausgesprochen werden, die jedem aktiv in seiner Wissenschaft tätigen Mathematiker nahe stehen. Am Ende dieses Einleitungsteils spricht HILBERT mit Eindringlichkeit und Überzeugung seine Grundthese aus, das „Axiom von der Lösbarkeit jeder mathematischen Aufgabe im weiten Sinne des Wortes“, eine These, die sein festes Vertrauen auf die unbegrenzte Macht der menschlichen Erkenntnis und den unversöhnlichen Kampf gegen jeglichen Agnostizismus zum Ausdruck bringt, gegen das unsinnige „Ignorabimus“¹⁾, wie er an anderer Stelle sagt.

Dann folgen die Probleme selbst. Sie beginnen mit der Mengenlehre (dem Kontinuumsproblem) und den Grundlagen der Mathematik, gehen zu denen der Geometrie, der Theorie der kontinuierlichen Gruppen (das berühmte 5. Problem über die Weglassung der Differenzierbarkeitsforderung bei kontinuierlichen Gruppen), der Zahlentheorie, der Algebra und der algebraischen Geometrie über und enden mit der Analysis (Differentialgleichungen, insbesondere partielle, Variationsrechnung). Einen besonderen Platz nimmt das 6. Problem über die Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mechanik ein.

Die Hilbertschen Probleme sind ihrem Charakter nach sehr verschieden. Manchmal handelt es sich um eine konkret gestellte Frage, auf die eine eindeutige Antwort gesucht wird — ja oder nein —, wie z. B. beim geometrischen 3. Problem oder beim arithmetischen 7. Problem über die transzendenten Zahlen. Manchmal wird die Aufgabe weniger bestimmt gestellt, z. B. im 12. Problem (das HILBERT für besonders wichtig hielt), in dem gefordert wird, sowohl

¹⁾ „Ignorabimus“ (lat.) — „wir werden nicht wissen“ — eine der bekannten Reden des Physiologen E. DUBOIS-REYMOND endete (angewandt auf einige ungeklärte wissenschaftliche Fragen) mit dem Ausruf „Ignoramus et ignorabimus“ — „wir wissen nicht und wir werden nicht wissen“.