OSTWALDS KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 162

Gottfried Leibniz
1.7.1646 – 14.11.1716

Sir Isaac Newton
25.12.1642 – 20.3.1727

OSTWALDS KLASSIKER DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN
Band 162

Reprint der Bände 162 und 164

Über die Analysis des Unendlichen
(1684 – 1703)

von

Gottfried Leibniz

*

Abhandlung über die Quadratur der Kurven
(1704)

von

Sir Isaac Newton

aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von
Gerhard Kowalewski
Vorwort und Nachwort von
Volkmar Schüller

EUROPA LEHRMITTEL

Europa-Nr. 57105

3., erweiterte Auflage 2007
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5710-5

Umschlaggestaltung: Birgit Cirksena · Satzfein, 13158 Berlin
Druck: Totem, 88-100 Inowroclaw, Polen

Inhalt

Sir Isaac Newton
Abhandlung über die Quadratur der Kurven

Vorwort

Wer in unseren Tagen sein Leben der Mathematik widmen will, hat in der Regel während seiner Ausbildung nur das Ziel, möglichst rasch den modernsten Wissensstand kennenzulernen, um von diesem Niveau aus die Mathematik anzuwenden oder mit seinen eigenen Forschungsergebnissen zu bereichern. In unserer heutigen geschichtsvergessenen Zeit wird das Studium der Geschichte der Wissenschaft nicht mehr als ein notwendiger Teil der Ausbildung angesehen, allenfalls als ein schmückendes, aber doch entbehrliches Beiwerk. Dadurch hat es ein heutiger Mathematiker nie gelernt, über die Wurzeln seines Wissens nachzudenken und sich selbst als ein Glied in der großen Kette der Erkenntnis zu verstehen. Er wird bewußt dazu erzogen, in seinen Publikationen nicht darzustellen, wie er zu seinen Ergebnissen gekommen ist, sondern nur die Ergebnisse selbst. In vergangenen Zeiten dachte man darüber ganz anders; ein berühmtes Beispiel ist Johannes Kepler, der in seiner *Astronomia nova* (Heidelberg 1609) ausführlich seine vielen Mißerfolge beschrieb, die er überwinden mußte, bis er endlich sein gestecktes Ziel erreicht hatte.

Selbstverständlich kann auch derjenige ein tüchtiger Mathematiker sein, der sich für die Geschichte seines Faches nicht interessiert. Aber bereits bei einer solch scheinbar einfachen Frage, was Mathematik sei, wird sich wohl fast jeder auf die Geschichte der Mathematik berufen, und sei es auch nur, um seine eigene Ansicht gegen die Antworten abzugrenzen, die vergangene Generationen gegeben haben. Kein Geringerer als Johann Wolfgang von Goethe belehrt uns im Vorwort seiner Farbenlehre darüber „daß die Geschichte der Wissenschaft die Wissenschaft selbst sei.“ Er wußte sehr wohl: „Man kann dasjenige, was man besitzt, nicht rein erkennen, bis man das, was andre vor uns besessen, zu erkennen weiß.“ Fast möchte man vermuten – natürlich war es nicht so – daß

Goethe an Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz gedacht hat, als er seine Maxime aufstellte.

Diese beiden großartigen Wissenschaftler beschäftigten sich nicht nur mit den wissenschaftlichen Ansichten ihrer unmittelbaren Vorgänger und Zeitgenossen, sondern haben sich immer wieder mit dem wissenschaftlichen Denken und Arbeiten längst vergangener Generationen auseinandergesetzt. Das Studium historischer mathematischer Schriften wurde von ihnen aber nicht als ein Lesen und Studieren in der Art verstanden, wie es ein Wissenschaftshistoriker tut, sondern sie lasen diese Schriften in der gleichen Art und Weise, wie sie die Schriften ihrer Zeitgenossen lasen. Von ihnen wurde zwischen der Wissenschaft selbst und ihrer Geschichte keine solch scharfe Grenze gezogen, wie wir es heute tun. Newtons konsequentes Festhalten an den Methoden der synthetischen Geometrie in den *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London 1687) – die von ihm erfundene Fluxionsrechnung veröffentlichte er zwar darin das erste Mal, aber er benutzte sie dort nicht – ist ohne seine intensive Beschäftigung mit den antiken Autoren nicht denkbar. Dabei verband er diese alten Methoden durchaus mit sehr modernem Gedankengut, wenn er beispielsweise in seinen geometrischen Konstruktionen jene Grenzfälle in die Betrachtung einbezog, die durch den Vorgang der letztendlichen Vereinigung geeigneter Punkte entstanden. In der Redeweise der Analysis würde man sagen, er betrachtete die Grenzfälle, die sich ergeben, wenn die dahinschwindenden Größen tatsächlich dahinschwinden. Im Kapitel V des ersten Buches seiner *Principia* reizte er noch einmal alle Möglichkeiten der synthetisch geometrischen Methode aus, ja man möchte meinen, ein antiker Autor hätte dieses Kapitel geschrieben.

Nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Physik verstand sich Newton als ein Glied in der Kette der Erkenntnis, die ihren Anfang in der Antike hat. So zeugen wichtige Manuskripte Newtons,[1] die sich im Nachlaß von David Gregory erhalten haben und die ursprünglich in späteren Auflagen der *Principia* veröffentlicht werden sollten, von seiner intensiver Beschäftigung mit den naturphilosophischen Ansichten der Vorsokratiker, die darin gipfelte, daß Newton – den wir heute als den Entdecker des allgemeinen Gravitationsgesetzes feiern – der Meinung war, bereits die Alten hätten das Gravitationsgesetz gekannt.

Nicht minder intensiv war Leibnizens Beschäftigung mit der Geschichte der Wissenschaft. Für ihn war, wie es bei jedem Philosophen von Rang zu beobachten ist, das Philosophieren stets eine Auseinandersetzung auch mit der Geschichte der Philosophie. Ich möchte nicht seinen Spott hören, mit dem er heute die philosophischen Fakultäten überschütten würde, die ihre Lehrstühle für Geschichte der Philosophie abschaffen. Als er Newtons Physik, insbesondere dessen Vorstellungen von einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit und die von einer allgemeinen Gravitation, derzufolge sich sämtliche Körper in der Welt gegenseitig anziehen, in seinem Briefwechsel mit dem englischen Theologen Samuel Clarke einer grundlegenden und vernichtenden Kritik unterwarf, war diese Kritik gerade deshalb so fundamental, weil Leibniz dank seiner umfassenden philosophiehistorischen Bildung sofort die Schwächen in Newtons Gedankengebäude, ja sogar dessen teilweisen Rückfall auf längst überwundene philosophische Positionen erkannte. Auch in Leibnizens mathematischen Arbeiten findet man viele Spuren seiner Auseinandersetzung mit der Mathematikgeschichte. Als er während seines Pariser Aufenthaltes in Christiaan Huygens einen väterlichen Freund und Mentor fand, der ihn beim Studium der Mathematik leitete, las Leibniz nicht nur wichtige Werke seiner Zeitgenossen, sondern auch einiger Autoren, die schon zu seiner Zeit eine historische Aura umschwebte.

Sowohl Leibniz als auch Newton hatten beim Studium historischer wissenschaftlicher Texte kaum mit sprachlichen Problemen zu kämpfen, da das Lateinische und das Griechische zur Allgemeinbildung eines jeden damaligen Wissenschaftlers gehörte und

---

1 Newton's *scholia* from David Gregory's Estate on the Propositions IV through IX Book III of his *Principia*, edited, translated and anotated by V. Schüller in: Between Leibniz, Newton, and Kant (edited by W. Lefèvre, Dordrecht: Kluwer 2001)

sie somit nicht auf die Hilfe von Übersetzern angewiesen waren. Da viele historische Texte in Sprachen geschrieben sind, die heutzutage nur noch von wenigen ausreichend gut beherrscht werden, sind viele sehr dankbar, wenn jemand die aufwendige Übersetzungsarbeit übernimmt und ihnen so die Quellen zugänglich macht. Trotzdem wird das Übersetzen historischer wissenschaftlicher Texte heutzutage nur selten als eine wichtige wissenschaftliche Leistung gewürdigt. Dies ist umso mehr zu bedauern, als sich hinter dem Übersetzen ein grundlegendes wissenschaftshistorisches Problem verbirgt. Dem zu übersetzenden Text liegt einerseits meist eine Gedankenwelt zugrunde, die nicht mehr die des Lesers ist und die darum mit der Gegenwartssprache des Lesers oft nicht adäquat wiedergegeben werden kann; andererseits erwartet man vom Übersetzer, daß er in seiner Übersetzung diese historische Gedankenwelt mit den Mitteln der Gegenwartssprache formuliert.

Es ist die zentrale Aufgabe eines Wissenschaftshistorikers, diese historische Gedankenwelt zu erkunden und sie trotz der historischen Barrieren seinen Zeitgenossen verständlich zu machen. Gerhard Kowalewski (1876–1950) verstand sich gewiß nicht in erster Linie als ein Mathematikhistoriker, sondern war ein sehr erfolgreich forschender und lehrender Mathematiker mit großem Interesse an der Geschichte der Mathematik. Von diesem Interesse wurde Kowalewski geleitet, als er einige wichtige mathematische Texte von Newton und Leibniz übersetzte. Für uns heute haben diese Übersetzungen selbst bereits eine historische Aura, nicht nur weil sie vor nunmehr hundert Jahren angefertigt worden sind, sondern weil sie auch einen Stand der wissenschaftshistorischen Forschung widerspiegeln, der selbst inzwischen als historisch anzusehen ist. Aus großem Respekt vor der Leistung Gerhard Kowalewskis werden anläßlich dieses hundertsten Jubiläums seine Übersetzungen und die zugehörigen Anmerkungen unverändert abgedruckt, so daß der Leser ein unverfälschtes Bild davon erhält, wie der forschende Mathematiker Gerhard Kowalewski seine großen Kollegen Newton und Leibniz seinerzeit verstanden und gedeutet hat. Über den Lebensweg Kowalewkis, der exemplarisch ist für die politischen Verstrickungen, in die viele deutsche Akademiker seiner Generation geraten sind, informiert Waltraud Voss in ihrem lesenswerten Artikel *Gerhard Kowalewski als Rektor der TH Dresden.*[2]

Berlin, den 24. Oktober 2007 Volkmar Schüller

2 enthalten in: Mathematik im Fluß der Zeit, hrsg. von Wolfgang Hein und Peter Ulrich, *Algorismus* 44 (2004) S. 443–461

Band 162

Über die Analysis des Unendlichen
(1684–1703)

von
Gottfried Leibniz

I. Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Grössen stösst, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechnungsart.

(Acta Eruditorum, 1684.)

Gegeben sei eine Achse AX und mehrere Kurven wie VV, WW, YY, ZZ. Ihre zur Achse senkrechten Ordinaten VX, WX, YX, ZX mögen bezüglich v, w, y, z heißen. Der Abschnitt AX auf der Achse möge x heißen. VB, WC, YD, ZE seien die Tangenten und B, C, D, E ihre bezüglichen Schnittpunkte mit der Achse. Nun wähle man nach Belieben eine Strecke und nenne sie dx. Dann soll diejenige Strecke, welche sich zu dx verhält wie v (oder w oder y oder z) zu XB (oder XC oder XD oder XE) mit dv (oder dw oder dy oder dz) bezeichnet werden und Differenz der v (oder der w oder y oder z) heißen[1]). Nach diesen Festsetzungen werden die Rechnungsregeln folgende sein.

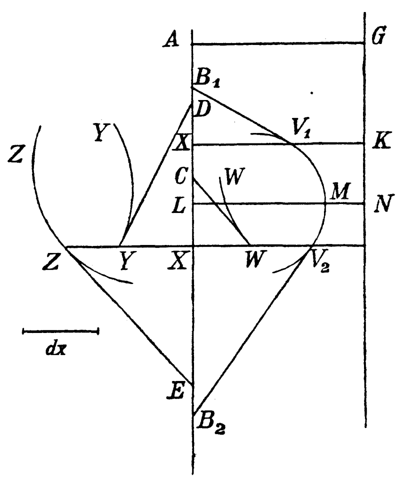

Fig. 1.

Wenn a eine gegebene konstante Größe ist, so wird da gleich 0 und $d(ax)$ gleich $a\,dx$. Wenn y gleich v ist (d. h.

jede Ordinate der Kurve YY gleich der entsprechenden Ordinate der Kurve VV), so wird dy gleich dv. Nun Addition und Subtraktion: Wenn $z - y + w + x$ gleich v ist, so wird $d(z - y + w + x)$ oder dv gleich $dz - dy + dw + dx$. Multiplikation: $d(xv)$ ist gleich $xdv + vdx$, d. h. wenn man y gleich xv setzt, so wird dy gleich $xdv + vdx$. Es ist nämlich gleichgültig, ob man den Ausdruck xv oder als Abkürzung dafür den Buchstaben y anwendet. Zu beachten ist, daß bei dieser Rechnung x und dx in derselben Weise behandelt werden wie y und dy oder ein anderer unbestimmter Buchstabe mit seinem Differential. Zu beachten ist auch, daß es nur mit einer gewissen Vorsicht eine Rückkehr von der Differentialgleichung gibt; darüber werden wir an einer andern Stelle reden. Nun zur Division: $d\frac{v}{y}$ oder (wenn z gleich $\frac{v}{y}$ gesetzt wird) dz ist gleich $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ [2]).

Was die Zeichen anbetrifft, so ist folgendes wohl zu beachten. Wenn bei der Rechnung für einen Buchstaben einfach sein Differential eingesetzt wird, so werden dieselben Zeichen beibehalten, und für $+z$ wird $+dz$, für $-z$ wird $-dz$ geschrieben, wie aus der eben vorhin behandelten Addition und Subtraktion erhellt. Schreitet man aber zur Entwicklung der Werte, d. h. betrachtet man die Beziehung von z zu x, dann kommt es zum Vorschein, ob der Wert von dz eine positive Größe ist oder kleiner als Null, d. h. negativ. Tritt der letztere Fall ein, dann wird die Tangente ZE vom Punkte Z aus nicht nach A hin gezogen, sondern in der entgegengesetzten Richtung, die von X nach unten weist; dies findet statt, wenn die Ordinaten z mit zunehmenden x abnehmen. Und da die Ordinaten v bald zunehmen, bald abnehmen, so wird dv bald positiv, bald negativ sein. Im ersten Falle wird die Tangente V_1B_1 nach A hin, im zweiten V_2B_2 nach der entgegengesetzten Seite gezogen. Keins von beiden gilt aber an der Zwischenstelle M, in dem Augenblick, wo die v weder zunehmen noch abnehmen, sondern im Stillstand begriffen sind. dv wird alsdann gleich 0, und es kommt nicht darauf an, ob die Größe positiv oder negativ ist; denn $+0$ ist gleich -0. An dieser Stelle ist v, d. h. die Ordinate LM, ein Maximum (oder, wenn die konvexe Seite der Achse zugekehrt ist, ein Minimum), und die Tangente der Kurve in M wird weder in der Richtung von X nach A hinauf gezogen, um sich der Achse zu nähern, noch auch in der entgegengesetzten Richtung, die von X nach unten weist; sie ist vielmehr parallel zur Achse. Wenn dv in bezug auf dx unendlich ist, dann steht die Tangente senkrecht auf der Achse, d. h. sie ist die Ordinate. Wenn dv und dx gleich sind, so bildet die Tangente mit der Achse einen halben rechten Winkel. Wenn bei zunehmenden Ordinaten auch ihre Inkremente oder Differenzen dv zunehmen (d. h. wenn bei positiv gesetzten dv auch die ddv, die Differenzen der Differenzen, positiv sind oder bei negativ gesetzten dv auch die ddv negativ), so kehrt die Kurve der Achse ihre konvexe Seite, sonst ihre konkave Seite zu. Wo aber das Inkrement ein Maximum oder Minimum ist, also die Inkremente aus abnehmenden zunehmende werden oder umgekehrt, da ist ein Wendepunkt, und Konkavität und Konvexität vertauschen sich, vorausgesetzt, daß nicht auch die Ordinaten dort aus zunehmenden abnehmende werden oder umgekehrt; dann würde nämlich die Konkavität oder Konvexität bleiben. Daß aber die Inkremente fortfahren zuzunehmen oder abzunehmen, die Ordinaten jedoch aus zunehmenden abnehmende werden oder umgekehrt, das ist unmöglich[3]). Ein Wendepunkt ist daher vorhanden, wenn weder v, noch dv gleich 0 ist, wohl aber ddv gleich 0. Deshalb hat auch das Problem des Wendepunktes nicht wie das Problem des Maximums zwei, sondern drei gleiche Wurzeln. Dies alles hängt vom richtigen Gebrauch der Zeichen ab.

Manchmal aber sind, wie vorhin bei der Division, zweideutige Zeichen anzuwenden, bevor es nämlich feststeht, wie sie entwickelt werden sollen. Und zwar müssen, wenn mit zunehmenden x die $\frac{v}{y}$ zunehmen (abnehmen), die zweideutigen Zeichen in $d\frac{v}{y}$, d. h. in $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ so entwickelt werden, daß dieser Bruch eine positive (negative) Größe wird. Es bedeutet aber $\mp$ das Entgegengesetzte von $\pm$, so daß, wenn dieses $+$ ist, jenes $-$ ist oder umgekehrt. Es können auch in derselben Rechnung mehrere Zweideutigkeiten vorkommen, die ich durch Klammern unterscheide. Wenn z. B. $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v} = w$ wäre, so würde sein

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp) zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\, ((\mp))\, vdx}{vv} = dw$$

sein, damit nicht die von den verschiedenen Gliedern herrührenden Zweideutigkeiten vermischt werden. Dabei ist zu beachten, daß ein zweideutiges Zeichen mit sich selbst $+$ gibt, mit seinem entgegengesetzten $-$, während es mit einem andern eine neue Zweideutigkeit bildet, die von beiden abhängt.

Potenzen: $dx^a = a \cdot x^{a-1} dx$. Z. B. ist $dx^3 = 3x^2 dx$.

$d\frac{1}{x^a} = -\frac{a\,dx}{x^{a+1}}$. Z. B. wird, wenn $w = \frac{1}{x^3}$ ist, $dw = -\frac{3\,dx}{x^4}$.

Wurzeln: $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b} dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$. (Hieraus folgt $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$; denn a ist in diesem Falle 1, und b ist 2, also $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ gleich $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$; nun ist y^{-1} dasselbe wie $\frac{1}{y}$, nach der Natur der Exponenten einer geometrischen Reihe, und $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ ist $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$.)

$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{a\,dx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$. Es hätte aber die Regel der ganzen Potenz genügt, um sowohl die Brüche als auch die Wurzeln zu erledigen; denn eine Potenz wird ein Bruch, wenn der Exponent negativ ist, und sie verwandelt sich in eine Wurzel, wenn der Exponent gebrochen ist. Ich habe aber jene Folgerungen lieber selbst gezogen, als sie andern zu ziehen überlassen, da sie sehr allgemein sind und häufig vorkommen. Auch ist es bei einer an sich verwickelten Sache besser, für Leichtigkeit zu sorgen.

Kennt man, wenn ich so sagen soll, den obigen Algorithmus dieses Kalküls, den ich Differentialrechnung nenne, so lassen sich alle andern Differentialgleichungen durch ein gemeinsames Rechnungsverfahren finden, es lassen sich die Maxima und Minima sowie die Tangenten erhalten, ohne daß es dabei nötig ist, Brüche oder Irrationalitäten oder andere Verwicklungen zu beseitigen, was nach den bisher bekannt gegebenen Methoden doch geschehen mußte. Der Beweis alles dessen wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein, wenn er nur den bisher nicht genug erwogenen Umstand beachtet, daß man dx, dy, dv, dw, dz als proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d. h. Inkrementen oder Dekrementen, der x, y, v, w, z (eines jeden in seiner Reihe) betrachten kann. So kommt es, daß man zu jeder vorgelegten Gleichung ihre Differentialgleichung aufschreiben kann. Dies geschieht, indem man für jedes Glied (d. h. jeden Bestandteil, der durch bloße Addition oder Subtraktion zur Herstellung der Gleichung beiträgt) einfach das Differential des Gliedes einsetzt, für eine andere Größe jedoch (die nicht selbst ein Glied ist, sondern zur Bildung eines Gliedes beiträgt) ihr Differential anwendet, um das Differential des Gliedes selbst zu bilden, und zwar nicht ohne weiteres, sondern nach dem oben vorgeschriebenen Algorithmus. Die bisher bekannt gemachten Methoden haben aber einen solchen Übergang nicht. Sie wenden nämlich meistens eine Strecke wie DX oder eine andere von dieser Art an, nicht aber die Strecke dy, die die vierte Proportionale zu DX, DY, dx ist, und dadurch wird alles verwirrt. Daher schreiben sie vor, daß Brüche und Irrationalitäten (worin Unbestimmte vorkommen) zuvor beseitigt werden. Es ist auch klar, daß unsere Methode die transzendenten Linien beherrscht, die sich nicht auf die algebraische Rechnung zurückführen lassen oder von keinem bestimmten Grade sind, und zwar gilt das ganz allgemein, ohne besondere, nicht immer zutreffende Voraussetzungen. Man muß nur ein für allemal festhalten, daß eine Tangente zu finden so viel ist wie eine Gerade zeichnen, die zwei Kurvenpunkte mit unendlich kleiner Entfernung verbindet, oder eine verlängerte Seite des unendlicheckigen Polygons, welches für uns mit der Kurve gleichbedeutend ist. Jene unendlich kleine Entfernung läßt sich aber immer durch irgend ein bekanntes Differential, wie dv, oder durch eine Beziehung zu demselben ausdrücken, d. h. durch eine gewisse bekannte Tangente. Wäre insbesondere y eine transzendente Größe, z. B. die Ordinate der Zykloide, und käme sie in der Rechnung vor, mit deren Hilfe z, die Ordinate einer andern Kurve bestimmt wäre, und verlangte man dz oder durch dessen Vermittlung die Tangente der zweiten Kurve, so wäre unter allen Umständen dz durch dy zu bestimmen, weil man die Tangente der Zykloide hat. Die Tangente der Zykloide selbst aber ließe sich, wenn wir annehmen, daß wir sie noch nicht hätten, in ähnlicher Weise durch Rechnung finden aus der gegebenen Eigenschaft der Kreistangenten.

Wir wollen nunmehr ein Beispiel für die Rechnungsart auseinandersetzen, wobei bemerkt sei, daß ich hier die Division durch $x:y$ bezeichne, was dasselbe bedeutet wie x dividiert durch y oder $\frac{x}{y}\cdot$ Die erste oder die gegebene Gleichung sei

$$x:y+(a+bx)(c-xx):(ex+fxx)^2+ax\sqrt{gg+yy}$$
$$+yy:\sqrt{hh+lx+mxx}=0.$$

Sie drückt die Beziehung zwischen x und y oder zwischen AX und XY aus, wobei a, b, c, e, f, g, h, l, m als gegeben vorausgesetzt werden. Es wird ein Verfahren gesucht, in einem gegebenen Punkte Y die Gerade YD zu zeichnen, die die Kurve berührt, oder es wird das Verhältnis der Strecke DX zu der gegebenen Strecke XY gesucht. Zur Abkürzung wollen wir $a+bx=n$, $c-xx=p$, $ex+fxx=q$, $gg+yy=r$ und $hh+lx+mxx=s$ setzen. Dann wird

$$x:y+np:qq+ax\sqrt{r}+yy:\sqrt{s}=0.$$

Dies sei die zweite Gleichung. Nach unserm Kalkül steht fest, daß

$$d(x:y)=(\pm xdy\mp ydx):yy$$

ist, ebenso, daß

$$d(np:qq)=\{(\pm)2npdq(\mp)q(ndp+pdn)\}:q^3$$

ist und

$$d(ax\sqrt{r})=axdr:2\sqrt{r}+a\sqrt{r}dx$$

und

$$d(yy:\sqrt{s})=\{((\pm))yyds((\mp))4ysdy\}:2s\sqrt{s}.$$

Alle diese Differentiale von $d(x:y)$ bis zu $d(yy:\sqrt{s})$ geben zusammen addiert 0 und liefern auf diese Weise eine dritte Gleichung; denn es werden doch für die Glieder der zweiten Gleichung ihre Differentiale eingesetzt. Nun ist $dn=bdx$ und $dp=-2xdx$ und $dq=edx+2fxdx$ und $dr=2ydy$ und $ds=ldx+2mxdx$. Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, so erhält man eine vierte Gleichung. Die einzigen Differentiale, die darin noch übrig geblieben sind, nämlich dx und dy, treten immer außerhalb der Nenner ungebunden auf, und jedes Glied ist entweder mit dx oder mit dy multipliziert, so daß hinsichtlich dieser beiden Größen immer das Homogeneitätsgesetz gewahrt ist, wie kompliziert auch die Rechnung sein mag. Man kann daher immer den Wert von $dx:dy$, d. h. des Verhältnisses von dx zu dy, also der gesuchten Strecke DX zu der gegebenen XY, erhalten. Dieses