1 Mathematische Grundlagen

1.0 Einführung

Einführung

Um Berechnungen mit finanzmathematischen und anderen ökonomischen Funktionen durchführen zu können, ist zu einem gewissen Niveau die routinemäßige Beherrschung schulmathematischer Rechenregeln, -gesetze und -techniken erforderlich.

Das erste Kapitel bietet zur Auffrischung der Schulmathematik Übungen zu den wichtigsten Eigenschaften der Arithmetik an, mit einer Einführung in die Eigenschaften von Mengen, Zahlenmengen und logischen Aussagen.

Die Mehrzahl der Aufgaben im Übungsbuch kann man mit Hilfe eines normalen Taschenrechners lösen. Für einige Aufgaben ist die Verwendung des Programms DERIVE[1] empfehlenswert, diese Aufgaben sind entsprechend mit DERIVE ausgezeichnet. Die zu verwendenden DERIVE-Tools (Werkzeuge) werden in §1.7 vorgestellt, die spezifischen DERIVE-Tools für die Matrizenrechnung aber in der Einführung zum Kapitel 5 (§5.0).

Um in den nachfolgenden Übungen ein konkretes Bild von Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen zu erhalten, ist es hilfreich, den Begriff einer Funktion $f\colon X \to Y$ vorwegzunehmen, auf den in Kapitel 3 ausführlicher eingegangen wird, insbesondere für den Fall, dass X und Y Zahlenmengen sind:

Die *Funktion* f ordnet jedem Element x der Teilmenge D_f (*Definitionsbereich*) von X ein Element $y = f(x)$ der *Zielmenge* Y zu. Nehmen wir beispielhaft die Folge $a_n = 100 + (n - 1)5$. Diese Folge ist definiert mit der Menge der natürlichen Zahlen, d.h. für n dürfen nur natürliche Zahlen eingesetzt werden: $a_1 = 100$, $a_2 = 105$, $a_3 = 110$, $a_4 = 115$, $a_5 = 120$, usw.

1 Die aktuelle DERIVE 6.10 Version, siehe http://www.derive-europe.com (die neulich herausgebrachten »TI-Nspire CAS-Systeme« konnten für dieses Übungsbuch nicht mehr berücksichtigt werden). Insofern man DERIVE hauptsächlich für die Erstellung zweidimensionaler Grafiken, einschließlich der Bestimmung von Nullstellen und Ableitungsfunktionen, einsetzen möchte, bietet sich als Alternative irgendein Funktionenplotter an, vgl. vielleicht http://www.studienkreis.de/funkyplot oder auch Excel.

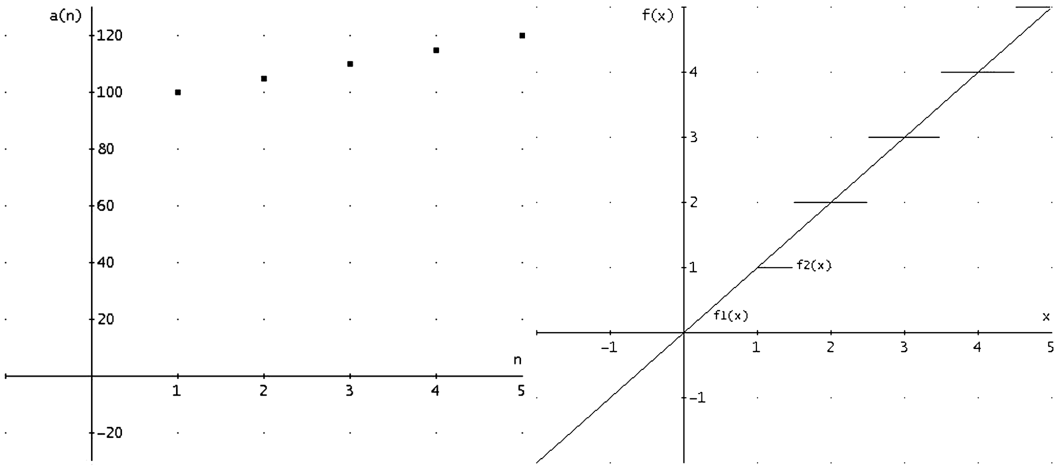


Abb. 1 Beispiele von Funktionsgrafen

In der Grafik rechts gehört zu f_1 die »Winkelhalbierende«, so dass jede reelle Zahl x sich selbst zugeordnet wird (D_f die Menge der reellen Zahlen). Im Bereich der reellen Zahlen größer gleich eins (D_f) bildet die »Treppenfunktion« f_2 auf die Menge der natürlichen Zahlen ab, was man am treppenartigen Grafen erkennt. Für Intervalle auf der reellen Zahlengeraden verwenden wir die übliche Notation (siehe § 1.1.3 im Lehrbuch), wobei $\mathbb{R}^+$ für $(0,\infty)$, d.h. für die positiven reellen Zahlen, steht.

1.1 Mengen und Zahlenmengen

Aufgabe 1-1 (Standard)

An einem Tag finden in der Hochschule 3 Vorträge (A, B und C) statt. Hinsichtlich der Teilnahme ergibt sich folgendes Bild:

- 50 Studierende besuchten den Vortrag A,
- 90 Studierende besuchten den Vortrag B,
- 30 Studierende besuchten den Vortrag C,
- 10 Studierende besuchten alle 3 Vorträge,
- 20 Studierende besuchten die Vorträge A und B,
- 10 Studierende besuchten die Vorträge A und C,
- 15 Studierende besuchten die Vorträge B und C.

a) Veranschaulichen den Sachverhalt in einem Venn-Diagramm!
b) Wie viele Studierende besuchten nur einen Vortrag?
c) Wie viele Studierende besuchten überhaupt mindestens einen Vortrag?

Aufgabe 1-2 (Standard)

Eine Befragung von 90 Personen hinsichtlich ihrer Vorliebe für Wein ergab folgendes Ergebnis:

- 60 Personen trinken gern Rotwein,
- 50 Personen trinken gern Weißwein,
- 40 Personen trinken gern Roséwein.

Diese Zahlen schließen Folgendes ein:

- 35 Personen, die gern Rotwein und Weißwein trinken,
- 25 Personen, die gern Rotwein und Roséwein trinken,
- 20 Personen, die gern Weißwein und Roséwein trinken.

Hierin sind wiederum eingeschlossen:

- 15 Personen, die gern Rotwein, Weißwein und Roséwein trinken.

a) Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einem Venn-Diagramm!
b) Wie viele Personen trinken keines der drei Getränke gern?
c) Wie viele Personen mögen nur Rotwein?

Aufgabe 1-3 (Standard)

Welche der sieben Bereiche (Flächen) des dargestellten Venn-Diagramms gehören zu folgenden Mengen:

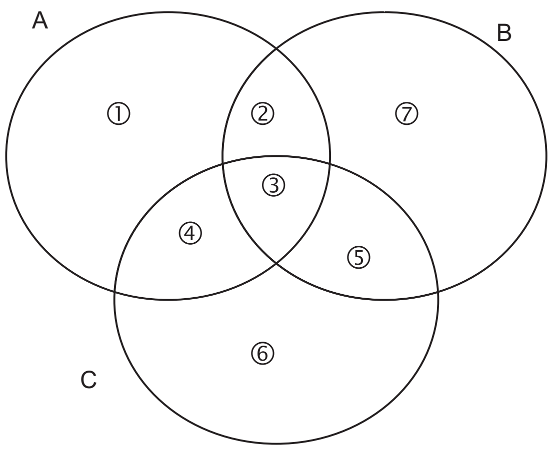


Abb. 2 Venn-Diagramm

a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cap (B \cup C)$
c) $A \setminus (B \cup C)$

d) $B \cup \left[A \setminus (A \cap C)\right]$
e) $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$
f) $[A \setminus (B \cup C] \cup [B \setminus (A \cup C] \cup [C \setminus (A \cup B]$

Aufgabe 1-4 (Standard)

Gegeben seien folgende Mengen: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$, $C = \{6,7,8,9,10,11,12,13\}$.

Bestimmen Sie folgende Mengen:

a) $A \cap (B \cap C)$
b) $A \setminus (B \cup C)$
c) (Gültigkeit der Distributivgesetze)
   i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Aufgabe 1-5 (Standard)

Die Differenzmenge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthält die reellen Zahlen außerhalb der Menge der Brüche (der rationalen Zahlen), wie z.B. $\sqrt{2}$, die Euler'sche Zahl e und π. In welche Zahlenmenge wird $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abgebildet, falls y gleich der auf vier Nachkommastellen gerundeten Zahl x ist?

Aufgabe 1-6 (Vertiefung)

Beweisen Sie anhand eines Widerspruchsbeweises, dass $\sqrt{17}$ keine rationale Zahl (also eine Zahl $\notin \mathbb{Q}$) ist!

Aufgabe 1-7 (Standard)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $y = f(x)$ die kleinstmögliche Zahlenmenge ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$), zu der die x-Werte im Prinzip gehören, sowie deren Teilmenge D_f, d.h. den Definitionsbereich, der die sachlogisch sinnvollen x-Werte enthält. Führen Sie dasselbe für die Zahlenmenge als Zielmenge, zu der die y-Werte im Prinzip gehören, sowie für den Wertebereich W_f der sachlogisch vorstellbaren y-Werte durch:

(a) (vgl. die Aufgaben 1.33 und 1.52)
   a1) y = Preis in *exakten* €-Beträgen ($y > 0$, bis auf den €-Cent genau) aus x = Preis in *runden* $-Beträgen ($x > 0$);
   a2) *Umsatzfunktion* $y = U(t) = 3t^3$ in Abhängigkeit des *Jahres* t, $x = t = 1, 2, 3, \ldots$ (vgl. Aufgabe 1.33);
   a3) Der prozentuale kumulierte Anteil y am gesamten Jahresumsatz aller umsatzsteuerpflichtigen deutschen Unternehmen (mit Umsatz jeweils > 17.500 €) in einem bestimmten

Bezugsjahr, für eine gewisse Teilmenge von Unternehmen mit prozentualer kumulierter Häufigkeit x. Eine solche Teilmenge betrifft für einen gewissen Index k ($k = 0, \ldots, 13$) die Gesamtheit der Unternehmen in den k kleinsten Größenklassen, wobei $k = 0$ für die leere Menge steht; siehe für das Jahr 2003 die Tabelle zur Aufgabe 1-52 (c). Genauer gesagt: Ausgehend von Prozentangaben mit *zwei Nachkommastellen* stellt y den *prozentualen kumulierten Anteil* am Gesamtjahresumsatz dar für die kleinsten Unternehmen mit *prozentualer kumulierter Häufigkeit* $x = x_k$, entsprechend der Teilmenge

- ($k = 0$) der leeren Größenklasse ($x_0 = 0{,}00$ %),
- ($k = 1$) der kleinsten Größenklasse, die aus Unternehmen besteht, deren Umsätze von über 17.500 bis zu 50.000 € betragen,
- ($k = 1$ und $k = 2$) der zwei kleinsten Größenklassen, die aus Unternehmen bestehen, deren Umsätze von über 17.500 bis zu 100.000 € betragen,
- ($k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$) der drei kleinsten Größenklassen, die aus Unternehmen bestehen, deren Umsätze von über 17.500 bis zu 250.000 € betragen, usw.,
- ($k = 1$ bis $k = 13$) aller Unternehmen mit Umsätzen über 17.500 € ($x_{13} = 100{,}00$ %)!

(b) (vgl. Aufgabe 1.54)

b1) $y = K_n$ in Abhängigkeit von $x = K_0 > 0$ unter exponentieller Verzinsung nach der Formel $K_n = (1 + i)^n \cdot K_0$ für $n \geq 1$ Jahre zum Zinssatz $i > 0$;

b2) Die *Laufzeit* $y = t$ in Abhängigkeit des gewünschten *Kapitalvermehrungsfaktors* $x = \frac{K_t}{K_0}$, bei exponentieller Verzinsung zum Zinssatz $i > 0$ (Anfangskapital $K_0 > 0$; Endkapital $K_t > K_0$);

b3) Der konstante *Abschreibungsbetrag* $y = a_t = a$ ($t = 1, \ldots, n$; jeweils zum Jahresende über n Jahre) bei vollständiger Abschreibung des Anschaffungskapitals $x = K_0 > 0$, siehe §2.2.2!

(c) (vgl. Aufgabe 1.55 (c)) Die Gewinnfunktion $y = G(x) = U(x) - K(x) = (-2x + 1) \cdot x - x^3 = -x^3 - 2x^2 + x$ in Abhängigkeit der Absatzmenge $x > 0$, gemäß der Kostenfunktion $K(x) = x^3$, der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -2x + 1$ und der Umsatzfunktion $U(x) = p(x) \cdot x$; verzichten Sie evtl. auf genaue Berechnung des Definitionsbereichs und des Wertebereichs!

Aufgabe 1-8 (Standard)

Eine Folge kann als Funktion $f\colon \mathbb{N} \to Y$ für irgendeine Zahlenmenge ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$) als Zielmenge Y aufgefasst werden: Das n-te Folgenglied a_n wird der natürlichen Zahl n zugeordnet. Verwendet man n für die Länge der Folge (Anzahl der Elemente), so schreibt man häufig $a_t = f(t)$ für $t \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie Zielmenge Y und Wertebereich W_f für

a) $a_t = t^2$;

b) $a_t = (-1)^t\, t$;

c) $a_t = \frac{t}{t+1}$;

d) $a_t = \frac{t+1}{t}$;

e) $a_t = \sqrt{\frac{t+1}{t}}$!

Aufgabe 1-9 (Standard)

Welchen Wertebereich hat die *Betragsfunktion* $f: x \to |x|$ für $x \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 1-10 (Standard; zulässige Bereiche in der linearen Optimierung)

Betrachten Sie die Geradengleichungen

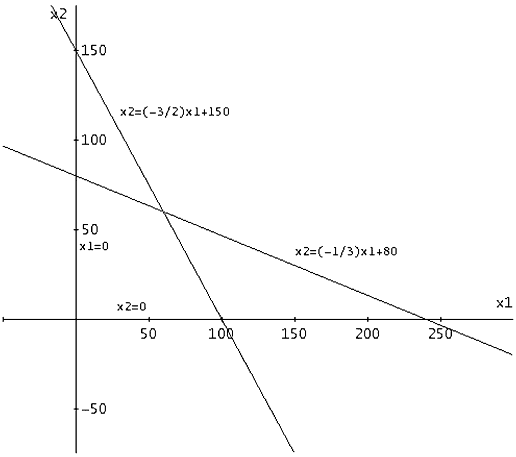
(i) $x_1 = 0$,

(ii) $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 150$,

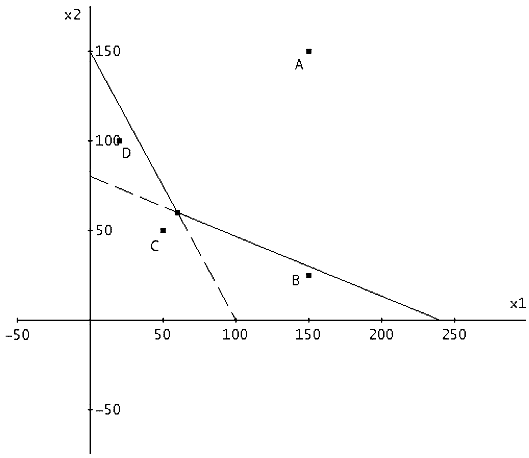
(iii) $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 80$ und

(iv) $x_2 = 0$

und die zugehörigen Grafen in der nachfolgenden Grafik links (vgl. § 3.1.4; x_1 steht für x, x_2 für y)!



Links: Vier **Geraden** im $[x_1\ x_2]$-Achsenkreuz (im ebenen Koordinatensystem).



Rechts: Vier **Teilmengen** im ersten Quadrant, jeweils (im Uhrzeigersinn) gekennzeichnet durch A = [150 150], B = [150 25], C = [50 50] bzw. D = [20 100].

Abb. 3 Geraden und Flächen zur linearen Optimierung

Mit $[x_1\ x_2]$ wird *der Punkt mit Abszisse* $x = x_1$ *und Ordinate* $y = x_2$ *bezeichnet*, und zwar ohne Komma zwischen x_1 und x_2 (dagegen bezeichnet $[x_1, x_2]$ das abgeschlossene Intervall zwischen x_1 und x_2)! Kontrollieren Sie durch Einsetzen der entsprechenden $[x_1\ x_2]$-Koordinaten, dass

(i) $x_1 = 0$ oder die Menge $\{[x_1\ x_2] \mid x_1 = 0\}$ die vertikale Achse, d.h. die Ordinate, darstellt,

(ii) die Menge $\left\{[x_1\ x_2] \mid x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 150\right\}$ die Gerade durch $[0\ 150]$ und $[100\ 0]$ darstellt,

(iii) die Menge $\left\{[x_1\ x_2] \mid x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 80\right\}$ die Gerade durch $[0\ 80]$ und $[240\ 0]$ darstellt,

(iv) $x_2 = 0$ oder die Menge $\{[x_1\ x_2] \mid x_2 = 0\}$ die horizontale Achse, d.h. die Abszisse, darstellt!

Frage 1-10.1 (Vertiefung)

Kennzeichen Sie im Uhrzeigersinn die Teilmengen des ersten Quadrants in der rechten Grafik durch die Punkte $A = [150\ 150]$, $B = [150\ 25]$, $C = [50\ 50]$ bzw. $D = [20\ 100]$, die als »Repräsentant der jeweiligen Teilmenge« fungieren, *wobei Sie die jeweiligen Begrenzungsgeraden ausschließen*! Beschreiben Sie die Menge

a) A als Schnittmenge von vier Mengen der Form $\{[x_1\ x_2] \mid x_2 > ax_1 + b\}$;

b) C als Schnittmenge von zwei Mengen der Form $\{[x_1\ x_2] \mid x_2 > ax_1 + b\}$ und zwei Mengen der Form $\{[x_1\ x_2] \mid x_2 < ax_1 + b\}$;

c) $B \cup C \cup \left\{[x_1\ x_2] \mid\ x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 150 \text{ und } 60 < x_1 < 100\right\}$ als Schnittmenge von zwei Mengen der Form $\{[x_1\ x_2] \mid x_2 > ax_1 + b\}$ und einer Menge der Form $\{[x_1\ x_2] \mid x_2 < ax_1 + b\}$;

d) $\left\{[x_1\ x_2] \mid\ x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 150 \text{ und } 0 \le x_1 \le 60\right\} \cup \left\{[x_1\ x_2] \mid\ x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 80 \text{ und } 60 \le x_1 \le 240\right\}$ als Zusammenstellung von Linienabschnitten (dabei ist $[60\ 60]$ Schnittpunkt von ii und iii);

e) welche die Differenz bildet von der Menge unter (d) und $\{[0\ 150], [60\ 60], [240\ 0]\}$, in anderen Worten: »Mit welchen Linienabschnitten stimmt diese Differenz überein?«;

f) $\overline{B \cup C \cup D}$, das Komplement der Menge $B \cup C \cup D$ bezüglich des ersten Quadrants (Grundmenge $G = \{[x_1\ x_2] \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$)!

1.2 Aussagen und Aussagenlogik

Aufgabe 1-11 (Standard)

Untersuchen Sie, ob folgende Implikationen korrekt sind ($x \in \mathbb{R}$):

a) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

c) $(x-3)\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3$

d) $(x-2)\cdot(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 5$

e) $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$

Aufgabe 1-12 (Standard)

Betrachten Sie folgende Behauptungen:

A: x ist eine positive reelle Zahl.

B: $x + \frac{16}{x} \geq 8$

Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Implikation $A \Rightarrow B$ an!

Aufgabe 1-13 (Standard)

Wir gehen von folgenden Annahmen aus:

1. Der Deckungsbeitrag DB ist definiert als »Umsatz minus variable Kosten«.
2. Es gelten folgende Aussagen:
   A: Die Umsätze der beiden Produkte P_1 und P_2 sind gleich.
   B: Die variablen Kosten der beiden Produkte P_1 und P_2 sind gleich.
   C: Die Deckungsbeiträge der beiden Produkte P_1 und P_2 sind gleich.

Geben Sie den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen an:

a) $A \wedge B \Rightarrow C$

b) $C \Rightarrow A \wedge B$.

Aufgabe 1-14 (Standard)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussageformen äquivalent sind:

a) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

b) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

c) $\sqrt{x^2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$

d) $x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

e) $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$

Aufgabe 1-15 (Standard)

Überprüfen Sie anhand der Wahrheitstafel (vgl. Lehrbuch) den Wahrheitsgehalt folgender Aussage:

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Aufgabe 1-16 (Standard)

Überprüfen Sie anhand der Wahrheitstafeln den Wahrheitsgehalt folgender Aussagen:

a) $\overline{A} \vee \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A \wedge B}$

b) $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

c) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)$

Aufgabe 1-17 (Standard)

Das Enthaltensein[2] einer Menge A in einer Menge B, nach der Formel $A \subseteq B$, lässt sich gleichwertig, d.h. logisch äquivalent, durch eine logische Bedingung für die Elemente $x \in A$ bzw. $x \in B$ festlegen. Welche Bedingung ist gemeint? Wie soll diese ergänzt werden, um striktes Enthaltensein ($A \subset B$, d.h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$) auszudrücken?

Frage 1-17.1 (Standard)

Welche zusammengesetzte logische Bedingung ist äquivalent zu der Eigenschaft $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ für die Zahlenmengen? Warum gilt sogar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$?

Frage 1-17.2 (Standard)

Leiten Sie aus der Bedingung für $A \subseteq B$ mittels der *logischen Negation* $\neg$ eine Bedingung für das *Nicht-Enthaltensein* (A Ø B) her. Setzen Sie das Ergebnis mit Hilfe des *Existenzquantors* $\exists$ in einen logisch äquivalenten Ausdruck um!

DERIVE-Frage 1-17.3 (Vertiefung; Tool 10)

Es sei p_1 die logische Bedingung für $A \subseteq B$ zu Beginn der Aufgabe und analog p_2 für $B \subseteq A$. Interpretieren Sie zusätzlich die logische Bedingung p_3: $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$!
Stellen Sie mittels TRUTH_TABLE(p1, p2, p3, Aussage 1 (p1, p2), Aussage 2 (p1, p2, p3))
in DERIVE eine Wahrheitstafel her für die folgenden zwei Aussagen:

1) Aussage 1 = $p_1 \wedge p_2$, d.h. die Konjunktion der Bedingungen für $A \subseteq B$ (p_1) und $B \subseteq A$ (p_2): »p_1 und p_2 sind beide wahr«,
2) Aussage 2 bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Aussage 1 und p_3 und lautet: »Aussage 1 ist logisch äquivalent ($\Leftrightarrow$, in DERIVE =) zur Aussage p_3.«

Kontrollieren Sie, dass Aussage 2, in Abhängigkeit der Aussage 1 und p_3, genau dann wahr ist, wenn die logische Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ wahr ist für beliebige Aussagen p und q. Damit wäre dann Aussage 2 bewiesen! Interpretieren Sie das Ergebnis als Eigenschaft der Mengenlehre!

2 In Aufgabe 1-17 wird zwischen Enthaltensein ($A \subseteq B$) und striktem Enthaltensein ($A \subset B$) unterschieden.

Aufgabe 1-18 (Standard)

Betrachten Sie die Funktion f der Aufgabe 1-7 (a3), welche den *prozentualen kumulierten Anteil* $y = f(x)$ am Gesamtjahresumsatz wiedergibt, in Abhängigkeit der *prozentualen kumulierten Häufigkeit* $x = x_k$ für Größenklasse k, $k = 0, \ldots, 13$; siehe auch die Tabelle zur Aufgabe 1-52 (c). Begründen Sie sachlogisch (statistisch!), warum aus $k_1 < k_2$ folgt, dass $f(x_{k_1}) < f(x_{k_2})$! Welcher logische Ausdruck beschreibt dies?

Frage 1-18.1 (Standard)

Ein Wirtschaftsanalyst betrachtet im Bezugsjahr jene Unternehmen, die einen größeren Umsatz haben als $U(k_1)$, die obere Intervallgrenze der Größenklasse $k_1 = 5$ ($U(5) = 1.000.000$ € im Beispiel der Aufgabe 1-52 (c)). Er behauptet, dass diese Unternehmen genau $1 - x_5$ % aller Unternehmen in der untersuchten Gesamtheit ausmachen ($1-89{,}82 = 10{,}18$ im Beispiel). Argumentieren Sie, warum seine Behauptung zutrifft!

Frage 1-18.2 (Standard)

Bestimmen Sie anhand der prozentualen kumulierten Häufigkeitsfunktion $f(x)$ zu den *einzelnen* Unternehmen – nach Jahresumsatz geordnet, aber *ohne* Klasseneinteilung – eine Aussage p, nach der $A = \{u|\ p(u)\}$ genau die Menge aller Unternehmen u aus den Größenklassen 1 bis $k_1 = 5$ beschreibt! Stellen Sie eine logische Bedingung auf, nach der das *Komplement* $\overline{A}$ genau die obige vom Analysten betrachtete Menge von Unternehmen ist!

Aufgabe 1-19 (Vertiefung)

Bestimmen Sie zusammengesetzte logische Aussagen, welche die in Antwort 1-10.1 beschriebenen Mengen (a), (d), (e) und (f) bedingen, und zwar in Bezug auf die Punkte $[x_1\ x_2]$ im Achsenkreuz (das ebene Koordinatensystem stellt die Grundmenge G dar)!

1.3 Grundzüge der Arithmetik

Aufgabe 1-20 (Standard)

Fassen Sie zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $24a^3bx^2 - 60abx - 48a^2b^2x^2$

b) $(3y^2 - 7)\cdot(2y^2 - 3y + 8)$

c) $17x^2y^3z^5 : 34xyz^7$