



Bibliothek des technischen Wissens

Bernd Mattheus

Falko Wieneke

Horst Herr †

Technische Mechanik

Formel- und Tabellensammlung

Statik • Dynamik • Festigkeitslehre

7. überarbeitete Auflage 2019

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 52212

Autoren:

Bernd Mattheus
Falko Wieneke

Dr.-Ing.
Dipl.-Ing., Studiendirektor

Essen
Essen

Lektor:

Falko Wieneke

Autor bis zur 5. Auflage:

Horst Herr †

VDI, Dipl.-Ing., Fachoberlehrer

Kelkheim im Taunus

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

7. Auflage 2019

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

Diesem Buch wurden die neuesten DIN-Normen zugrunde gelegt. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass nur die DIN-Normen selbst verbindlich sind. Diese können in den öffentlichen DIN-Normen-Auslegestellen eingesehen oder durch die Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstr. 6, 10787 Berlin, bezogen werden.

ISBN 978-3-8085-5227-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2019 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: rkt, 51379 Leverkusen, www.rktypo.com

Umschlag: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Umschlagfoto: Falko Wieneke, Vektor-Illustration: @ amgun, Fotos: © anekoho und

© 06photo – Shutterstock.com

Druck: mediaprint solutions GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Die Zusammenhänge zwischen den messbaren und berechenbaren Größen in Naturwissenschaft und Technik werden fast immer in ihrer kürzesten Ausdrucksweise, durch **Formeln**, dargestellt. Das Verständnis für den Einsatz der Formeln und die dazu gehörenden Einheiten muss für ein sicheres Arbeiten vorhanden sein, denn auch die beste Formelsammlung wird dieses Verständnis nicht alleine erwirken.

Im „**Lehr- und Aufgabenbuch Technische Mechanik**“ aus dem Verlag Europa-Lehrmittel (Europa-Nr. 5021X) werden die Zusammenhänge innerhalb der Technischen Mechanik erläutert. Über 1000 Aufgaben helfen, die Anwendung der Formeln einzuüben und ihr Verständnis zu vertiefen.

Die vorliegende Formel- und Tabellensammlung ermöglicht ein schnelles Auffinden der Berechnungsgrundlagen beim Einsatz des Lehr- und Aufgabenbuchs. Der parallele Einsatz beider Bücher ist daher sehr zu empfehlen.

Die **Formel- und Tabellensammlung Technische Mechanik** ist entsprechend dem Lehrbuch in drei Abschnitte unterteilt:

A: Statik

B: Dynamik

C: Festigkeitslehre

Die Hauptüberschriften A 1 bis A 32, B 1 bis B 18 sowie C 1 bis C 30 entsprechen den Überschriften im Lehr- und Aufgabenbuch. Nicht aufgeführt ist die Lektion C 31 des Lehr- und Aufgabenbuchs, da in diesem Kapitel keine Formeln vorkommen.

Auch werden in der Formel- und Tabellensammlung nur die Überschriften der Unterkapitel des Lehr- und Aufgabenbuchs übernommen, in denen Formeln oder Tabellen angewendet werden. Damit das parallele Arbeiten erleichtert wird, wurden die Nummerierungen der Überschriften aus dem Lehr- und Aufgabenbuch beibehalten. So beginnt z.B. das Kapitel A 16 im vorliegenden Buch mit dem Unterkapitel 16.2, da im Kapitel 16.1 des Lehr- und Aufgabenbuchs nur theoretische Inhalte erläutert werden.

Mit dieser Systematik erhöht sich der Gebrauchswert der Formel- und Tabellensammlung erheblich und fördert den Einsatz des Lehr- und Aufgabenbuchs Technische Mechanik.

Das Erkennen der Zusammenhänge von Formeln untereinander wird durch vielfältige Hinweise auf die jeweiligen Hauptkapitel erleichtert.

Natürlich kann die **Formel- und Tabellensammlung Technische Mechanik** auch unabhängig vom Lehr- und Aufgabenbuch verwendet werden.

Hinweise, die zur Verbesserung und Weiterentwicklung dieses Buches beitragen, nehmen wir gern unter der Verlagsadresse oder per E-Mail (lektorat@europa-lehrmittel) entgegen.

Sommer 2019

Autoren und Verlag

Inhalt

Statik

A1	Die Verknüpfung von Physik und Technik	7
A2	Kraft und Drehmoment.	7
A3	Freiheitsgrade eines Körpers.	8
A4	Freimachen von Bauteilen	9
A5	Kräfte auf derselben Wirkungslinie	10
A6	Zusammensetzen von zwei Kräften, deren WL sich schneiden (zeichnerische Lösung) .	10
A7	Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte.	11
A8	Zusammensetzen von mehr als zwei in einem Punkt angreifenden Kräfte	11
A9	Erste Gleichgewichtsbedingung der Statik	12
A10	Bestimmung unbekannter Kräfte im zentralen Kräftesystem.	12
A11	Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem	13
A12	Seileckverfahren (zwei oder mehr Einzelkräfte)	13
A13	Kräfte als Ursache einer Drehbewegung.	14
A14	Rechnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem	15
A15	Bestimmung der Auflagerkräfte beim Träger auf zwei Stützen	15
A16	Bestimmung von Schwerpunkten mittels Momentensatz	15
A17	Bestimmung von Schwerpunkten mittels Seileckkonstruktion	17
A18	Gleichgewicht und Kippen.	18
A19	Regeln von Guldin.	18
A20	Statisch bestimmtes ebenes Fachwerk	18
A21	Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Krafteck	19
A22	Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Cremonaplan.	19
A23	Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Culmann'schem Schnittverfahren	20
A24	Rechnerische Stabkraftermittlung mittels Ritter'schem Schnittverfahren	20
A25	Die Reibungskräfte	20
A26	Reibung auf der schiefen (geneigten) Ebene	21
A27	Reibung an Geradföhrungen.	23
A28	Reibung in Gleitlagern	23
A29	Gewindereibung	24
A30	Seilreibung.	25
A31	Reibungsbremsen und Reibungskupplungen.	25
A32	Rollreibung.	26

Dynamik

B1	Gleichförmige geradlinige Bewegung	27
B2	Ungleichförmige geradlinige Bewegung	27
B3	Zusammensetzen von Geschwindigkeiten	29
B4	Freie Bewegungsbahnen	29
B5	Trägheit der Körper	30
B6	Prinzip von d'Alembert	30
B7	Kurzzeitig wirkende Kräfte	31
B8	Arbeit und Energie	32
B9	Mechanische Leistung	33
B10	Reibungsarbeit und Wirkungsgrad, Reibleistung	34
B11	Wirkungsgrad wichtiger Maschinenelemente und Baugruppen	34
B12	Drehleistung	35
B13	Rotationskinetik	35
B14	Rotationsdynamik	37
B15	Kinetische Energie rotierender Körper	37
B16	Übersetzungsverhältnis beim Riementrieb	40
B17	Übersetzungen beim Zahntrieb	40
B18	Der Kurbeltrieb	41

Festigkeitslehre

C1	Aufgaben der Festigkeitslehre	42
C2	Spannung und Beanspruchung	42
C3	Beanspruchung auf Zug und Druck	42
C4	Flächenpressung und Lochleibung	43
C5	Beanspruchung auf Abscherung	44
C6	Das Hookesche Gesetz für Zug und Druck	44
C7	Querkontraktion	45
C8	Belastungsgrenzen	45
C9	Wärmespannung und Formänderungsarbeit	47
C10	Verformung bei Scherung und Flächenpressung	47
C11	Auf Biegung beanspruchte Bauteile	48

C12	Die Biegespannung	48
C13	Rechnerische Ermittlung von Trägheits- und Widerstandsmomenten	48
C14	Schiefe Biegung	51
C15	Biegemomenten- und Querkraftverlauf beim Freitragler	52
C16	Biegemomenten- und Querkraftverlauf beim Träger auf zwei Stützen	52
C17	Träger gleicher Biegespannung (gleiche Biegefestigkeit)	53
C18	Verformung bei Durchbiegung	54
C19	Torsionsbeanspruchung (Verdrehspannung)	55
C20	Verformung bei Torsion	55
C21	Knickfestigkeit	56
C22	Knickspannung (elastische Knickung, Eulerknickung)	56
C23	Unelastische Knickung (Tetmajer-Knickung)	57
C24	Knickstäbe im Stahlbau	58
C25	Beanspruchung auf Biegung und Zug oder Druck	58
C26	Beanspruchung auf Zug und Schub, Druck und Schub, Biegung und Schub	59
C27	Beanspruchung auf Biegung und Torsion	59
C28	Dauerstandfestigkeit, Schwellfestigkeit, Wechselfestigkeit	59
C29	Ermittlung der Dauerfestigkeit	60
C30	Gestaltfestigkeit	61

Tabellenanhang

T1	Ausgewählte Gewindetabellen	63
T2	Thermische Längenausdehnungskoeffizienten (Wärmedehnzahlen)	65
T3	Ausgewählte Formstahltabellen	66

Sachwortverzeichnis

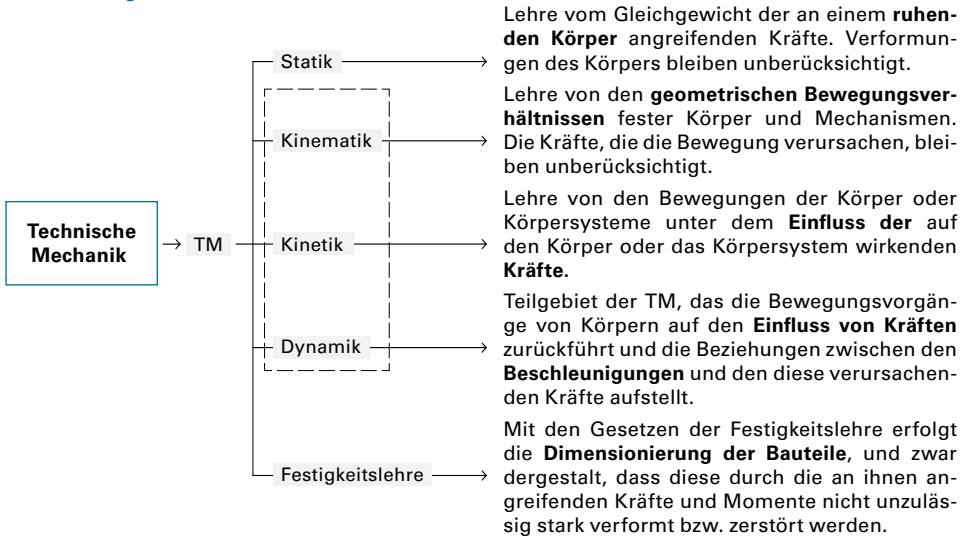
A1 Die Verknüpfung von Physik und Technik

1.1 Bedeutung der klassischen Physik für die Mechanik → A5 C1

1.2 Bedeutung der „Mechanik der festen Körper“ für technische Problemlösungen

Die **Technische Mechanik**, (kurz **TM**) ist ein spezielles Teilgebiet der **Technischen Physik**. Sie ermöglicht es, mit den von ihr bereitgestellten Regeln und Gesetzen verbindliche Aussagen über die **erforderlichen Abmessungen**, d. h. der Dimensionen von Bauteilen und Bauwerksteilen sowie der **Bewegungsabläufe** von und in Maschinen, Apparaten und technischen Anlagen zu machen.

1.2.1 Teilgebiete der technischen Mechanik



Ingenieurwissenschaftliche (technische) Gliederung



1.3 Lösungsmethoden der Statik

Rechnerische (analytische) Verfahren } Ermittlung der **Stützkräfte**, die den Körper zusammen mit den Belastungskräften im Gleichgewicht halten

Zeichnerische (grafische) Verfahren }

A2 Kraft und Drehmoment

→ A5 ... A14 A18 A28 A29 A31 B5 B12 B13 C12 C15 C16 C19

2.1 Basisgrößen und abgeleitete Größen → SI: Système International d'Unités

SI-Basisgröße	Formelzeichen	SI-Basiseinheit	Einheitenzeichen
Länge } Größen der Mechanik	l, s	Meter } Einheiten der Mechanik	m
Masse }	m	Kilogramm }	kg
Zeit }	t	Sekunde }	s
elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

2.2 Physikalische Größen der Statik

2.2.1 Kraft und Drehmoment als physikalische Größen

• Kräfteinheit → B5

$$[F] = [m] \cdot [a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Kräfteinheit

F	Kraft	N
m	Masse	kg
a	Beschleunigung	m/s^2

$$1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ N}$$

Ein Newton ist gleich der Kraft, die einem Körper mit der Masse $m = 1 \text{ kg}$ die Beschleunigung $a = 1 \text{ m/s}^2$ erteilt.

1 da N = 1 Dekanewton = 10 N
 1 kN = 1 Kilonewton = 10^3 N
 1 MN = 1 Meganewton = 10^6 N } je nach Größenordnung der Kraft.

• Das Drehmoment → A13 A14 A18 A28 A29 A31 B12 B13 C12 C15 C16 C19

DIN 1304: **Drehmoment** M gleich Produkt aus Kraft F und ihrem senkrechten **Abstand** r bis zu einem bestimmten Punkt (**Bilder 1 u. 2**).

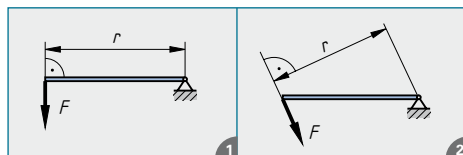
$$M = F \cdot r \quad \text{Drehmoment:}$$

Drehmoment M_d → A13 A14 B12 B13

Biegemoment M_b → C12 C15 C16

Torsionsmoment M_t → C19 C20

$$F \perp r$$



M	Drehmoment	$N \cdot m = \text{Nm}$
F	Kraft	N
r	Abstand (senkrechter Hebelarm)	m

2.2.3 Kraft als Vektor und die Kraftmerkmale → Bild 3

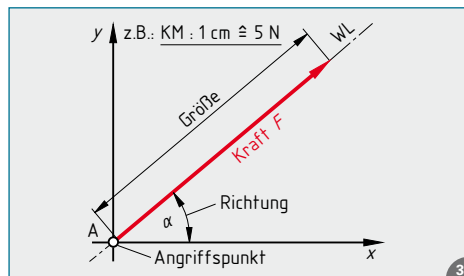
Größe → Dies ist der **Betrag der Kraft**, der in Verbindung mit einem **Kräftemaßstab KM** messbar ist.

Richtung → Diese entspricht der Lage der **Wirkungslinie WL**. Sie ist durch einen Winkel festgelegt.

Angriffspunkt → Ort, an dem die Kraft F am Körper angreift.

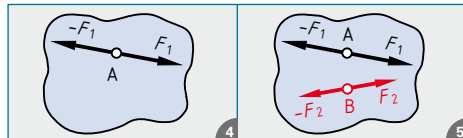
Sinn → Zugkraft oder Druckkraft. Festlegung mittels Vorzeichen

→ A5



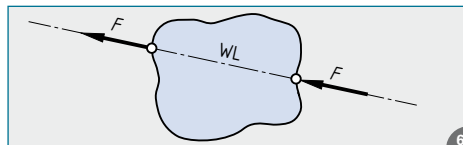
• Erweiterungssatz → A11

Bei einem Kräftesystem (**Bild 4**) dürfen Kräfte hinzugefügt oder weggenommen werden, wenn sie gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind und auf derselben WL liegen (**Bild 5**).



• Längsverschiebungssatz → A6 A11

Eine Kraft darf auf ihrer WL verschoben werden (**Bild 6**). Dadurch ändert sich ihre Wirkung auf den Körper nicht.



A3 Freiheitsgrade eines Körpers → A4 B3 B7

Jede **Bewegungsmöglichkeit** (Translation und Rotation) wird als **Freiheitsgrad** bezeichnet.

Körper in der Ebene → drei Freiheitsgrade (zwei Translationen, eine Rotation).

Körper im Raum → sechs Freiheitsgrade (drei Translationen, drei Rotationen).

Einzelbewegungen können zu einer Gesamtbewegung zusammengesetzt werden. → B3 B7

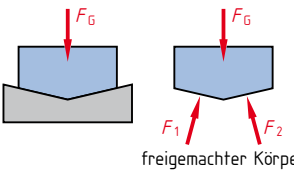
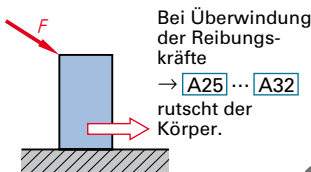
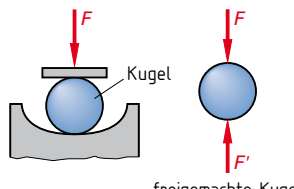
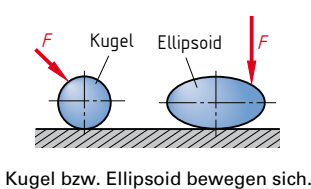
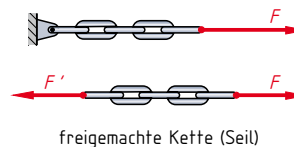
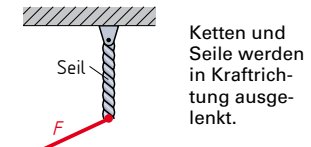
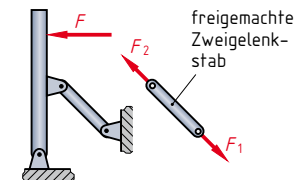
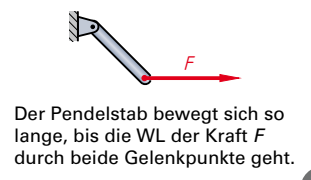
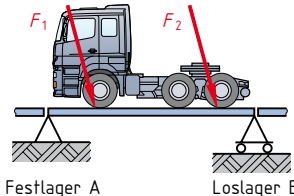
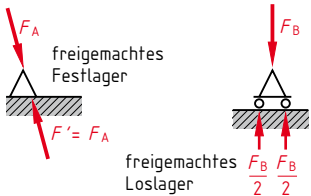
A4 Freimachen von Bauteilen → A15 A21 A22 A23 A24

4.1 Wechselwirkungsgesetz → A25 A26 B5 B6

Aktionskräfte (Belastungskräfte) und **Reaktionskräfte** (Stützkkräfte) **belasten das Bauteil**.

Freimachen heißt, dass man alle das Bauteil tragenden Teile, wie Lager, Stützen, Einspannungen etc. durch die von diesen Elementen auf das Bauteil wirkenden Reaktionskräfte ersetzt. Damit ist zu ersehen, wie Belastungskräfte und Stützkkräfte auf das Bauteil wirken (es belasten).

4.2.1 Regeln für das Freimachen von Bauteilen

Form des Bauteils und Regeln für das Freimachen:	Kraftübertragung in Wirkrichtung der Kraft möglich	Kraftübertragung in Wirkrichtung der Kraft nicht möglich
Ebene Flächen können nur senkrechte Reaktionskräfte erzeugen, d.h. es können nur senkrecht zu ihnen gerichtete Kräfte übertragen werden. → A25 A26 B11 C4	 freigemachter Körper	 Bei Überwindung der Reibungskräfte → A25 ... A32 rutscht der Körper.
Gewölbte Flächen erzeugen im Berührungspunkt mit anderen Körpern senkrechte Reaktionskräfte. Diese wirken in Richtung des Krümmungsradius, d.h. als Radialkräfte. → A28 A30 A31 B6 B11 C10	 freigemachte Kugel	 Kugel bzw. Ellipsoid bewegen sich.
Ketten und Seile können Kräfte nur in Spannrichtung übertragen. Die übertragenen Kräfte können nur Zugkräfte sein. → C3	 freigemachte Kette (Seil)	 Ketten und Seile werden in Krafrichtung ausgelenkt.
Zweigelenkstäbe (Pendelstützen) nehmen nur Zug- oder Druckkräfte in Richtung der Verbindungslinie der beiden Gelenkpunkte auf. → C3	 freigemachter Zweigelenkstab	 Der Pendelstab bewegt sich so lange, bis die WL der Kraft F durch beide Gelenkpunkte geht.
Loslager nehmen nur Kräfte in senkrechter Richtung zum Lager auf. Festlager können Kräfte in jeder beliebigen Richtung aufnehmen. → A15 A22 A23 A24 C16 C21	 Festlager A Loslager B	 freigemachtes Festlager freigemachtes Loslager

Beim Freimachen wird der Angriffspunkt, die ungefähre Richtung der WL, der Richtungssinn, nicht aber die Größe (der Betrag) der Reaktionskräfte ermittelt.

A5 Kräfte auf derselben Wirkungslinie

5.1 Hauptaufgaben der Statik → A1 A6 ... A9 A11 A12 A15 A20 C15 C16

1. Hauptaufgabe → Ermittlung der **Resultierenden** F_r (**resultierende Kraft** = **Ersatzkraft**)

2. Hauptaufgabe → Ermittlung der **Stützkkräfte** (Reaktionskräfte) aus den **Belastungskräften**.

5.3 Sonderfall des zentralen Kräftesystems : gemeinsame WL → A2

Zeichnerische (grafische) Ermittlung von F_r mit Hilfe des **Kräfteplanes KP** (**Bild 2**). Dieser ist grundsätzlich maßstäblich zu zeichnen. Zum KP gehört immer ein **Kräftemaßstab KM**.

Beispiel: KM: 1 cm $\triangleq$ 10 daN.

Der KP wird aus dem **Lageplan LP** (**Bild 1**) entwickelt. Dieser kann unmaßstäblich sein.

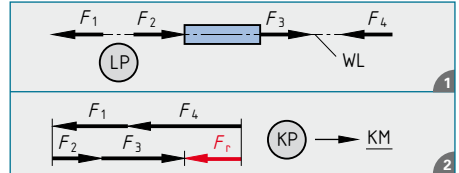
Rechnerische (analytische) Ermittlung von F_r durch die arithmetische Summe der Einzelkräfte:

$$F_r = \Sigma F = F_1 + F_2 + \dots + F_n \text{ in N, daN, kN, MN}$$

Der **Sinn der Kraft** (Wirkseite, z.B. nach rechts oder links bzw. nach oben oder unten) wird durch die **Wahl von Vorzeichen** (+ oder -) bei jeder Aufgabe neu berücksichtigt.

$$F_r = \Sigma F = 0 \rightarrow \text{Kräftegleichgewicht}$$

→ Beispiel: $F_r = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 10 \text{ N} - 5 \text{ N} + 17 \text{ N} - 22 \text{ N} = 0$



Unverbindlicher Vorschlag zur Vorzeichenwahl:

- ← ↓ Nach links oder unten gerichtete Kräfte: minus(-)
- ↑ Nach rechts oder oben gerichtete Kräfte: plus(+)

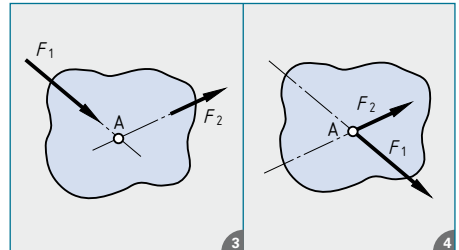
A6 Zusammensetzen von zwei Kräften, deren WL sich schneiden (zeichnerische Lösung)

6.1 Anwendung des Längsverschiebungssatzes

→ A2 A10 A11 A12 A15 A23 A24 B3

Schneiden sich die WL mehrerer Kräfte in einem Punkt, spricht man von einem **zentralen Kräftesystem**. Den Schnittpunkt bezeichnet man als **Zentralpunkt A**. **Bild 3** zeigt dies für zwei Kräfte F_1 und F_2 .

Liegen die Anfangspunkte zweier Kräfte, deren WL sich schneiden, nicht im Zentralpunkt (**Bild 3**), können diese gemäß dem Längsverschiebungssatz dorthin verschoben werden (**Bild 4**).



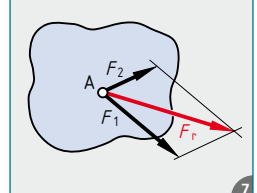
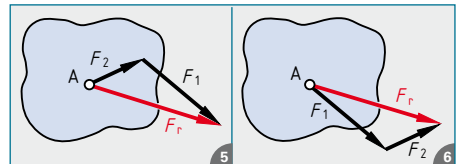
6.2 Parallelogrammsatz → A7 A9 A11 B1 B4 C18

Kräfte sind **Vektoren**. Durch die **vektorielle Addition** der Einzelkräfte erhält man die **Resultierende** F_r , d.h. den Summenvektor. Zeichnerisch entspricht dies einer **Aneinanderreihung der Einzelkräfte in beliebiger Reihenfolge**. Die Konstruktion (**Bilder 5 und 6**) heißt **Kräftedreieck**.

Aus dieser Regel folgt der **Parallelogrammsatz**:

Greifen zwei Kräfte F_1 und F_2 in unterschiedlicher Richtung im selben Punkt A an (**Bild 5**), dann ergibt sich die Resultierende F_r als die Diagonale des aus den beiden Einzelkräften gebildeten **Kräfteparallelogramms** (**Bild 7**). **Rechnerische Lösung** → A9

Die Resultierende (resultierende Kraft) F_r hat die gleiche Wirkung auf einen Körper wie alle an ihm wirkenden Einzelkräfte. F_r ersetzt also die Einzelkräfte und heißt deshalb auch **Ersatzkraft**.



A7 Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte → A6 A9 A10 A11 A15 A23 A27

Eine Kraft lässt sich in zwei Kräfte zerlegen. Diese nennt man **Teilkräfte** oder **Kraftkomponenten**. Eindeutig ist eine solche Kraftzerlegung nur in den beiden folgenden Fällen möglich:

7.1 Die Richtungen beider Kraftkomponenten sind bekannt → A2 A6

Die WL (F_1) und (F_2) sind durch α und β bekannt (**Bild 1**). **Bild 2** zeigt das Kräfteparallelogramm mit den Komponenten F_1 und F_2 der Kraft F , d.h. die Teilkräfte F_1 und F_2 .

Sonderfall: Komponenten sind horizontal bzw. vertikal gerichtet (7.1.1).

7.1.1 Horizontal- und Vertikalkomponente

Zeichnerische Lösung: **Bild 3**

Trigonometrische Lösung:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = F \cdot \sin \beta$$

Horizontalkomponente

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \beta$$

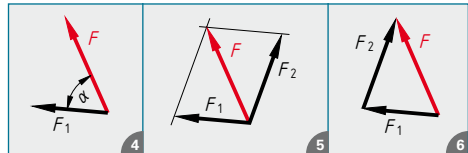
Vertikalkomponente

Werden nur die Wirkungslinien der Kräfte gezeichnet (**Bild 1**), setzt man die Kraftbezeichnungen in runde Klammern.

7.2 Größe und Richtung einer Kraftkomponente sind bekannt → A2 A6

F und F_1 sind gegeben (**Bild 4**). **Bild 5** zeigt die Ermittlung von F_2 im **Kräfteparallelogramm**. **Bild 6** zeigt die Lösung mit Hilfe eines **Kräfte-dreiecks**. Man erkennt:

Im Kräfteparallelogramm ist die Resultierende F_r bzw. die zu zerlegende Kraft F immer eine **Diagonale**. Im Kräftedreieck ist der Anfangspunkt der ersten Komponente mit dem Anfangspunkt der Gesamtkraft und der Endpunkt der letzten Komponente mit dem Endpunkt der Gesamtkraft identisch.



Hinweis: Die Kraftpfeile in der zeichnerischen Lösung sind ebenso gerichtet wie die Kraftübertragungselemente (Seil, Kette, Zweigelenkstab, etc.) in der Konstruktion. → A4

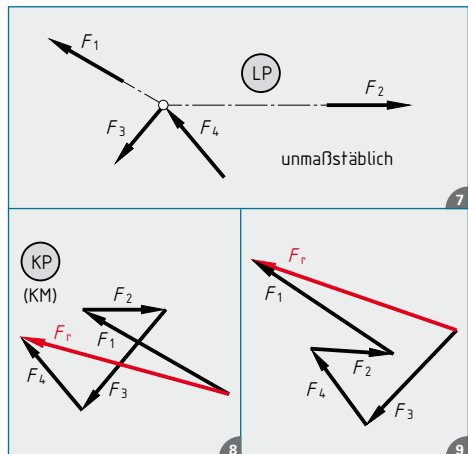
A8 Zusammensetzen von mehr als zwei in einem Punkt angreifenden Kräfte → A6 A10 A22 A23

Bei einem zentralen Kräftesystem (**Bild 7**) mit beliebig vielen Kräften, kann man F_r durch das Zeichnen von $(n-1)$ **Kräfteparallelogrammen** oder $(n-1)$ **Kräftedreiecken** (mit n = Anzahl der Kräfte) ermitteln. In der Regel: Lösung mit einem **Kräftepolygon** (**Kräfteviereck**). Kurzbezeichnung: **Krafteck** (**Bilder 8, 9**).

Das Krafteck (Kräfteplan KP) entsteht durch das Aneinanderreihen aller **Einzelkräfte in beliebiger Reihenfolge**, und zwar maßstäblich, d.h. mit einem KM.

Die Resultierende F_r ist im Krafteck vom Anfangspunkt der ersten Kraft zum Endpunkt der letzten Kraft gerichtet (vektorielle Addition).

Rechnerische Ermittlung von F_r → A9

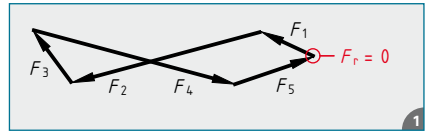


A9 Erste Gleichgewichtsbedingung der Statik → A8 A13

9.1 Das geschlossene Kräfteck bei Kräftegleichgewicht (Bild 1)

Aus Bild 1 ist zu erkennen: $F_r = 0$ **Kräftegleichgewicht**

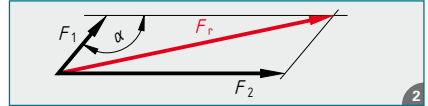
Bei **Kräftegleichgewicht**, d.h. bei $F_r = 0$, entsteht ein geschlossenes Kräfteck. d.h. ein Kräfteck mit „umlaufender Pfeilrichtung“.



9.2 Rechnerische Ermittlung der Resultierenden aus den Horizontal- und Vertikalkomponenten → A7 A8

• Zwei Kräfte im zentralen Kräftesystem → (Bild 2)

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \quad \text{Größe von } F_r$$



• Beliebige viele Kräfte in zentralen Kräftesystem → (Bilder 3 + 4)

Gemäß LP (Bild 3) alle Horizontal- und Vertikalkomponenten ermitteln und zwar unter Beachtung der Vorzeichen → A5

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots$$

$$\text{z. B.: } F_{1x} = -F_1 \cdot \cos \alpha$$

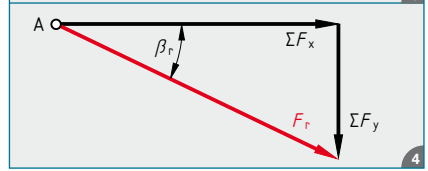
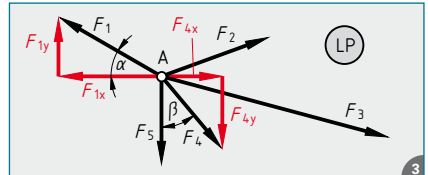
$$F_{1y} = +F_1 \cdot \sin \alpha$$

$$F_{4y} = -F_4 \cdot \cos \beta$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots$$

Gemäß Bild 4: $F_r = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$ **Größe von F_r**

$$\tan \beta_r = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \quad \text{Richtung von } F_r$$



• Erste statische Gleichgewichtsbedingung → A13

Gemäß A9.1: Kräftegleichgewicht bei $F_r = 0$, d.h.:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Kräftegleichgewicht}$$

Zweite Gleichgewichtsbedingung → A13

An einem Körper herrscht Kräftegleichgewicht, wenn die Summe aller Horizontalkomponenten **und** die Summe aller Vertikalkomponenten Null ist.

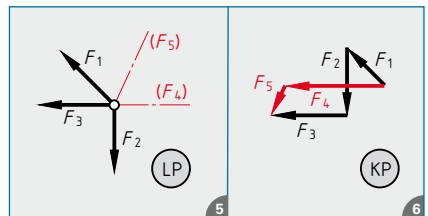
A10 Bestimmung unbekannter Kräfte im zentralen Kräftesystem

→ A9 A11 A12 A15 A23 A24

10.1.1 Zeichnerische Ermittlung unbekannter Kräfte → A9 A11 A12

Bei vorausgesetztem **Kräftegleichgewicht** müssen alle Kräfte in ihrer vektoriellen Summe zu einem **geschlossenen Kräfteck** führen → A9

Sind in einem zentralen Kräftesystem mehrere Kräfte gegeben, dann ist es durch Vorgabe von zwei weiteren WL (Bild 5) möglich, zwei Kräfte zu ermitteln, die das Gleichgewicht herstellen (Bild 6).



Natürlich ist es auch möglich, dass nur eine Kraft das Kräfteck schließt. Sie liegt dann zwischen dem Anfangspunkt der ersten und dem Endpunkt der letzten vorgegebenen Kraft.

Sind mehr als zwei das Gleichgewicht herstellende Kräfte gesucht, so ist keine eindeutige Lösung möglich.

10.2 Rechnerische Ermittlung unbekannter Kräfte → A9 A11 A12

Gemäß A10.1: maximal zwei Kräfte eindeutig bestimmbar. Für diese zwei Unbekannten sind zwei voneinander unabhängige Lösungsgleichungen erforderlich. Bei Kräftegleichgewicht → A9

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \Sigma F_x = 0 \\ \text{II. } \Sigma F_y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Beispiel Bild 6/12: } \left. \begin{array}{l} \text{I. } \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} = 0 \\ \text{II. } \Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ergibt } F_4, F_5$$

Vorzeichenregel → A5 beachten! Vorzeichen annehmen. Kommt beim Auflösen das Gegenvorzeichen heraus, dann war die Annahme falsch. d.h. der Richtungssinn ist entgegengesetzt.

A11 Zeichnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem → A6 ... A9 A14 A21 ... A23

• Definition des allgemeinen Kräftesystems

Ein allgemeines Kräftesystem ist dann gegeben, wenn die WL der am Körper angreifenden Kräfte keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Beispiele zeigen die **Bilder 1 und 2**.

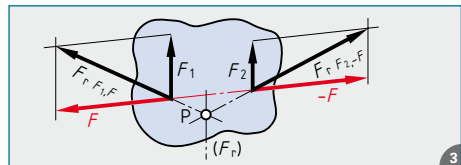
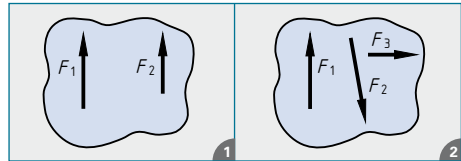
• Zwei parallele Kräfte

Bild 1 zeigt diesen Fall. Durch Anwendung des **Erweiterungssatzes** → A2 und des **Längverschiebungssatzes** → A2 ergibt sich im **Bild 3** der Punkt P. Durch diesen Punkt geht die WL von F_r , ebenso gerichtet wie die beiden gegebenen parallelen Kräfte F_1 und F_2 .

• Beliebige viele Kräfte → A12 A14

Zeichnerische Lösung durch **wiederholte Konstruktion**

- a) des Kräfteparallelogramms → A6
- b) des Kräfte Dreiecks → A6



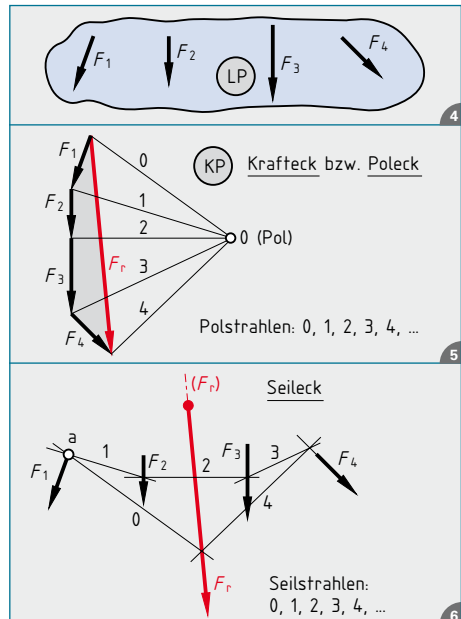
Dies ist i. d. R. sehr aufwendig, deshalb meist **Seileckkonstruktion** → A12 oder **rechnerisches Verfahren** → A14.

A12 Seileckverfahren (zwei oder mehr Einzelkräfte) → A8 A14 A15 A17

Lösungsschritte zur Seileckkonstruktion:

- a) Mit den Daten der Aufgabe (**Bild 4**), d.h. LP mit Größe, Richtung, Angriffspunkt aller Einzelkräfte wird der KP, d.h. das Krafteck gezeichnet (**Bild 5, Teil mit Grauraster**). Zwischen dem Anfangspunkt der ersten und dem Endpunkt der letzten Kraft liegt F_r .
- b) Man wählt frei einen **Pol** 0 und zeichnet die **Polstrahlen** in den KP. Aus dem Krafteck wird so das **Poleck** (**Bild 5**).
- c) Man verschiebt die Polstrahlen (0, 1, 2, ...) parallel vom KP (**Bild 5**) in den LP (**Bild 6** ≙ **Bild 4**), d.h. man zeichnet im LP die **Seilstrahlen**. Seilstrahl 0 schneidet dabei die WL von F_1 an beliebiger Stelle. 1 wird parallel aus dem KP durch diesen Schnittpunkt a verschoben und schneidet F_2 usw.
- c) Man bringt den ersten Seilstrahl (hier 0) mit dem letzten Seilstrahl (hier 4) im LP zum Schnitt. Durch den Schnittpunkt dieser beiden Seilstrahlen geht die WL von F_r , d.h. (F_r).
- e) Man verschiebt F_r aus dem KP parallel durch den Schnittpunkt der beiden äußeren Seilstrahlen (hier 0 und 4) im LP.

Das Seileckverfahren ist für beliebig viele – auch parallele – Kräfte anwendbar.



Rechnerisches Verfahren → A14

A13 Kräfte als Ursache einer Drehbewegung

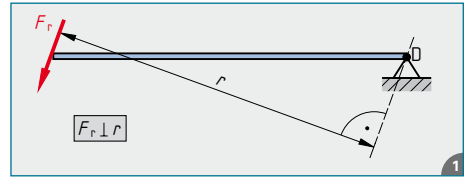
→ A2 A15 A28 A30...A32 B12...B14 C19 C20

13.1 Das Drehmoment der Resultierenden F_r

Bild 1 zeigt:

Geht die WL von F_r nicht durch den Drehpunkt D eines Drehkörpers, dann erzeugt F_r ein Drehmoment.

$$M_d = F_r \cdot r \quad \text{Drehmoment}$$

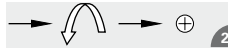


M_d	Drehmoment	Nm
F_r	Resultierende (oder Einzelkraft)	N
r	Hebelarm rechtwinklig auf F_r	m

13.2.1 Drehsinn und Vorzeichen von M_d

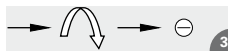
→ A14...A16 A20...A24 A30 A31 C15 C16 C19

positives Drehmoment



Linksdrehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn)

negatives Drehmoment



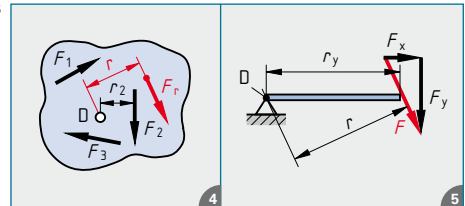
Rechtsdrehsinn (im Uhrzeigersinn)

13.2.3 Resultierendes Drehmoment und Schrägkräfte → A2

$$M_{dr} = F_r \cdot r = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + \dots \quad \text{resultierendes Drehmoment}$$

Das **Gesamtdrehmoment** = **resultierendes Drehmoment** M_d , entspricht der Summe der Einzeldrehmomente (Bild 4).

$$M_d = F \cdot r = F_y \cdot r_y \quad \text{Drehmoment bei Schrägkraft}$$



Bei **Schrägkräften** (Bild 5) errechnet sich das Drehmoment aus dem Produkt von Schrägkraft F und das auf rechtwinkligem Hebelarm r oder aus der zum Hebelarm rechtwinkligen Kraftkomponente F_y und dem tatsächlichen Hebelarm r_y .

M_{dr}	resultierendes Drehmoment	Nm
F_r	Resultierende	N
r	senkrechter Hebelarm von F_r	m
F_1, F_2	Einzelkräfte	N
F_y	senkrechte Komponente von F	N
r_y	Hebelarm rechtwinklig auf F_y	m

13.3 Zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik → A9 → erste GB

$$\Sigma M_d = 0 \quad \text{Momentengleichgewicht (Gleichgewichtsbedingung der Statik)}$$

An einem Körper herrscht Momentengleichgewicht, wenn die Summe aller Momente bzw. das resultierende Drehmoment Null ist.

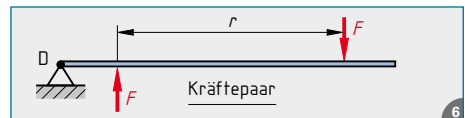
• Statischer Zustand → A1

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M_d = 0 \quad \rightarrow \text{Körper befindet sich in Ruhe (statischer Zustand)}$$

13.4 Kräftepaar und Parallelverschiebungssatz

Zwei gleich große, entgegengerichtete parallele Kräfte (Abstand r) heißen Kräftepaar.

$$M_d = F \cdot r \quad \text{Moment des Kräftepaares (Bild 6)}$$



Der Abstand des Kräftepaares vom Drehpunkt beeinflusst nicht das vom Kräftepaar erzeugte Drehmoment M_d .

Man kann eine Kraft F auf eine zu ihr parallele WL mit dem Abstand r verschieben, wenn ein Drehmoment $F \cdot r$ entgegenwirkt.

→ Parallelverschiebungssatz

A14 Rechnerische Ermittlung der Resultierenden im allgemeinen Kräftesystem (Momentensatz) → A11 ... A13

$$M_{dr} = F_r \cdot r = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + \dots$$

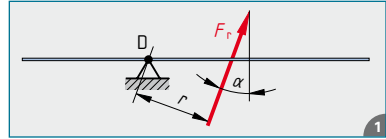
Momentensatz bzw. resultierendes Drehmoment → A13

$$r = \frac{M_{dr}}{F_r} = \frac{\sum M_d}{F_r} = \frac{F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + \dots}{F_r}$$

Lage von F_r

$$F_r = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$\tan \beta_r = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \rightarrow \text{A8}$$



Vorzeichenregeln → A13 beachten!

A15 Bestimmung der Auflagerkräfte beim Träger auf zwei Stützen

→ A20 ... A24 C16

15.1 Rechnerische Bestimmung

$$\sum M_{d(A)} = 0$$

$$\sum M_{d(B)} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

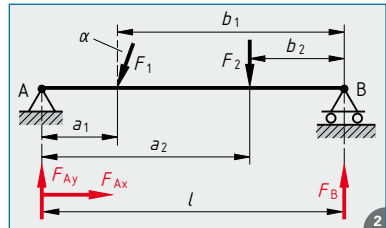
$$F_{Ay} = \frac{\sum (F_y \cdot b)}{l}$$

$$F_{By} = \frac{\sum (F_y \cdot a)}{l}$$

Kontrolle:

$$F_{Ay} + F_{By} = \sum F_y$$

$$F_{Ax} = -\sum F_x$$

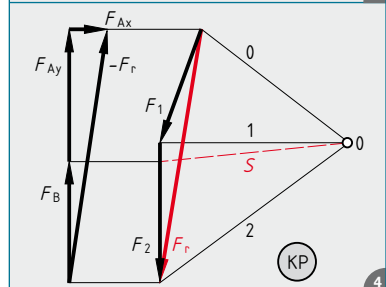
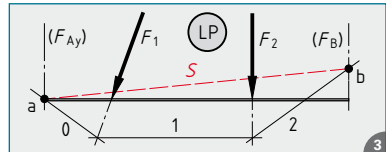


Vorzeichenregeln → A5 A13 beachten!

15.2 Zeichnerische Bestimmung der Auflagerkräfte → Schlusslinienverfahren → A12

Lösungsschritte zum Schlusslinienverfahren:

1. LP des freigemachten Körpers mit den WL aller Kräfte, auch den WL der Lagerreaktionen, zeichnen (Bild 3).
2. KP mit Polstrahlen zeichnen und damit F_r ermitteln (Bild 4).
3. Seileck im LP zeichnen. Bei senkrechten parallelen Kräften kann der Anfangspunkt beliebig auf die WL des Festlagers gelegt werden. Treten schräge Belastungen auf, muss der Anfangspunkt in das Festlager gelegt werden (Punkt a, Bild 3). Dies ist der erste Punkt der Schlusslinie. Der zweite Punkt (b) der Schlusslinie ergibt sich im Schnittpunkt des letzten Seilstrahls (hier 2) mit der WL der Reaktionskraft des Loslagers.
4. Punkte (a) und (b) geradlinig verbinden. Diese Verbindungslinie ist die **Schlusslinie S**.
5. Schlusslinie S parallel durch den Pol 0 in den KP verschieben. Damit wird $(-F_{ry})$ in die senkrechten Lagerreaktionen F_{Ay} und F_{By} aufgeteilt.
6. $F_{Ax} = -F_{rx}$.



A16 Bestimmung von Schwerpunkten mittels Momentensatz → A17 C13

16.2 Linienschwerpunkte

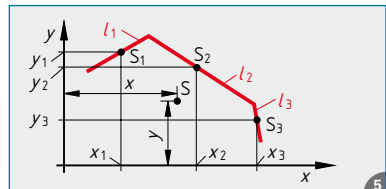
(zeichnerische Lösung → A17)

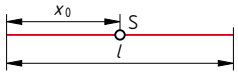
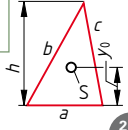
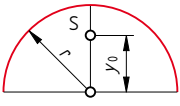
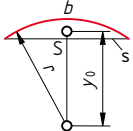
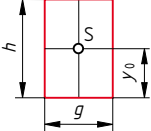
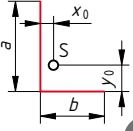
x-Komponente:

$$x = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + \dots}{l_1 + l_2 + \dots}$$

y-Komponente:

$$y = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2 + \dots}{l_1 + l_2 + \dots}$$



gerader Linienzug $x_0 = \frac{l}{2}$ 	Umfang eines Dreiecks $y_0 = \frac{h \cdot (b + c)}{2 \cdot (a + b + c)}$ 	Halbkreisbogen $y_0 = \frac{2 \cdot r}{\pi}$ 
Kreisbogen $y_0 = r \cdot \frac{s}{b}$ 	Umfang eines Rechtecks $y_0 = \frac{h}{2}$ 	rechter Winkel $x_0 = \frac{b^2}{2 \cdot (a + b)}$ $y_0 = \frac{a^2}{2 \cdot (a + b)}$ 

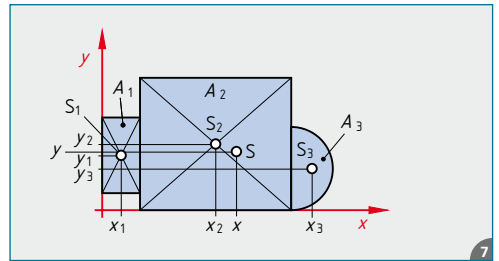
16.3 Flächenschwerpunkte → A19 C13

Die **Gesamtfläche in Teilflächen** ($A_1, A_2, \dots$) mit bekannter Schwerpunktlage zerlegen. Der **Momentensatz** liefert:

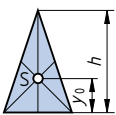
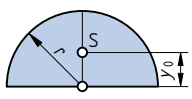
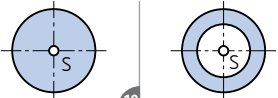
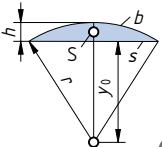
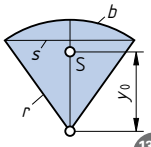
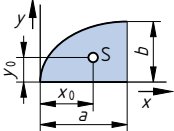
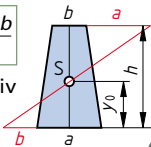
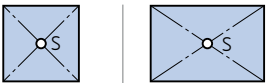
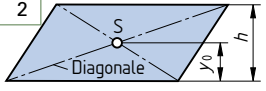
$$x = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \quad \text{x-Komponente}$$

$$y = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \quad \text{y-Komponente}$$

Flächenmomente und Flächen von Bohrungen sind in der Rechnung abzuziehen!



zeichnerische Lösung → A17

Dreieck $y_0 = \frac{h}{3}$ Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. 	Halbkreis $y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$ $y_0 \approx 0,424 \cdot r$ 	Kreis, Kreisring Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt. 
Kreisabschnitt $y_0 = \frac{s^3}{12 \cdot A}$ A = Fläche 	Kreisausschnitt (Sektor) $y_0 = \frac{2 \cdot r \cdot s}{3 \cdot b}$ 	Parabelhalbierung $x_0 = \frac{3}{5} \cdot a$ $y_0 = \frac{3}{8} \cdot b$ 
Trapez $y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2 \cdot b}{a + b}$ oder konstruktiv 	Quadrat, Rechteck Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt = Diagonalschnittpunkt 	Parallelogramm $y_0 = \frac{h}{2}$ 

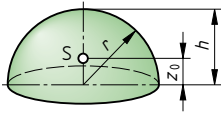
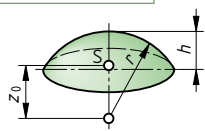
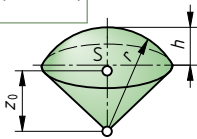
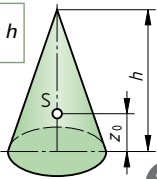
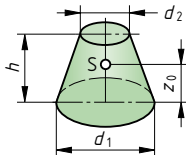
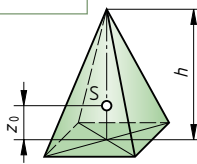
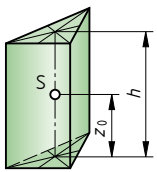
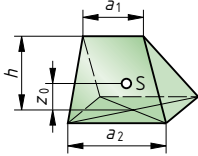
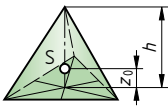
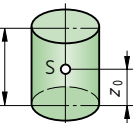
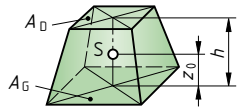
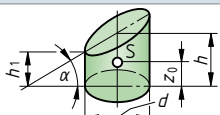
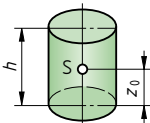
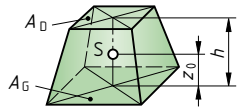
16.4 Körperschwerpunkte → B15

$$x = \frac{V_1 \cdot x_1 + V_2 \cdot x_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots} \quad \text{x-Komponente}$$

$$y = \frac{V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots} \quad \text{y-Komponente}$$

$$z = \frac{V_1 \cdot z_1 + V_2 \cdot z_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots} \quad \text{z-Komponente}$$

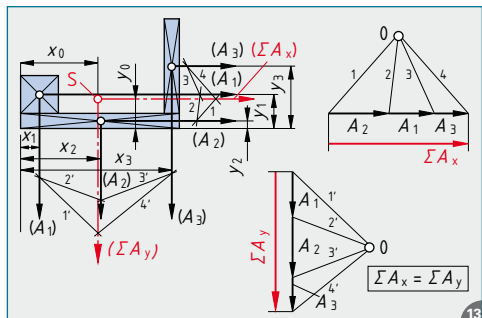
$x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots \rightarrow$ Lage der Einzelschwerpunkte
 $V_1, \dots, V_2 \rightarrow$ Volumen der Einzelkörper

Kugel, Hohlkugel Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt. $y_0 = r = \frac{d}{2}$ <i>r</i> Außenradius <i>d</i> Außendurchmesser	Halbkugel $z_0 = \frac{3}{8} \cdot r = 0,375 \cdot r$ 	Kugelabschnitt $z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2 \cdot r - h)^2}{3 \cdot r - h}$ 
Kugelausschnitt $z_0 = \frac{3}{8} \cdot (2 \cdot r - h)$ 	Kegel $z_0 = \frac{h}{4} = 0,25 \cdot h$ 	Kegelstumpf $z_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{d_1^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 + 3 \cdot d_2^2}{d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2}$ 
Pyramide $z_0 = \frac{h}{4} = 0,25 \cdot h$ 	Prisma $z_0 = \frac{h}{2}$ Gültig für alle Körper mit parallelen Körperkanten und paralleler Grund- und Deckfläche. 	Keil $z_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{a_2 + a_1}{2 \cdot a_2 + a_1}$ 
Tetraeder $z_0 = \frac{h}{4}$ 	Quader, Rechtecksäule, Würfel Der Schwerpunkt ist mit dem Schnittpunkt der Raumdiagonalen identisch. 	Pyramidenstumpf $z_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + 3 \cdot A_D}{A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D}$ 
schief abgeschnittener Zylinder $r = \frac{d}{2}$ $z_0 = \frac{h + h_1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 \cdot \tan^2 \alpha}{h + h_1}$ 	Zylinder, Hohlzylinder $z_0 = \frac{h}{2}$ wie Prisma 	

A17 Bestimmung von Schwerpunkten mittels Seileckkonstruktion

→ A12 A16

Bei **Flächenschwerpunkten** → A16 werden die Beträge der **Teilflächen** wie die **Kräfte bei der Seileckkonstruktion** → A12 behandelt. Dies zeigt **Bild 13**. Da zur Bestimmung eines Schwerpunktes zwei Schwerlinien erforderlich sind, muss das Seileckverfahren in *x*- und *y*-Richtung angewendet werden. Die Schwerpunktlage der Teilflächen (*A*₁, *A*₂ ...) muss bekannt sein. Bei **Linien Schwerpunkten** → A16 wird entsprechendes verfahren. Hier werden die Teillängen (*l*₁, *l*₂ ...) wie die **Kräfte bei der Seileckkonstruktion** behandelt, und zwar analog **Bild 13**, ebenfalls in *x*- und *y*-Richtung.



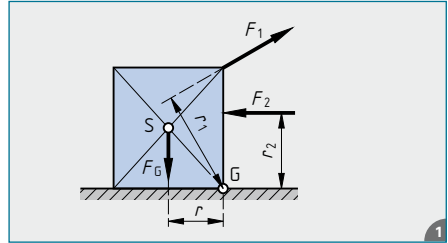
A18 Gleichgewicht und Kippen → A2 A13

18.2 Standfestigkeit der Körper

$$F_1 \cdot r_1 \rightarrow \text{Kippmoment} \rightarrow M_K \text{ in Nm}$$

$$F_G \cdot r, F_2 \cdot r_2 \rightarrow \text{Standmomente} \rightarrow M_S \text{ in Nm}$$

Standfestigkeit ist vorhanden, wenn ein Körper Kippkanten (Kipp-Punkte) hat (Punkt G in Bild 1) und das Lot des Schwerpunktes die Standfläche innerhalb der Kippkanten trifft.



18.3 Kippsicherheit

$$\nu_K = \frac{\Sigma M_S}{\Sigma M_K}$$

Stabiles Gleichgewicht → $\nu_K > 1$

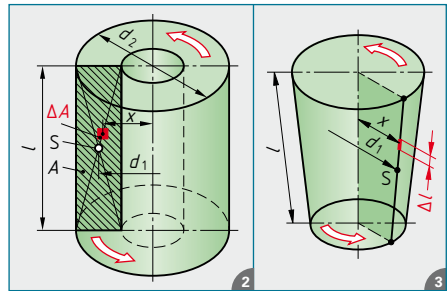
ΣM_S Summe aller Standmomente Nm
 ΣM_K Summe aller Kippmomente Nm

A19 Regeln von Guldin → A16 A17

19.1 Volumen eines Rotationskörpers

$$V = \pi \cdot d_1 \cdot A \rightarrow \text{Bild 2}$$

Der Rauminhalt (Volumen) eines Rotationskörpers (Drehkörpers) errechnet sich aus dem Produkt der Profilfläche (Drehfläche) A und ihrem Schwerpunktweg bei einer Umdrehung um die Rotationsachse $d_1 \cdot \pi$.



A Drehfläche (Profilfläche) m²
 d_1 Durchmesser des Schwerpunktweges der Drehfläche m
V Volumen des Rotationskörpers m³

19.1 Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$A = \pi \cdot d_1 \cdot l \rightarrow \text{Bild 3}$$

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers errechnet sich aus dem Produkt der Länge der Mantellinie l und ihrem Schwerpunktweg bei einer Umdrehung um die Rotationsachse $d_1 \cdot \pi$.

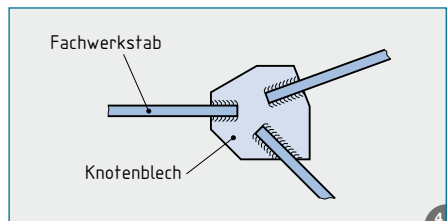
A Mantelfläche m²
 d_1 Durchmesser des Schwerpunktweges der Mantellinie m
l Länge der Mantellinie m

Anmerkung: Die Oberfläche errechnet sich aus der Summe von Mantelfläche, Grundfläche und Deckfläche des Rotationskörpers.

A20 Statisch bestimmtes ebenes Fachwerk → A9 A13 A15

20.2 Das ideale Fachwerk

1. Stabschwerachsen schneiden sich alle im Knotenpunkt (Bild 4).
2. Kraftangriffe erfolgen nur in den Knoten (idealisieren).
3. Die Stäbe sind (idealisiert) durch reibungsfreie Gelenke verbunden. In den Knoten erfolgt demzufolge keine Momentenübertragung.



20.3 Bedingung des statisch bestimmten Fachwerks → A9 A13

$$s = 2 \cdot k - 3$$

↓
Statisch
bestimmt

Wegen der Anzahl der Lösungsgleichungen $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_d = 0$ muss s mit k in einem bestimmten Verhältnis stehen. Nur so ist das Fachwerksystem statisch bestimmt.

s Anzahl der Fachwerkstäbe 1
 k Anzahl der Knoten 1

In jedem Knoten muss die erste und zweite Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein.

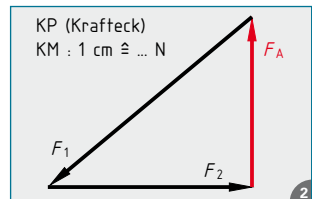
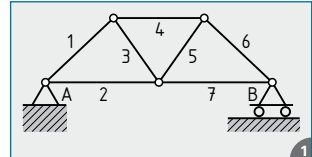
A21 Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Krafteck → A8 A10

• Lösungsschritte zur Berechnung eines ebenen Fachwerksystems → A13 A15

1. Überprüfung auf statische Bestimmtheit
2. Bestimmung der Auflagerkräfte F_{Ax} , F_{Ay} und F_B
3. Bestimmung der Stabkräfte
4. Dimensionierung der Stäbe und Lager → Festigkeitslehre

Beginn mit einem Knoten mit nicht mehr als zwei unbekannten Stabkräften und einer von außen wirkenden Kraft (z.B. Knoten A in Bild 1). Das Krafteck zeigt Bild 2.

Ist eine Stabkraft auf den Knoten hingerichtet, dann ist dieser Stab ein **Druckstab** (-).
Ist eine Stabkraft vom Knoten weggerichtet, dann ist dieser Stab ein **Zugstab** (+).



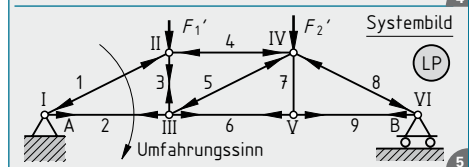
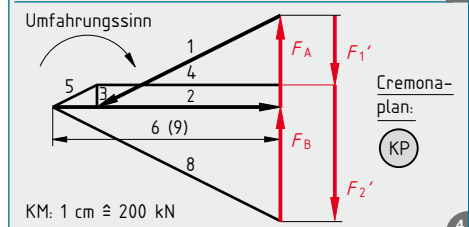
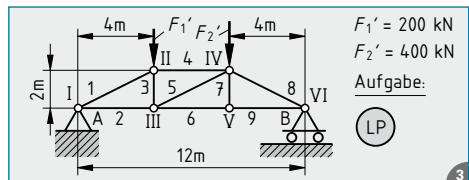
• Vorzeichen der Stabkräfte und Wertetafel → C3

Zugstab → + } Alle Stabkräfte werden in einer Wertetafel aufgelistet. } Beispiel →
Druckstab → - }

Stab	Stabkraft in kN
1	-7,8
2	+6,5
...	...

A22 Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels Cremonaplan → A8 A10 A13 A15 A21 C3

1. Statische Bestimmtheit prüfen → A20
2. Bestimmung der Auflagerkräfte → A15
3. Krafteck aller äußeren Kräfte – einschließlich Lagerkräfte – zeichnen (rot in Bild 4). Dabei Kräfte im vorher gewählten **Umfahrungssinn** (Kraftfolgesinn) aneinanderreihen (z.B. im Uhrzeigersinn).
4. Zur Bestimmung der Stabkräfte geht man von einem Knoten aus, an welchem nur zwei unbekannte Stabkräfte vorkommen und zeichnet für diesen Knotenpunkt das Krafteck an das bereits (rot) gezeichnete Krafteck aller äußeren Kräfte. Dies geschieht nun anschließend an dieses Krafteck für jeden folgenden Knotenpunkt, wobei aber stets die Bedingung gilt, dass nur zwei unbekannte Stabkräfte vorhanden sein dürfen.
5. Jeder Knotenpunkt ist beim Zeichnen seines Krafteckes im Umfassungssinn (3.) zu umfahren.
6. Kraftpfeile vom KP in das **Systembild** LP (Bild 5) übertragen ergibt Zugstäbe (+) und Druckstäbe (-). → A21



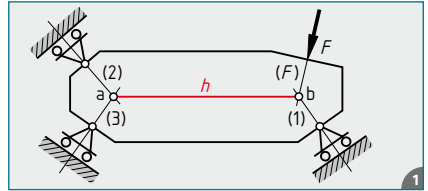
A23 Zeichnerische Stabkraftermittlung mittels

Culmannschem Schnittverfahren → A8 A9 A10 A13

• Vier-Kräfte-Verfahren → A5

Vier Kräfte stehen bei ihrem Wirken auf einen Körper im Gleichgewicht, wenn sich die Resultierenden je zweier Kräfte aufheben.

Diese beiden Resultierenden müssen auf einer gemeinsamen WL liegen. Diese ist die **Culmannsche Gerade h** (Bild 1).



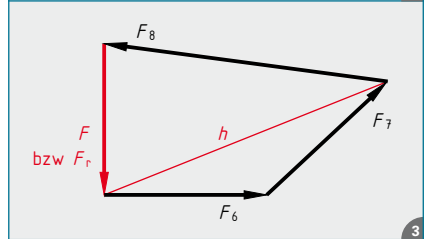
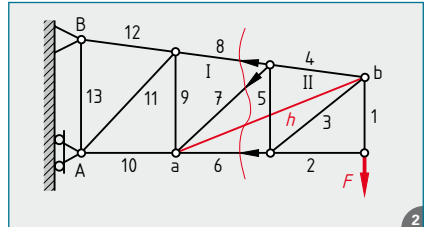
• Culmannsches Schnittverfahren

→ A8 A9 A13

Wendet man das **Vier-Kräfte-Verfahren** unter Einschluss der äußeren Kräfte, die zu einer Resultierenden zusammengefasst werden können, an, dann folgt:

Mit dem Culmannschen Schnittverfahren lassen sich maximal drei Stabkräfte ermitteln.

Man schneidet deshalb gedanklich das Fachwerk durch maximal drei Stäbe in zwei Teile I und II (rote Schlangenlinie im Bild 2). So lassen sich z.B. die Kräfte F_6 , F_7 und F_8 ermitteln. Diese werden **zunächst als Zugkräfte angenommen**. F_6 mit F_7 und F mit F_8 zum Schnitt gebracht, ergeben die Punkte a und b. Verbindung a – b: **Culmannsche Gerade h**. Mit Hilfe von h wird das Kräfteck (Bild 3) gezeichnet. Man erkennt: Stab 6: Druckstab (F_6 drückt auf den Knoten), Stab 7: Druckstab, Stab 8: Zugstab.



Wird der Trägerteil betrachtet, auf den Stützkräfte wirken (z.B. Bild 2, Teil I), dann müssen diese Stützkräfte mit berücksichtigt werden.

A24 Rechnerische Stabkraftermittlung mittels

Ritterschem Schnittverfahren → A13 A14 A23

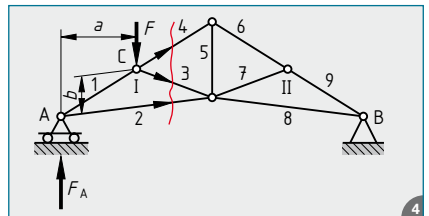
Wie bei Culmann: Fachwerk in zwei Teile I und II gedanklich zerlegen (rote Schlangenlinie in Bild 4).

Mit dem Ritterschen Schnitt maximal drei Stäbe schneiden. Diese sind zunächst als **Zugkräfte in die Rechnung einzusetzen**.

Durch die **Wahl von Drehpunkten in Knoten** wird erreicht, dass Kräfte, deren WL durch diese Drehpunkte gehen, keine Momente erzeugen.

Beispiel: $-F_A \cdot a + F_2 \cdot b = 0 \rightarrow F_2 = F_A \cdot \frac{a}{b}$ → Hebelarme aus LP abgreifen oder berechnen.

Wird das Ergebnis negativ, dann war die Annahme einer Zugkraft falsch. d.h. Druckstab.



A25 Die Reibungskräfte → A26 A32 B6 B10 B11

25.1 Äußere und innere Reibung

äußere Reibung → Reibung zwischen den Außenflächen von Festkörpern. Nur die äußere Reibung ist Gegenstand dieser Formel- und Tabellensammlung.

innere Reibung → **Fluidreibung** → **Mechanik der Flüssigkeiten und Gase**.