

**Tabelle 6.2 Differenziationsregeln** (s. S. 450)

Regel	Formel für die Ableitung
Konstantenregel	$c' = 0 \quad (c \text{ const})$
Faktorregel	$(cu)' = cu' \quad (c \text{ const})$
Summenregel	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel für zwei Funktionen	$(uv)' = u'v + uv'$
Produktregel für $n$ Funktionen	$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^n u_1 \cdots u_i' \cdots u_n$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
Kettenregel für zwei Funktionen	$y = u(v(x)):$ $y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$
Kettenregel für drei Funktionen	$y = u(v(w(x))):$ $y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dw} \frac{dw}{dx}$
Potenzregel	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$ speziell: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
Logarithmische Differenziation	$\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y} y' \implies y' = y \frac{d(\ln y)}{dx}$ speziell: $(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) \quad (u > 0)$
Differenziation der Umkehrfunktion	$\varphi$ inverse Funktion zu $f$ , d. h. $y = f(x) \iff x = \varphi(y)$ : $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
Implizite Differenziation	$F(x, y) = 0:$ $F_x + F_y y' = 0$ oder $y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad \left( F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}; F_y \neq 0 \right)$
Ableitung in Parameterdarstellung	$x = x(t), y = y(t)$ ( $t$ Parameter): $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left( \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$
Ableitung in Polarkoordinaten	$\rho = \rho(\varphi):$ $\begin{aligned} x &= \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y &= \rho(\varphi) \sin \varphi \end{aligned}$ (Winkel $\varphi$ als Parameter) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi} \quad \left( \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \right)$

	Inhaltsverzeichnis .....	V	⇒
	Tabellenverzeichnis .....	XXXIX	⇒
1	Arithmetik .....	1	⇒
2	Funktionen und ihre Darstellung .....	49	⇒
3	Geometrie .....	132	⇒
4	Lineare Algebra .....	277	⇒
5	Algebra und Diskrete Mathematik .....	330	⇒
6	Differenzialrechnung .....	444	⇒
7	Unendliche Reihen .....	470	⇒
8	Integralrechnung .....	493	⇒
9	Differenzialgleichungen .....	553	⇒
10	Variationsrechnung .....	625	⇒
11	Lineare Integralgleichungen .....	636	⇒
12	Funktionalanalysis .....	669	⇒
13	Vektoranalysis und Feldtheorie .....	716	⇒
14	Funktionentheorie .....	745	⇒
15	Integraltransformationen .....	781	⇒
16	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik .....	819	⇒
17	Dynamische Systeme und Chaos .....	871	⇒
18	Optimierung .....	923	⇒
19	Numerische Mathematik .....	964	⇒
20	Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica .....	1040	⇒
21	Tabellen .....	1071	⇒
22	Literatur .....	1159	⇒
	Stichwortverzeichnis .....	1177	⇒





Edition  
Harri   
Deutsch 

# Taschenbuch der Mathematik

von

I. N. Bronstein

K. A. Semendjajew

G. Musiol

H. Mühlig

**10., überarbeitete Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56726** (Mit Multiplattform-CD-ROM DeskTop Bronstein)

**Europa-Nr.: 56702** (Ohne Multiplattform-CD-ROM DeskTop Bronstein)

Im Auftrag des Verlages Harri Deutsch erarbeitete und erweiterte Lizenzausgabe der bis 1977 erschienenen russischen Originalausgabe:

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten  
©FIZMATLIT, Moskau

10., überarbeitete Auflage 2016, 2018

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5790-7 (Mit Multiplattform-CD-ROM DeskTop Bronstein)

ISBN 978-3-8085-5789-1 (Ohne Multiplattform-CD-ROM DeskTop Bronstein)

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Prof. Dr. G. Musiol, 01127 Dresden

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: CPI | Ebner & Spiegel, 89075 Ulm

## Vorwort zur zehnten deutschen Auflage

Auch im Internetzeitalter bleibt der BRONSTEIN das Nachschlagewerk der Mathematik.

In die zehnte Auflage sind wieder kleine Verbesserungen und Ergänzungen eingeflossen, die sich nicht zuletzt durch die Korrespondenz mit den Lesern der deutschen und der zahlreichen fremdsprachigen Ausgaben des BRONSTEIN ergaben. Dafür möchten wir uns bei allen Lesern herzlich bedanken.

Ebenso gilt unser Dank dem Verlag Europa-Lehrmittel, insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn, für die seit vielen Auflagen bewährte gute Zusammenarbeit.

Dresden, im November 2015

Prof. Dr. Gerhard Musiol

Prof. Dr. Heiner Mühlig

## Vorwort zur neunten deutschen Auflage

Die Übernahme des Titels „Taschenbuch der Mathematik“ von I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig (bisher erschienen im Verlag Harri Deutsch) vom Verlag EUROPA-Lehrmittel ermöglichte die Herausgabe einer neuen, der 9. Auflage, bereits im zweiten Jahr nach dem Erscheinen der 8. deutschen Auflage.

Neben wenigen Korrekturen sind eine Reihe Verbesserungen und Ergänzungen vorgenommen worden, die sich zwischenzeitlich bei der Bearbeitung der 5. zur 6. englischen Auflage des Springer Verlages ergeben haben.

Dem Verlag Europa Lehrmittel, Edition Harri Deutsch, insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn, danken wir für die fortwährend bestehende fruchtbare Zusammenarbeit.

Dresden, im August 2013

Prof. Dr. Gerhard Musiol

Prof. Dr. Heiner Mühlig

## Vorwort zur achten deutschen Auflage

Ein Nachschlagewerk und Taschenbuch der Mathematik, wie es der „BRONSTEIN“ darstellt, lebt insbesondere auch dadurch, dass die Autoren von Auflage zu Auflage den sich wandelnden Anforderungen eines breiten Nutzerkreises gerecht werden und immer wieder den praxisnahen zeitgerechten Bezug sicherstellen. So ist die 8. deutsche Auflage eine bearbeitete und ergänzte Version der 7. deutschen Auflage.

Das Taschenbuch enthält einen Querschnitt der Mathematik, wie er sowohl für Studenten als auch für praktisch tätige Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker sowie für die einschlägigen Hochschullehrer erforderlich ist. Dem traditionellen Anliegen des Buches – vorgegeben von den Erstautoren I. N. BRONSTEIN und K. A. SEMENDJAJEW (1937) – folgend, stehen Anschaulichkeit und leichte Verständlichkeit für den Ingenieur und Naturwissenschaftler im Vordergrund. So sind für diesen Nutzerkreis Grenzen der Anwendbarkeit und Hinweise auf Besonderheiten bei Anwendungen wichtiger als möglichst allgemeine Formulierungen und strenge mathematische Beweise. Für weitergehende Fragen wird jeweils auf die Fachliteratur verwiesen.

Ein Anliegen bei der Vorbereitung der 8. deutschen Auflage war auch darauf gerichtet, neueren Ansprüchen gerecht zu werden, die sich insbesondere aus der Korrespondenz mit Lesern, Fachkollegen und Koautoren ergeben hatten. Im Gefolge sind eine Reihe kleinerer Änderungen und Ergänzungen entstanden, darunter neue, instruktive Beispiele.

Daneben galt das Augenmerk der weiteren Verbesserung der Verständlichkeit und der Anschaulichkeit.

Auch für die 8. deutsche Auflage steht wieder eine aktuelle elektronische Version zur Verfügung, die den kompletten Inhalt des Buches als vernetzte HTML-Struktur mit farbigen Abbildungen und einer integrierten Suchfunktion enthält. Diese auf einem erweiterten Index basierende Suchmöglichkeit, die einen schnellen Zugriff auf alle Inhalte zu einem vorgegebenen Stichwort erlaubt, hat sich als ausgesprochen nützlich erwiesen; desgleichen die Tatsache, dass der elektronische BRONSTEIN auf allen gängigen Plattformen ohne Installation direkt von der CD-ROM läuft. So bietet der BRONSTEIN mit seinem hohen Informationsgehalt einen schnellen Zugriff auf ein breites mathematisches Wissen.

Wie bereits in der 7. Auflage praktiziert, enthält die CD-ROM auch diesmal nicht nur den Inhalt des gesamten Buches, sondern zusätzlich die beiden seit der 7. Auflage eingebrachten Kapitel „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ und „Quantencomputer“. Das Unterkapitel „LIE-Gruppen und LIE-Algebren“ im Buch ist vorwiegend für Ingenieure gedacht, die in der CD-ROM enthaltene Variante für Physiker. In Ergänzung zum Buch werden im Unterkapitel „Partielle Differenzialgleichungen“ der CD-ROM auch weiterführende Methoden für partielle Differenzialgleichungen behandelt.

Allen Lesern, Fachkollegen und Koautoren, die mit ihren Stellungnahmen, Bemerkungen, Anregungen und Zuarbeiten zu den vorangegangenen Auflagen des Buches die Überarbeitung erleichtert haben, möchten wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank zum Ausdruck bringen. Besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Math. Walter Heß für zahlreiche kritische Hinweise.

Dem Verlag Harri Deutsch, insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn, danken wir für die seit vielen Jahren bestehende fruchtbare Zusammenarbeit.

Dresden, im März 2012

Prof. Dr. Gerhard Musiol

Prof. Dr. Heiner Mühlig

## Aus dem Vorwort zur siebten Auflage

Für die Neubearbeitung des BRONSTEIN (1992) hatten sich der Verlag Harri Deutsch und die neuen Herausgeber und Autoren G. MUSIOL und H. MÜHLIG im Vergleich zur ursprünglich zugrunde liegenden 3. russischen Auflage die Aufgabe gestellt, diejenigen Gebiete der Mathematik stärker zu betonen bzw. neu einzubringen, die im Hinblick auf die zunehmende mathematische Modellierung und mathematische Durchdringung technischer und naturwissenschaftlicher Prozesse sowie die Nutzung von Computern an Bedeutung gewonnen hatten. Dementsprechend wurden in die ersten Auflagen u. a. die folgenden Kapitel bzw. Abschnitte aufgenommen:

„Computeralgebrasysteme“, „Nutzung von Computern in der Numerischen Mathematik“, „Dynamische Systeme und Chaos“, „Funktionalanalysis“, „Integralgleichungen“, „Variationsrechnung“, „Integraltransformationen“, „Optimierung“ und „Numerische Mathematik“. Das frühere Kapitel „Algebra“ wurde zu „Algebra und Diskrete Mathematik“ erweitert und enthält jetzt auch die Unterkapitel „Elementare Zahlentheorie“, „Kryptologie“, „Algorithmen der Graphentheorie“ und „Fuzzy-Logik“.

Auch klassische Gebiete erfuhren Ergänzungen:

Das Kapitel „Geometrie“ z. B. wurde durch „Geodätische Anwendungen“ der Trigonometrie und durch ein ausführliches Unterkapitel „Sphärische Trigonometrie“ ergänzt; in das Kapitel „Funktionentheorie“

wurden die „Elliptischen Funktionen“ aufgenommen, im neu gestalteten Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik“ die Abschnitte „Monte–Carlo–Methode“, „Stochastische Prozesse“ und „Stochastische Ketten“ und im Kapitel „Numerische Mathematik“ die „Methode der finiten Elemente“ und die „Schnelle Fourier–Analyse“.

In einzelnen Kapiteln wurden Formelübersichten in tabellarischer Form aufgenommen (besonders zur Geometrie, zur Differenzial- und Integralrechnung und zur Vektoranalysis und Feldtheorie), die das praktische Arbeiten erleichtern.

In die 7., überarbeitete und ergänzte Auflage sind alle Ergänzungen und Verbesserungen, die in die 5. englischsprachige Auflage (Springer-Verlag 2005) eingeflossen sind, berücksichtigt worden. Außerdem erhielt die 7. Auflage im Hinblick auf Anwendungen in der Bildverarbeitung und Robotik eine zusammenfassende Darstellung von geometrischen Transformationen und Koordinatentransformationen, wie sie z. B. bei der Beschreibung von Bewegungsabläufen gebraucht werden. Unter dem gleichen Gesichtspunkt wird eine Einführung zu Lie–Gruppen und Lie–Algebren sowie zu Quaternionen gegeben, die Anwendung in der Computergrafik und in der Satellitennavigation finden.

Der Abschnitt „Evolutionsstrategien in der nichtlinearen Optimierung“ wurde erweitert und unterstreicht damit die allgemeine Bedeutung dieser Optimierungsstrategie.

Das Kapitel „Numerische Mathematik“ ergänzt die wichtigsten numerischen Aufgaben durch ihre Beschreibung und Lösung in den Computeralgebrasystemen Matlab, Mathematica und Maple.

Allen Lesern und Fachkollegen, die mit ihren Stellungnahmen, Bemerkungen und Anregungen zu den vorangegangenen Auflagen des Buches die Überarbeitung erleichtert haben, möchten wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank sagen. Dem Verlag Harri Deutsch danken wir für die nunmehr schon traditionell gewordene effektive Zusammenarbeit.

Dresden, im März 2008

Prof. Dr. Gerhard Musiol

Prof. Dr. Heiner Mühlig

## Aus dem Vorwort zur Neubearbeitung des „Bronstein“

Der „BRONSTEIN“ ist im deutschsprachigen Raum für Generationen von Ingenieuren und Naturwissenschaftlern und darüber hinaus für viele, die in Ausbildung und Beruf mit Anwendungen der Mathematik befasst sind, zu einem festen Begriff geworden. Warum also eine Neubearbeitung auf der Basis der letzten russischen Ausgabe\*, die bis 1977 erschien?

Abgesehen von verlagsrechtlichen Gründen wird mit der vorliegenden Neubearbeitung vor allem das Ziel verfolgt, dem „BRONSTEIN“ einen zeitgerechten praxisnahen Bezug zu geben, wie ihn zahlreiche befragte Nutzer sich wünschen.

Besonderer Dank gilt dem russischen Originalverlag FIZMATLIT und den Rechtsnachfolgern der Originalautoren dafür, dass sie die Zustimmung zur notwendigen Anpassung an die heutigen Ansprüche des Nutzerkreises und der damit verbundenen freien Überarbeitung gaben.

Dresden, im Juni 1993

Prof. Dr. Gerhard Musiol

Prof. Dr. Heiner Mühlig

---

\*Der Neuübersetzung des russischsprachigen Originals liegt die 3. Auflage (Moskau 1953) zu Grunde.



## Koautoren

Einige Kapitel und Abschnitte sind in Zusammenarbeit mit Koautoren entstanden.

Kapitel bzw. Abschnitt	Koautor
Sphärische Trigonometrie (3.4.1 bis 3.4.3.3)	Dr. H. NICKEL †, Dresden
Sphärische Kurven (3.4.3.4)	Prof. L. MARSOLEK, Berlin
Geometrische Transformationen, Koordinatentransformationen, Planare Projektionen (3.5.4, 3.5.5)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Quaternionen und Anwendungen (4.4),	PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen)
Logik (5.1), Mengenlehre (5.2), Klassische Algebraische Strukturen (5.3), Anwendungen von Gruppen (außer 5.3.4, 5.3.5.4 bis 5.3.5.6), Ringe und Körper (5.3.7), Vektorräume (5.3.8), BOOLEsche Algebra und Schaltalgebra (5.7), Universelle Algebra (5.6), Darstellung von Gruppen (5.3.4), weitere Anwendungen von Gruppen (5.3.5.4 bis 5.3.5.6)	Dr. J. BRUNNER, Dresden
LIE-Gruppen und LIE-Algebren (5.3.6)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Zahlentheorie, Kryptologie, Graphen (5.4, 5.5, 5.8)	PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen)
Fuzzy-Logik (5.9)	Prof. Dr. U. BAUMANN, Dresden
Wichtige Formeln für die Sphärischen BESSEL-Funktionen (9.1.2.5, 2, 5)	Prof. Dr. A. GRAUEL, Soest
Statistische Interpretation der Wellenfunktion (9.2.4.4)	Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden
Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos (9.2.5)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung, Lösungen (9.2.5.3, 2)	Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden
Integralgleichungen (11)	Dr. J. BRAND, Dresden
Funktionalanalysis (12)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Elliptische Funktionen (14.6)	Prof. Dr. M. WEBER, Dresden
Dynamische Systeme und Chaos (17)	Dr. N. M. FLEISCHER †, Moskau
Optimierung (18)	Prof. Dr. V. REITMANN, St. Petersburg
Nutzung von Computern: (19.8.1, 19.8.2), Interaktive Systeme: Mathematica (19.8.4.2), Maple (19.8.4.3), Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Interaktive Systeme: Matlab (19.8.4.1)	Prof. Dr. G. FLACH, Dresden
Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20): Anpassung an Mathematica 10	PD Dr. B. MULANSKY, Clausthal
	Dr. J. Tóth, Budapest

## Zusätzliche Kapitel mit Koautoren in der CD-ROM.

LIE-Gruppen (5.3.5), LIE-Algebren (5.3.6)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Nichtlineare Partielle Differenzialgleichungen: Inverse Streutheorie (Methoden in Analogie zur FOURIER-Methode) (9.2.6)	Dr. B. RUMPF, Dresden
Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (21)	Prof. Dr. A. BUCHLEITNER, PD Dr. M. TIERSCH,
Quantencomputer (22)	Dr. Th. WELLENS, Freiburg
	Prof. Dr. A. BUCHLEITNER, PD Dr. M. TIERSCH,
	Dr. Th. WELLENS, Freiburg

# Inhaltsverzeichnis

## Tabellenverzeichnis

XXXIX

<b>1</b>	<b>Arithmetik</b>	<b>1</b>
1.1	Elementare Rechenregeln . . . . .	1
1.1.1	Zahlen . . . . .	1
1.1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen . . . . .	1
1.1.1.2	Irrationale und transzendente Zahlen . . . . .	1
1.1.1.3	Reelle Zahlen . . . . .	2
1.1.1.4	Kettenbrüche . . . . .	3
1.1.1.5	Kommensurabilität . . . . .	4
1.1.2	Beweismethoden . . . . .	5
1.1.2.1	Direkter Beweis . . . . .	5
1.1.2.2	Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch . . . . .	5
1.1.2.3	Vollständige Induktion . . . . .	5
1.1.2.4	Konstruktiver Beweis . . . . .	6
1.1.3	Summen und Produkte . . . . .	6
1.1.3.1	Summen . . . . .	6
1.1.3.2	Produkte . . . . .	7
1.1.4	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen . . . . .	8
1.1.4.1	Potenzen . . . . .	8
1.1.4.2	Wurzeln . . . . .	8
1.1.4.3	Logarithmen . . . . .	9
1.1.4.4	Spezielle Logarithmen . . . . .	9
1.1.5	Algebraische Ausdrücke . . . . .	10
1.1.5.1	Definitionen . . . . .	10
1.1.5.2	Einteilung der algebraischen Ausdrücke . . . . .	11
1.1.6	Ganzrationale Ausdrücke . . . . .	11
1.1.6.1	Darstellung in Form eines Polynoms . . . . .	11
1.1.6.2	Zerlegung eines Polynoms in Faktoren . . . . .	11
1.1.6.3	Spezielle Formeln . . . . .	12
1.1.6.4	Binomischer Satz . . . . .	12
1.1.6.5	Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome . . . . .	14
1.1.7	Gebrochenrationale Ausdrücke . . . . .	14
1.1.7.1	Rückführung auf die einfachste Form . . . . .	14
1.1.7.2	Bestimmung des ganzrationalen Anteils . . . . .	15
1.1.7.3	Partialbruchzerlegung . . . . .	15
1.1.7.4	Umformung von Proportionen . . . . .	17
1.1.8	Irrationale Ausdrücke . . . . .	17
1.2	Endliche Reihen . . . . .	19
1.2.1	Definition der endlichen Reihe . . . . .	19
1.2.2	Arithmetische Reihen . . . . .	19
1.2.3	Geometrische Reihe . . . . .	20
1.2.4	Spezielle endliche Reihen . . . . .	20
1.2.5	Mittelwerte . . . . .	20
1.2.5.1	Arithmetisches Mittel . . . . .	20
1.2.5.2	Geometrisches Mittel . . . . .	21
1.2.5.3	Harmonisches Mittel . . . . .	21
1.2.5.4	Quadratisches Mittel . . . . .	21
1.2.5.5	Vergleich der Mittelwerte für zwei positive Größen $a$ und $b$ . . . . .	21

1.3	Finanzmathematik . . . . .	22
1.3.1	Prozentrechnung . . . . .	22
1.3.1.1	Prozent . . . . .	22
1.3.1.2	Aufschlag . . . . .	22
1.3.1.3	Abschlag oder Rabatt . . . . .	22
1.3.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	23
1.3.2.1	Zinsen . . . . .	23
1.3.2.2	Zinseszinsen . . . . .	23
1.3.3	Tilgungsrechnung . . . . .	24
1.3.3.1	Tilgung . . . . .	24
1.3.3.2	Gleiche Tilgungsraten . . . . .	24
1.3.3.3	Gleiche Annuitäten . . . . .	25
1.3.4	Rentenrechnung . . . . .	25
1.3.4.1	Rente . . . . .	25
1.3.4.2	Nachschüssig konstante Rente . . . . .	26
1.3.4.3	Kontostand nach n Rentenzahlungen . . . . .	26
1.3.5	Abschreibungen . . . . .	27
1.3.5.1	Abschreibungsarten . . . . .	27
1.3.5.2	Lineare Abschreibung . . . . .	27
1.3.5.3	Arithmetisch-degressive Abschreibung . . . . .	27
1.3.5.4	Digitale Abschreibung . . . . .	28
1.3.5.5	Geometrisch-degressive Abschreibung . . . . .	28
1.3.5.6	Abschreibung mit verschiedenen Abschreibungsarten . . . . .	29
1.4	Ungleichungen . . . . .	29
1.4.1	Reine Ungleichungen . . . . .	29
1.4.1.1	Definitionen . . . . .	29
1.4.1.2	Eigenschaften der Ungleichungen vom Typ I und II . . . . .	30
1.4.2	Spezielle Ungleichungen . . . . .	31
1.4.2.1	Dreiecksungleichung für reelle Zahlen . . . . .	31
1.4.2.2	Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen . . . . .	31
1.4.2.3	Ungleichungen für den Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen . . . . .	31
1.4.2.4	Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel . . . . .	31
1.4.2.5	Ungleichung für das arithmetische und das quadratische Mittel . . . . .	31
1.4.2.6	Ungleichungen für verschiedene Mittelwerte zweier reeller Zahlen . . . . .	31
1.4.2.7	Bernoullische Ungleichung . . . . .	32
1.4.2.8	Binomische Ungleichung . . . . .	32
1.4.2.9	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . . .	32
1.4.2.10	Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	32
1.4.2.11	Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Ungleichung . . . . .	33
1.4.2.12	Höldersche Ungleichung . . . . .	33
1.4.2.13	Minkowskische Ungleichung . . . . .	34
1.4.3	Lösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades . . . . .	34
1.4.3.1	Allgemeines . . . . .	34
1.4.3.2	Ungleichungen 1. Grades . . . . .	34
1.4.3.3	Ungleichungen 2. Grades . . . . .	34
1.4.3.4	Allgemeiner Fall der Ungleichung 2. Grades . . . . .	35
1.5	Komplexe Zahlen . . . . .	35
1.5.1	Imaginäre und komplexe Zahlen . . . . .	35
1.5.1.1	Imaginäre Einheit . . . . .	35
1.5.1.2	Komplexe Zahlen . . . . .	35
1.5.2	Geometrische Darstellung . . . . .	36
1.5.2.1	Vektordarstellung . . . . .	36

1.5.2.2	Gleichheit komplexer Zahlen . . . . .	36
1.5.2.3	Trigonometrische Form der komplexen Zahlen . . . . .	36
1.5.2.4	Exponentialform einer komplexen Zahl . . . . .	37
1.5.2.5	Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .	37
1.5.3	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	37
1.5.3.1	Addition und Subtraktion . . . . .	37
1.5.3.2	Multiplikation . . . . .	38
1.5.3.3	Division . . . . .	38
1.5.3.4	Allgemeine Regeln für die vier Grundrechenarten . . . . .	39
1.5.3.5	Potenzieren einer komplexen Zahl . . . . .	39
1.5.3.6	Radizieren oder Ziehen der $n$ -ten Wurzel aus einer komplexen Zahl . . . . .	39
1.6	Algebraische und transzendente Gleichungen . . . . .	39
1.6.1	Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform . . . . .	39
1.6.1.1	Definitionen . . . . .	39
1.6.1.2	Systeme aus $n$ algebraischen Gleichungen . . . . .	40
1.6.1.3	Scheinbare Wurzeln . . . . .	40
1.6.2	Gleichungen 1. bis 4. Grades . . . . .	41
1.6.2.1	Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen) . . . . .	41
1.6.2.2	Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen) . . . . .	41
1.6.2.3	Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen) . . . . .	42
1.6.2.4	Gleichungen 4. Grades . . . . .	44
1.6.2.5	Gleichungen 5. und höheren Grades . . . . .	45
1.6.3	Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	45
1.6.3.1	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen . . . . .	45
1.6.3.2	Gleichungen mit reellen Koeffizienten . . . . .	46
1.6.4	Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische Gleichungen . . . . .	47
1.6.4.1	Definition . . . . .	47
1.6.4.2	Exponentialgleichungen . . . . .	47
1.6.4.3	Logarithmische Gleichungen . . . . .	48
1.6.4.4	Trigonometrische Gleichungen . . . . .	48
1.6.4.5	Gleichungen mit Hyperbelfunktionen . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Funktionen und ihre Darstellung</b>	<b>49</b>
2.1	Funktionsbegriff . . . . .	49
2.1.1	Definition der Funktion . . . . .	49
2.1.1.1	Funktion . . . . .	49
2.1.1.2	Reelle Funktion . . . . .	49
2.1.1.3	Funktion von mehreren Veränderlichen . . . . .	49
2.1.1.4	Komplexe Funktion . . . . .	49
2.1.1.5	Weitere Funktionen . . . . .	49
2.1.1.6	Funktionale . . . . .	49
2.1.1.7	Funktion und Abbildung . . . . .	50
2.1.2	Methoden zur Definition einer reellen Funktion . . . . .	50
2.1.2.1	Angabe einer Funktion . . . . .	50
2.1.2.2	Analytische Darstellung reeller Funktionen . . . . .	50
2.1.3	Einige Funktionstypen . . . . .	51
2.1.3.1	Monotone Funktionen . . . . .	51
2.1.3.2	Beschränkte Funktionen . . . . .	52
2.1.3.3	Extremwerte von Funktionen . . . . .	52
2.1.3.4	Gerade Funktionen . . . . .	52
2.1.3.5	Ungerade Funktionen . . . . .	52
2.1.3.6	Darstellung mithilfe gerader und ungerader Funktionen . . . . .	53

	2.1.3.7	Periodische Funktionen . . . . .	53
	2.1.3.8	Inverse oder Umkehrfunktionen . . . . .	53
2.1.4	Grenzwert von Funktionen . . . . .	54	
	2.1.4.1	Definition des Grenzwertes einer Funktion . . . . .	54
	2.1.4.2	Zurückführung auf den Grenzwert einer Folge . . . . .	54
	2.1.4.3	Konvergenzkriterium von Cauchy . . . . .	54
	2.1.4.4	Unendlicher Grenzwert einer Funktion . . . . .	55
	2.1.4.5	Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion . . . . .	55
	2.1.4.6	Grenzwert einer Funktion für $x$ gegen unendlich . . . . .	55
	2.1.4.7	Sätze über Grenzwerte von Funktionen . . . . .	56
	2.1.4.8	Berechnung von Grenzwerten . . . . .	56
	2.1.4.9	Größenordnung von Funktionen und Landau-Symbole . . . . .	58
2.1.5	Stetigkeit einer Funktion . . . . .	59	
	2.1.5.1	Stetigkeit und Unstetigkeitsstelle . . . . .	59
	2.1.5.2	Definition der Stetigkeit . . . . .	60
	2.1.5.3	Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten . . . . .	60
	2.1.5.4	Stetigkeit und Unstetigkeitspunkte elementarer Funktionen . . . . .	61
	2.1.5.5	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	62
2.2	Elementare Funktionen . . . . .	63	
	2.2.1	Algebraische Funktionen . . . . .	63
		2.2.1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	63
		2.2.1.2 Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	63
		2.2.1.3 Irrationale Funktionen . . . . .	64
	2.2.2	Transzendente Funktionen . . . . .	64
		2.2.2.1 Exponentialfunktionen . . . . .	64
		2.2.2.2 Logarithmische Funktionen . . . . .	64
		2.2.2.3 Trigonometrische Funktionen . . . . .	64
		2.2.2.4 Inverse trigonometrische Funktionen . . . . .	64
		2.2.2.5 Hyperbelfunktionen . . . . .	64
		2.2.2.6 Inverse Hyperbelfunktionen . . . . .	64
	2.2.3	Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	64
2.3	Polynome . . . . .	65	
	2.3.1	Lineare Funktion . . . . .	65
	2.3.2	Quadratisches Polynom . . . . .	65
	2.3.3	Polynom 3. Grades . . . . .	65
	2.3.4	Polynom $n$ -ten Grades . . . . .	66
	2.3.5	Parabel $n$ -ter Ordnung . . . . .	66
2.4	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	67	
	2.4.1	Spezielle gebrochen lineare Funktion . . . . .	67
	2.4.2	Gebrochenlineare Funktion . . . . .	67
	2.4.3	Kurve 3. Ordnung, Typ I . . . . .	68
	2.4.4	Kurve 3. Ordnung, Typ II . . . . .	68
	2.4.5	Kurve 3. Ordnung, Typ III . . . . .	69
	2.4.6	Reziproke Potenz . . . . .	71
2.5	Irrationale Funktionen . . . . .	72	
	2.5.1	Quadratwurzel aus einem linearen Binom . . . . .	72
	2.5.2	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom . . . . .	72
	2.5.3	Potenzfunktion . . . . .	72
2.6	Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen . . . . .	73	
	2.6.1	Exponentialfunktion . . . . .	73
	2.6.2	Logarithmische Funktionen . . . . .	73
	2.6.3	Gaußsche Glockenkurve . . . . .	74

2.6.4	Exponentialsumme . . . . .	74
2.6.5	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve . . . . .	75
2.6.6	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion . . . . .	76
2.7	Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) . . . . .	77
2.7.1	Grundlagen . . . . .	77
2.7.1.1	Definition und Darstellung . . . . .	77
2.7.1.2	Wertebereiche und Funktionsverläufe . . . . .	79
2.7.2	Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen . . . . .	81
2.7.2.1	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen . . . . .	81
2.7.2.2	Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel (Additionstheoreme) . . . . .	81
2.7.2.3	Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache . . . . .	82
2.7.2.4	Trigonometrische Funktionen des halben Winkels . . . . .	83
2.7.2.5	Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen . . . . .	83
2.7.2.6	Produkte trigonometrischer Funktionen . . . . .	83
2.7.2.7	Potenzen trigonometrischer Funktionen . . . . .	84
2.7.3	Beschreibung von Schwingungen . . . . .	84
2.7.3.1	Problemstellung . . . . .	84
2.7.3.2	Superposition oder Überlagerung von Schwingungen . . . . .	84
2.7.3.3	Vektordiagramm für Schwingungen . . . . .	85
2.7.3.4	Dämpfung von Schwingungen . . . . .	85
2.8	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) . . . . .	86
2.8.1	Definition der zyklometrischen Funktionen . . . . .	86
2.8.2	Zurückführung auf die Hauptwerte . . . . .	86
2.8.3	Beziehungen zwischen den Hauptwerten . . . . .	87
2.8.4	Formeln für negative Argumente . . . . .	88
2.8.5	Summe und Differenz von $\arcsin x$ und $\arcsin y$ . . . . .	88
2.8.6	Summe und Differenz von $\arccos x$ und $\arccos y$ . . . . .	88
2.8.7	Summe und Differenz von $\arctan x$ und $\arctan y$ . . . . .	88
2.8.8	Spezielle Beziehungen für $\arcsin x$ , $\arccos x$ , $\arctan x$ . . . . .	89
2.9	Hyperbelfunktionen . . . . .	89
2.9.1	Definition der Hyperbelfunktionen . . . . .	89
2.9.2	Grafische Darstellung der Hyperbelfunktionen . . . . .	90
2.9.2.1	Hyperbelsinus . . . . .	90
2.9.2.2	Hyperbelkosinus . . . . .	90
2.9.2.3	Hyperbeltangens . . . . .	91
2.9.2.4	Hyperbelkotangens . . . . .	91
2.9.3	Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen . . . . .	91
2.9.3.1	Hyperbelfunktionen einer Variablen . . . . .	91
2.9.3.2	Darstellung einer Hyperbelfunktion durch eine andere gleichen Argumentes . . . . .	91
2.9.3.3	Formeln für negative Argumente . . . . .	91
2.9.3.4	Hyperbelfunktionen der Summe und der Differenz zweier Argumente (Additionstheoreme) . . . . .	92
2.9.3.5	Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments . . . . .	92
2.9.3.6	Formel von Moivre für Hyperbelfunktionen . . . . .	92
2.9.3.7	Hyperbelfunktionen des halben Arguments . . . . .	92
2.9.3.8	Summen und Differenzen von Hyperbelfunktionen . . . . .	92
2.9.3.9	Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen mithilfe komplexer Argumente . . . . .	93
2.10	Areafunktionen . . . . .	93
2.10.1	Definitionen . . . . .	93
2.10.1.1	Areasinus . . . . .	93

	2.10.1.2	Areakosinus . . . . .	93
	2.10.1.3	Areatangens . . . . .	93
	2.10.1.4	Areakotangens . . . . .	93
	2.10.2	Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus . . . . .	94
	2.10.3	Beziehungen zwischen den verschiedenen Areafunktionen . . . . .	95
	2.10.4	Summen und Differenzen von Areafunktionen . . . . .	95
	2.10.5	Formeln für negative Argumente . . . . .	95
2.11		Kurven dritter Ordnung . . . . .	95
	2.11.1	Semikubische Parabel . . . . .	95
	2.11.2	Versiera der Agnesi . . . . .	96
	2.11.3	Kartesisches Blatt . . . . .	96
	2.11.4	Zissoide . . . . .	97
	2.11.5	Strophoide . . . . .	97
2.12		Kurven vierter Ordnung . . . . .	98
	2.12.1	Konchoide des Nikomedes . . . . .	98
	2.12.2	Allgemeine Konchoide . . . . .	99
	2.12.3	Pascalsche Schnecke . . . . .	99
	2.12.4	Kardioide . . . . .	100
	2.12.5	Cassinische Kurven . . . . .	101
	2.12.6	Lemniskate . . . . .	102
2.13		Zykloiden . . . . .	102
	2.13.1	Gewöhnliche Zykloide . . . . .	102
	2.13.2	Verlängerte und verkürzte Zykloiden oder Trochoiden . . . . .	102
	2.13.3	Epizykloide . . . . .	103
	2.13.4	Hypozykloide und Astroide . . . . .	104
	2.13.5	Verlängerte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide . . . . .	106
2.14		Spiralen . . . . .	106
	2.14.1	Archimedische Spirale . . . . .	106
	2.14.2	Hyperbolische Spirale . . . . .	107
	2.14.3	Logarithmische Spirale . . . . .	107
	2.14.4	Evolvente des Kreises . . . . .	107
	2.14.5	Klothoide . . . . .	108
2.15		Verschiedene andere Kurven . . . . .	108
	2.15.1	Kettenlinie oder Katenoide . . . . .	108
	2.15.2	Schleppkurve oder Traktrix . . . . .	108
2.16		Aufstellung empirischer Kurven . . . . .	110
	2.16.1	Verfahrensweise . . . . .	110
	2.16.1.1	Kurvenbildervergleiche . . . . .	110
	2.16.1.2	Rektifizierung . . . . .	110
	2.16.1.3	Parameterbestimmung . . . . .	110
	2.16.2	Gebräuchlichste empirische Formeln . . . . .	111
	2.16.2.1	Potenzfunktionen . . . . .	111
	2.16.2.2	Exponentialfunktionen . . . . .	111
	2.16.2.3	Quadratisches Polynom . . . . .	112
	2.16.2.4	Gebrochenlineare Funktion . . . . .	113
	2.16.2.5	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom . . . . .	113
	2.16.2.6	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve . . . . .	114
	2.16.2.7	Kurve 3. Ordnung, Typ II . . . . .	114
	2.16.2.8	Kurve 3. Ordnung, Typ III . . . . .	114
	2.16.2.9	Kurve 3. Ordnung, Typ I . . . . .	114
	2.16.2.10	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion . . . . .	115

	2.16.2.11 Exponentialsumme . . . . .	115
	2.16.2.12 Vollständig durchgerechnetes Beispiel . . . . .	116
2.17	Skalen und Funktionspapiere . . . . .	117
	2.17.1 Skalen . . . . .	117
	2.17.2 Funktionspapiere . . . . .	119
	2.17.2.1 Einfach-logarithmisches Funktionspapier . . . . .	119
	2.17.2.2 Doppelt-logarithmisches Funktionspapier . . . . .	119
	2.17.2.3 Funktionspapier mit einer reziproken Skala . . . . .	119
	2.17.2.4 Hinweis . . . . .	120
2.18	Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	121
	2.18.1 Definition und Darstellung . . . . .	121
	2.18.1.1 Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	121
	2.18.1.2 Geometrische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	121
	2.18.2 Verschiedene ebene Definitionsbereiche . . . . .	122
	2.18.2.1 Definitionsbereich einer durch eine Menge gegebenen Funktion . . . . .	122
	2.18.2.2 Zweidimensionale Gebiete . . . . .	122
	2.18.2.3 Drei- und mehrdimensionale Gebiete . . . . .	122
	2.18.2.4 Methoden zur Definition einer Funktion . . . . .	122
	2.18.2.5 Formen der analytischen Darstellung einer Funktion . . . . .	124
	2.18.2.6 Abhängigkeit von Funktionen . . . . .	125
	2.18.3 Grenzwerte . . . . .	126
	2.18.3.1 Definition . . . . .	126
	2.18.3.2 Exakte Formulierung . . . . .	126
	2.18.3.3 Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche . . . . .	126
	2.18.3.4 Iterierte Grenzwerte . . . . .	126
	2.18.4 Stetigkeit . . . . .	127
	2.18.5 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	127
	2.18.5.1 Nullstellensatz von Bolzano . . . . .	127
	2.18.5.2 Zwischenwertsatz . . . . .	127
	2.18.5.3 Satz über die Beschränktheit einer Funktion . . . . .	127
	2.18.5.4 Satz von Weierstrass über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes . . . . .	127
2.19	Nomographie . . . . .	128
	2.19.1 Nomogramme . . . . .	128
	2.19.2 Netztafeln . . . . .	128
	2.19.3 Fluchtlinientafeln . . . . .	129
	2.19.3.1 Fluchtlinientafeln mit drei geraden Skalen durch einen Punkt . . . . .	129
	2.19.3.2 Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen und einer dazu geneigten geradlinigen Skala . . . . .	130
	2.19.3.3 Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen, geradlinigen Skalen und einer Kurvenskala . . . . .	130
	2.19.4 Netztafeln für mehr als drei Veränderliche . . . . .	131
<b>3</b>	<b>Geometrie</b> . . . . .	<b>132</b>
3.1	Planimetrie . . . . .	132
	3.1.1 Grundbegriffe . . . . .	132
	3.1.1.1 Punkt, Gerade, Strahl, Strecke . . . . .	132
	3.1.1.2 Winkel . . . . .	132
	3.1.1.3 Winkel an zwei sich schneidenden Geraden . . . . .	133
	3.1.1.4 Winkelpaare an geschnittenen Parallelen . . . . .	133
	3.1.1.5 Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß . . . . .	134



3.1.2	Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen . . . . .	134
3.1.2.1	Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen . . . . .	134
3.1.2.2	Definition der Hyperbelfunktionen . . . . .	135
3.1.3	Ebene Dreiecke . . . . .	136
3.1.3.1	Aussagen zu ebenen Dreiecken . . . . .	136
3.1.3.2	Symmetrie . . . . .	137
3.1.4	Ebene Vierecke . . . . .	139
3.1.4.1	Parallelogramm . . . . .	139
3.1.4.2	Rechteck und Quadrat . . . . .	139
3.1.4.3	Rhombus oder Raute . . . . .	139
3.1.4.4	Trapez . . . . .	139
3.1.4.5	Allgemeines Viereck . . . . .	140
3.1.4.6	Sehnenviereck . . . . .	140
3.1.4.7	Tangentenviereck . . . . .	141
3.1.5	Ebene Vielecke oder Polygone . . . . .	141
3.1.5.1	Allgemeines Vieleck . . . . .	141
3.1.5.2	Regelmäßige konvexe Vielecke . . . . .	141
3.1.5.3	Einige regelmäßige konvexe Vielecke . . . . .	142
3.1.6	Ebene Kreisfiguren . . . . .	143
3.1.6.1	Kreis . . . . .	143
3.1.6.2	Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisausschnitt (Kreissektor) .	145
3.1.6.3	Kreisring . . . . .	145
3.2	Ebene Trigonometrie . . . . .	146
3.2.1	Dreiecksberechnungen . . . . .	146
3.2.1.1	Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken . . . . .	146
3.2.1.2	Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken . . . . .	146
3.2.2	Geodätische Anwendungen . . . . .	149
3.2.2.1	Geodätische Koordinaten . . . . .	149
3.2.2.2	Winkel in der Geodäsie . . . . .	150
3.2.2.3	Vermessungstechnische Anwendungen . . . . .	152
3.3	Stereometrie . . . . .	155
3.3.1	Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	155
3.3.2	Kanten, Ecken, Raumwinkel . . . . .	156
3.3.3	Polyeder . . . . .	157
3.3.4	Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind . . . . .	160
3.4	Sphärische Trigonometrie . . . . .	164
3.4.1	Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel . . . . .	164
3.4.1.1	Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel . . . . .	164
3.4.1.2	Spezielle Koordinatensysteme . . . . .	166
3.4.1.3	Sphärisches Zweieck . . . . .	167
3.4.1.4	Sphärisches Dreieck . . . . .	167
3.4.1.5	Polardreieck . . . . .	168
3.4.1.6	Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke . . . . .	168
3.4.1.7	Dreikant . . . . .	169
3.4.2	Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke . . . . .	169
3.4.2.1	Allgemeine Aussagen . . . . .	169
3.4.2.2	Grundformeln und Anwendungen . . . . .	170
3.4.2.3	Weitere Formeln . . . . .	172
3.4.3	Berechnung sphärischer Dreiecke . . . . .	174
3.4.3.1	Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen . . . . .	174
3.4.3.2	Rechtwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	174

	3.4.3.3	Schiefwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	176
	3.4.3.4	Sphärische Kurven . . . . .	180
3.5		Vektoralgebra und analytische Geometrie . . . . .	186
	3.5.1	Vektoralgebra . . . . .	186
	3.5.1.1	Definition des Vektors . . . . .	186
	3.5.1.2	Rechenregeln . . . . .	187
	3.5.1.3	Koordinaten eines Vektors . . . . .	188
	3.5.1.4	Richtungskoeffizient oder Entwicklungskoeffizient . . . . .	189
	3.5.1.5	Skalarprodukt und Vektorprodukt . . . . .	189
	3.5.1.6	Mehrfache multiplikative Verknüpfungen . . . . .	191
	3.5.1.7	Vektorielle Gleichungen . . . . .	193
	3.5.1.8	Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors . . . . .	194
	3.5.1.9	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra . . . . .	195
	3.5.2	Analytische Geometrie der Ebene . . . . .	196
	3.5.2.1	Ebene Koordinatensysteme . . . . .	196
	3.5.2.2	Koordinatentransformationen . . . . .	197
	3.5.2.3	Spezielle Punkte in der Ebene . . . . .	198
	3.5.2.4	Flächeninhalte . . . . .	200
	3.5.2.5	Gleichung einer Kurve . . . . .	200
	3.5.2.6	Gerade . . . . .	201
	3.5.2.7	Kreis . . . . .	204
	3.5.2.8	Ellipse . . . . .	205
	3.5.2.9	Hyperbel . . . . .	207
	3.5.2.10	Parabel . . . . .	210
	3.5.2.11	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte) . . . . .	212
	3.5.3	Analytische Geometrie des Raumes . . . . .	215
	3.5.3.1	Grundlagen . . . . .	215
	3.5.3.2	Räumliche Koordinatensysteme . . . . .	217
	3.5.3.3	Koordinatentransformationen . . . . .	219
	3.5.3.4	Drehung mithilfe von Richtungskosinussen . . . . .	220
	3.5.3.5	Drehung mithilfe von Cardan–Winkeln . . . . .	221
	3.5.3.6	Drehung mithilfe von Euler–Winkeln . . . . .	222
	3.5.3.7	Spezielle Punkte im Raum . . . . .	223
	3.5.3.8	Gleichung einer Fläche . . . . .	224
	3.5.3.9	Gleichung einer Raumkurve . . . . .	225
	3.5.3.10	Ebenen im Raum . . . . .	225
	3.5.3.11	Geraden im Raum . . . . .	228
	3.5.3.12	Schnittpunkte und Winkel von Ebenen und Geraden im Raum . . . . .	229
	3.5.3.13	Flächen 2. Ordnung, Gleichungen in Normalform . . . . .	231
	3.5.3.14	Flächen 2. Ordnung, allgemeine Theorie . . . . .	234
	3.5.4	Geometrische Transformationen und Koordinatentransformationen . . . . .	236
	3.5.4.1	Geometrische 2D–Transformationen . . . . .	236
	3.5.4.2	Homogene Koordinaten, Matrixdarstellung . . . . .	238
	3.5.4.3	Koordinatentransformation . . . . .	238
	3.5.4.4	Verkettung von Transformationen . . . . .	239
	3.5.4.5	3D–Transformationen . . . . .	240
	3.5.4.6	Deformationstransformationen . . . . .	243
	3.5.5	Planare Projektionen . . . . .	244
	3.5.5.1	Klassifizierung . . . . .	244
	3.5.5.2	Ansichtskoordinatensystem . . . . .	245
	3.5.5.3	Tafelprojektionen . . . . .	245
	3.5.5.4	Axonometrische Projektion . . . . .	246

	3.5.5.5	Isometrische Projektion . . . . .	246
	3.5.5.6	Schiefe Parallelprojektion . . . . .	247
	3.5.5.7	Perspektivische Projektion . . . . .	248
3.6		Differenzialgeometrie . . . . .	250
	3.6.1	Ebene Kurven . . . . .	250
	3.6.1.1	Definitionen ebener Kurven . . . . .	250
	3.6.1.2	Lokale Elemente einer Kurve . . . . .	250
	3.6.1.3	Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten . . . . .	256
	3.6.1.4	Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung . . . . .	261
	3.6.1.5	Evoluten und Evolventen . . . . .	262
	3.6.1.6	Einhüllende von Kurvenscharen . . . . .	262
	3.6.2	Raumkurven . . . . .	263
	3.6.2.1	Definitionen für Raumkurven . . . . .	263
	3.6.2.2	Begleitendes Dreibein . . . . .	264
	3.6.2.3	Krümmung und Windung . . . . .	266
	3.6.3	Flächen . . . . .	269
	3.6.3.1	Definitionen für Flächen . . . . .	269
	3.6.3.2	Tangentialebene und Flächennormale . . . . .	270
	3.6.3.3	Linielement auf einer Fläche . . . . .	271
	3.6.3.4	Krümmung einer Fläche . . . . .	273
	3.6.3.5	Regelflächen und abwickelbare Flächen . . . . .	275
	3.6.3.6	Geodätische Linien auf einer Fläche . . . . .	276
<b>4</b>		<b>Lineare Algebra</b>	<b>277</b>
	4.1	Matrizen . . . . .	277
	4.1.1	Begriff der Matrix . . . . .	277
	4.1.2	Quadratische Matrizen . . . . .	278
	4.1.3	Vektoren . . . . .	279
	4.1.4	Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	280
	4.1.5	Rechenregeln für Matrizen . . . . .	283
	4.1.6	Vektor- und Matrizennormen . . . . .	285
	4.1.6.1	Vektornormen . . . . .	285
	4.1.6.2	Matrizennormen . . . . .	285
	4.2	Determinanten . . . . .	286
	4.2.1	Definitionen . . . . .	286
	4.2.2	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	286
	4.2.3	Berechnung von Determinanten . . . . .	287
	4.3	Tensoren . . . . .	288
	4.3.1	Transformation des Koordinatensystems . . . . .	288
	4.3.2	Tensoren in kartesischen Koordinaten . . . . .	289
	4.3.3	Tensoren mit speziellen Eigenschaften . . . . .	291
	4.3.3.1	Tensoren 2. Stufe . . . . .	291
	4.3.3.2	Invariante Tensoren . . . . .	291
	4.3.4	Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen . . . . .	292
	4.3.4.1	Kovariante und kontravariante Basisvektoren . . . . .	292
	4.3.4.2	Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe . . . . .	293
	4.3.4.3	Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe . . . . .	294
	4.3.4.4	Rechenregeln . . . . .	295
	4.3.5	Pseudotensoren . . . . .	295
	4.3.5.1	Punktspiegelung am Koordinatenursprung . . . . .	295
	4.3.5.2	Einführung des Begriffs Pseudotensor . . . . .	296

4.4	Quaternionen und Anwendungen . . . . .	297
4.4.1	Quaternionen . . . . .	298
4.4.1.1	Definition und Darstellung . . . . .	298
4.4.1.2	Matrizendarstellung von Quaternionen . . . . .	299
4.4.1.3	Rechenregeln . . . . .	300
4.4.2	Darstellung von Drehungen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	302
4.4.2.1	Drehungen eines Objektes um die Koordinatenachsen . . . . .	303
4.4.2.2	Cardan–Winkel . . . . .	303
4.4.2.3	Euler–Winkel . . . . .	304
4.4.2.4	Drehung um eine beliebige Achse durch den Nullpunkt . . . . .	304
4.4.2.5	Drehungen und Quaternionen . . . . .	305
4.4.2.6	Quaternionen und Cardan–Winkel . . . . .	307
4.4.2.7	Effizienz der Algorithmen . . . . .	309
4.4.3	Anwendungen der Quaternionen . . . . .	310
4.4.3.1	3D–Rotationen in der Computergrafik . . . . .	310
4.4.3.2	Interpolation mittels Rotationsmatrizen . . . . .	311
4.4.3.3	Stereografische Projektion . . . . .	311
4.4.3.4	Satellitennavigation . . . . .	312
4.4.3.5	Vektoranalysis . . . . .	313
4.4.3.6	Einheitsbiquaternionen und Starrkörperbewegungen . . . . .	314
4.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	315
4.5.1	Lineare Systeme, Austauschverfahren . . . . .	315
4.5.1.1	Lineare Systeme . . . . .	315
4.5.1.2	Austauschverfahren . . . . .	315
4.5.1.3	Lineare Abhängigkeiten . . . . .	316
4.5.1.4	Invertierung einer Matrix . . . . .	316
4.5.2	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	316
4.5.2.1	Definition und Lösbarkeit . . . . .	316
4.5.2.2	Anwendung des Austauschverfahrens . . . . .	318
4.5.2.3	Cramersche Regel . . . . .	319
4.5.2.4	Gaußscher Algorithmus . . . . .	320
4.5.3	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	321
4.5.3.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmittelprobleme . . . . .	321
4.5.3.2	Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme . . . . .	322
4.6	Eigenwertaufgaben bei Matrizen . . . . .	322
4.6.1	Allgemeines Eigenwertproblem . . . . .	322
4.6.2	Spezielles Eigenwertproblem . . . . .	322
4.6.2.1	Charakteristisches Polynom . . . . .	322
4.6.2.2	Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	324
4.6.2.3	Hauptachsentransformation quadratischer Formen . . . . .	325
4.6.2.4	Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten . . . . .	327
4.6.3	Singulärwertzerlegung . . . . .	329
<b>5</b>	<b>Algebra und Diskrete Mathematik</b>	<b>330</b>
5.1	Logik . . . . .	330
5.1.1	Aussagenlogik . . . . .	330
5.1.2	Ausdrücke der Prädikatenlogik . . . . .	333
5.2	Mengenlehre . . . . .	335
5.2.1	Mengenbegriff, spezielle Mengen . . . . .	335
5.2.2	Operationen mit Mengen . . . . .	336
5.2.3	Relationen und Abbildungen . . . . .	339