

L. D. Landau · E. M. Lifschitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik
Band IV

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:

Mechanik

unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2016, 231 Seiten, 56 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:

Klassische Feldtheorie

unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2018, 496 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:

Quantenmechanik

unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2019, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:

Quantenelektrodynamik

unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2020, 628 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:

Statistische Physik Teil 1

unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2016, 535 Seiten, 78 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:

Hydrodynamik

korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:

Elastizitätstheorie

unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen, ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:

Elektrodynamik der Kontinua

unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2020, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:

Statistische Physik Teil 2

unveränderter Nachdruck der 4., berichtigten Auflage 1992, 2020, 404 Seiten, 18 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:

Physikalische Kinetik

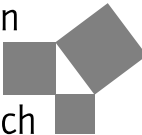
unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2020, 480 Seiten, 35 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:

L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**

ISBN 978-3-8085-5588-0



Edition
Harri 
Deutsch

W. B. Berestetzki • E. M. Lifschitz • L. P. Pitajewski

Quantenelektrodynamik

Mit 25 Abbildungen

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56320

Titel der Originalausgabe:

В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский
Квантовая электродинамика

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1989

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. sc. Adolf Kühnel, Leipzig, und Prof. Dr. habil. Paul Ziesche, Dresden,
übersetzt aus dem Russischen von Prof. Dr. sc. Adolf Kühnel.

Unveränderter Nachdruck der 7., ergänzten Auflage 1991
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5632-0

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 63546 Hammersbach
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

VORWORT

ZUR VIERTEN DEUTSCHEN AUFLAGE

Die relativistische Quantentheorie ist gegenwärtig bei weitem noch keine abgeschlossene Theorie; selbst die physikalischen Prinzipien, auf denen diese Theorie aufbaut, sind noch nicht völlig ergründet. Diese Feststellungen treffen in besonderem Maße auf die Theorie der starken und der schwachen Wechselwirkungen zu.

Dem ursprünglichen Vorhaben von L. D. LANDAU entsprechend, sollen in diesem Lehrbuch nur diejenigen theoretischen Ergebnisse dargestellt werden, die mit einem vernünftigen Grad an Zuverlässigkeit als gesichert erscheinen und in ein bestimmtes System eingeordnet werden können. Mit anderen Worten, die Darstellung sollte sich nicht zu dicht an die „vorderste Front“ der Theoretischen Physik heranwagen. Es ist ganz natürlich, daß man sich bei einem derartigen Vorhaben im wesentlichen auf die Quantenelektrodynamik beschränken muß.

Bei der Behandlung der konkreten Anwendungen der Theorie haben wir uns nicht das Ziel gestellt, die Vielzahl der einschlägigen Effekte vollständig zu erfassen; wir haben uns auf die grundlegenden Effekte beschränkt und zusätzlich einige Hinweise auf Originalarbeiten gegeben, in denen weitergehende Untersuchungen zu finden sind. Bei der Wiedergabe der meist sehr umfangreichen Rechnungen haben wir oft einige Zwischenformeln weggelassen, aber wir haben uns immer bemüht, alle nicht-trivialen methodischen Gesichtspunkte darzustellen. In diesem Zusammenhang muß man beachten, daß in diesem Band gegenüber den anderen Bänden dieses Lehrbuches ein höheres Niveau des Lesers vorausgesetzt wird.

Dieser Band ist ohne die direkte Beteiligung unseres Lehrers L. D. LANDAU geschrieben worden. Wir haben uns jedoch bemüht, uns immer von demselben Geist und demselben Verhältnis zur Theoretischen Physik leiten zu lassen, das er uns gelehrt hat und das er auch in den anderen Bänden dieses Lehrbuches eingenommen hat. Wir haben uns häufig selbst gefragt, wie sich wohl DAU zu dieser oder jener Frage stellen würde, und wir haben uns bemüht, so zu antworten, wie es uns die jahrelange Gemeinsamkeit mit ihm eingegeben hat.

In dieser Auflage sind die beiden Teile, in denen dieser Band in früheren Auflagen herausgegeben worden ist, zu einem Buch vereinigt worden. Wir haben es dabei für zweckmäßig erachtet (gemäß der oben formulierten allgemeinen Zielstellung), eine gewisse Kürzung vorzunehmen und einige fragmentarische Abschnitte über die Theorie der starken und der schwachen Wechselwirkungen wegzulassen. Gleichzeitig haben wir das Kapitel über die Elektrodynamik der Hadronen etwas erweitert und auch an einigen anderen Stellen geringfügige Änderungen vorgenommen.

November 1976

W. B. BERESTETZKI

E. M. LIFSCHITZ

L. P. PITAJEWSKI

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Der vorliegende Band des „Lehrbuches für Theoretische Physik“ befaßt sich mit der Quantenelektrodynamik, dem weitgehend abgesicherten Gebiet der relativistischen Quantentheorie. Einige der dargestellten Ergebnisse liegen in diesem Buch erstmalig in deutscher Sprache vor. Die Art des zu vermittelnden Stoffes bedingt eine anspruchsvollere Darstellung als in den anderen Bänden dieses Lehrbuches, mitunter müssen recht formale Abschnitte vorbereitend für die physikalische Anwendung eingestreut werden. Andererseits sind oft längere Zwischenrechnungen, die die Darstellung unnötig schwerfällig werden ließen, nicht wiedergegeben, und der interessierte Leser wird die betreffenden Rechnungen entweder selbst ausführen oder zur zitierten Originalliteratur greifen.

Die vorliegende 7. deutsche Auflage der Quantenelektrodynamik wurde nach der 3. russischen Auflage dieses Buches vorbereitet. Die dort enthaltenen Korrekturen und Veränderungen sind in dieser deutschen Auflage berücksichtigt worden. Die vorgenommenen Änderungen gegenüber der 6. deutschen Auflage sind, abgesehen von den neu eingeführten Formelsymbolen, geringfügig.

Frau Diplom-Physiker U. Nitzsche sei an dieser Stelle für eine gründliche Durchsicht der vorangegangenen deutschen Auflage auf Druckfehler gedankt. Ebenso gilt unser Dank Herrn Prof. L. P. Pitajewski für seine Unterstützung bei der Vorbereitung dieser neuen Auflage. Die erfreuliche Zusammenarbeit mit Herrn Prof. E. M. Lifschitz bei der Herausgabe früherer deutscher Auflagen behalten wir in dankbarer Erinnerung.

Dresden und Leipzig 1990

P. Ziesche

A. Kühnel

INHALTSVERZEICHNIS

Einige Bezeichnungen	XIII
Einleitung.	1
§ 1. Unschärferelationen im relativistischen Bereich	1
Kapitel I. Das Photon	5
§ 2. Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes	5
§ 3. Photonen.	10
§ 4. Eichinvarianz	12
§ 5. Das elektromagnetische Feld in der Quantentheorie	14
§ 6. Drehimpuls und Parität eines Photons	15
§ 7. Kugelwellen für Photonen	18
§ 8. Polarisierung eines Photons	23
§ 9. Ein System aus zwei Photonen	28
Kapitel II. Bosonen	32
§ 10. Die Wellengleichung für Teilchen mit dem Spin 0	32
§ 11. Teilchen und Antiteilchen	36
§ 12. Streng neutrale Teilchen	40
§ 13. Die Transformationen C , P und T	42
§ 14. Die Wellengleichung für ein Teilchen mit dem Spin 1	48
§ 15. Die Wellengleichung für Teilchen mit höheren ganzzahligen Spins	52
§ 16. Zustände eines Teilchens mit bestimmter Spiralität	53
Kapitel III. Fermionen	59
§ 17. 4-Spinoren	59
§ 18. Zusammenhang zwischen Spinoren und 4-Vektoren.	61
§ 19. Spiegelung von Spinoren	64
§ 20. Die DIRAC-Gleichung in Spinorschreibweise	69
§ 21. Symmetrische Form der DIRAC-Gleichung	71
§ 22. Die Algebra der DIRAC-Matrizen	76
§ 23. Ebene Wellen	79
§ 24. Kugelwellen	82
§ 25. Zusammenhang zwischen Spin und Statistik	86
§ 26. Ladungskonjugation und Zeitumkehr für Spinoren	88
§ 27. Innere Symmetrie von Teilchen und Antiteilchen	93
§ 28. Bilineare Formen	95
§ 29. Die Polarisationsmatrix	99

§ 30. Zweikomponentige Fermionen	104
§ 31. Die Wellengleichung für ein Teilchen mit dem Spin $3/2$	107
Kapitel IV. Ein Teilchen in einem äußeren Feld	110
§ 32. Die DIRAC-Gleichung für ein Elektron in einem äußeren Feld	110
§ 33. Entwicklung nach Potenzen von $1/c$	114
§ 34. Feinstrukturniveaus des Wasserstoffatoms	117
§ 35. Bewegung im kugelsymmetrischen Feld	119
§ 36. Bewegung im COULOMB-Feld	124
§ 37. Streuung an einem kugelsymmetrischen Feld	130
§ 38. Streuung im ultrarelativistischen Fall	132
§ 39. Das System der Wellenfunktionen zum kontinuierlichen Spektrum für die Streuung am COULOMB-Feld	134
§ 40. Ein Elektron im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle	137
§ 41. Bewegung eines Spins in einem äußeren Feld	140
§ 42. Neutronenstreuung an einem elektrischen Feld	146
Kapitel V. Strahlung	148
§ 43. Der Operator für die elektromagnetische Wechselwirkung.	148
§ 44. Emission und Absorption	150
§ 45. Dipolstrahlung	153
§ 46. Elektrische Multipolstrahlung	155
§ 47. Magnetische Multipolstrahlung	159
§ 48. Winkelverteilung und Polarisation der Strahlung	161
§ 49. Strahlung von Atomen. Elektrische Strahlung	169
§ 50. Strahlung von Atomen. Magnetische Strahlung	173
§ 51. Strahlung von Atomen. ZEEMAN- und STARK-Effekt	176
§ 52. Strahlung von Atomen. Das Wasserstoffatom	179
§ 53. Strahlung zweiatomiger Moleküle. Elektronenspektren	184
§ 54. Strahlung zweiatomiger Moleküle. Schwingungs- und Rotations- spektren	190
§ 55. Strahlung von Kernen	191
§ 56. Photoeffekt. Nichtrelativistischer Fall	194
§ 57. Photoeffekt. Relativistischer Fall	198
§ 58. Photodesintegration des Deuterons	202
Kapitel VI. Streuung von Licht	206
§ 59. Der Streutensor	206
§ 60. Streuung an beliebig orientierten Systemen	215
§ 61. Streuung an Molekülen	221
§ 62. Natürliche Breite von Spektrallinien	225
§ 63. Resonanzfluoreszenz	228
Kapitel VII. Die Streumatrix	231
§ 64. Die Streuamplitude	231
§ 65. Reaktionen mit polarisierten Teilchen	236
§ 66. Kinematische Invarianten	239
§ 67. Physikalische Bereiche	241
§ 68. Partialwellenentwicklung	246
§ 69. Symmetrie der Streuamplituden zu bestimmten Spiralzuständen	249
§ 70. Invariante Amplituden	255
§ 71. Unitaritätsbedingung	259

Kapitel VIII. Invariante Störungstheorie	264
§ 72. Zeitgeordnetes Produkt	264
§ 73. FEYNMAN-Diagramme für die Streuung von Elektronen	267
§ 74. FEYNMAN-Diagramme für die Streuung eines Photons	273
§ 75. Der Elektronenpropagator	276
§ 76. Der Photonenpropagator	280
§ 77. Allgemeine Regeln zur Diagrammtechnik	284
§ 78. Crossing-Invarianz	291
§ 79. Virtuelle Teilchen	292
Kapitel IX. Wechselwirkung von Elektronen	297
§ 80. Streuung eines Elektrons an einem äußeren Feld	297
§ 81. Streuung von Elektronen und Positronen an einem Elektron	301
§ 82. Ionisierungsverluste schneller Teilchen	309
§ 83. Die BREITSche Gleichung	315
§ 84. Positronium	322
§ 85. Wechselwirkung von Atomen über große Entfernungen	325
Kapitel X. Wechselwirkung von Elektronen mit Photonen	331
§ 86. Streuung eines Photons an einem Elektron	331
§ 87. Streuung eines Photons an einem Elektron. Polarisierungseffekte	336
§ 88. Vernichtung eines Elektronenpaares unter Erzeugung zweier Photonen	344
§ 89. Vernichtung von Positronium	348
§ 90. Bremsstrahlung im Magnetfeld	352
§ 91. Paarbildung durch ein Photon in einem Magnetfeld	362
§ 92. Bremsstrahlung eines Elektrons beim Stoß mit einem Kern. Nicht-relativistischer Fall	364
§ 93. Bremsstrahlung eines Elektrons beim Stoß mit einem Kern. Relativistischer Fall	375
§ 94. Paarerzeugung durch ein Photon im Kernfeld	385
§ 95. Exakte Theorie der Paarerzeugung im ultrarelativistischen Fall	388
§ 96. Exakte Theorie der Bremsstrahlung im ultrarelativistischen Fall	394
§ 97. Bremsstrahlung bei einem Elektron-Elektron-Stoß im ultrarelativistischen Fall	401
§ 98. Emission weicher Photonen bei Stößen	405
§ 99. Die Methode der äquivalenten Photonen	412
§ 100. Paarerzeugung bei Stößen	418
§ 101. Emission eines Photons durch ein Elektron im Feld einer intensiven elektromagnetischen Welle	423
Kapitel XI. Exakte Propagatoren und Eckteile	429
§ 102. Feldoperatoren im HEISENBERG-Bild	429
§ 103. Der exakte Photonenpropagator	431
§ 104. Die Selbstenergiefunktion für ein Photon	437
§ 105. Der exakte Elektronenpropagator	441
§ 106. Der Vertexoperator	444
§ 107. Die DYSON-Gleichung	447
§ 108. Die WARD-Identität	449
§ 109. Der Elektronenpropagator zu äußerem Feld	453
§ 110. Die physikalischen Renormierungsbedingungen	458

§ 111. Die analytischen Eigenschaften des Photonenpropagators . . .	463
§ 112. Die Regularisierung von FEYNMAN-Integralen	467
Kapitel XII. Strahlungskorrekturen	471
§ 113. Berechnung des Polarisationsoperators	471
§ 114. Strahlungskorrekturen zum COULOMBSchen Gesetz	474
§ 115. Berechnung des Imaginärteiles des Polarisationsoperators über ein FEYNMAN-Integral	477
§ 116. Die elektromagnetischen Formfaktoren eines Elektrons	482
§ 117. Berechnung der Formfaktoren für ein Elektron	485
§ 118. Das anomale magnetische Moment eines Elektrons.	489
§ 119. Berechnung des Massenoperators	492
§ 120. Die Emission weicher Photonen mit von Null verschiedener Masse	497
§ 121. Die Streuung eines Elektrons an einem äußeren Feld in zweiter BORNScher Näherung	502
§ 122. Strahlungskorrekturen zur Streuung eines Elektrons an einem äußeren Feld	507
§ 123. Verschiebung der Atomniveaus infolge Strahlungskorrekturen . .	511
§ 124. Verschiebung der Niveaus mesischer Atome infolge Strahlungs- korrekturen.	517
§ 125. Die relativistische Gleichung für gebundene Zustände	519
§ 126. Doppeldispersionsrelationen	525
§ 127. Photon-Photon-Streuung	532
§ 128. Kohärente Streuung eines Photons an einem Kernfeld	539
§ 129. Strahlungskorrekturen zu den Gleichungen für das elektromagneti- sche Feld	541
§ 130. Der Zerfall eines Photons im Magnetfeld	550
§ 131. Berechnung von Integralen über vierdimensionale Bereiche . . .	557
Kapitel XIII. Asymptotische Formeln für die Quantenelektrodynamik	562
§ 132. Das asymptotische Verhalten des Photonenpropagators für große Impulse	562
§ 133. Der Zusammenhang zwischen „nackten“ und wahren Ladungen .	566
§ 134. Das asymptotische Verhalten der Streuamplituden bei großen Energien	568
§ 135. Abtrennung der doppelt logarithmischen Glieder im Vertex- operator	573
§ 136. Die doppelt logarithmische Asymptote des Vertexoperators . . .	579
§ 137. Die doppelt logarithmische Asymptote für die Amplitude der Elektron-Müon-Streuung	581
Kapitel XIV. Elektrodynamik der Hadronen	588
§ 138. Elektromagnetische Formfaktoren der Hadronen	588
§ 139. Elastische Elektron-Hadron-Streuung	593
§ 140. Ein Satz für die Bremsstrahlung im niederenergetischen Bereich	596
§ 141. Ein Satz für die Photon-Hadron-Streuung im niederenergetischen Bereich	599
§ 142. Die Multipolmomente der Hadronen	602
§ 143. Inelastische Elektron-Hadron-Streuung	606
§ 144. Die Umwandlung eines Elektron-Positron-Paares in Hadronen und die hadronische Vakuumpolarisation	609
Sachverzeichnis	611

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Vierdimensionale Bezeichnungen

Vierdimensionale Tensorindizes werden mit griechischen Buchstaben $\lambda, \mu, \nu, \dots$ bezeichnet und nehmen die Werte 0, 1, 2, 3 an.

Es wird die 4-Metrik mit der Signatur $(+---)$ verwendet. Der metrische Tensor ist $g_{\mu\nu}$ ($g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$).

Die Komponenten eines 4-Vektors werden in folgender Weise angegeben: $a^\mu \equiv (a^0, \mathbf{a})$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise von Formeln wird der Index der Komponenten von 4-Vektoren häufig weggelassen.¹⁾ Skalarprodukte von 4-Vektoren werden dabei einfach als (ab) oder ab geschrieben: $ab = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \mathbf{a}\mathbf{b}$.

Der vierdimensionale Ortsvektor ist $x^\mu = (t, \mathbf{r})$, das vierdimensionale Volumenelement ist d^4x .

Der Operator für die Differentiation nach den 4-Koordinaten ist $\partial^\mu = \partial/\partial x^\mu$.

Der antisymmetrische 4-Einheitstensor ist $e^{\pi\mu\nu\varrho}$ mit $e^{0123} = -e_{0123} = +1$.

Die vierdimensionale δ -Funktion ist $\delta^{(4)}(a) = \delta(a_0) \delta(\mathbf{a})$.

Dreidimensionale Bezeichnungen

Für die dreidimensionalen Tensorindizes werden lateinische Buchstaben verwendet: $i, k, l, \dots$; sie nehmen die Werte x, y, z an.

Dreidimensionale Vektoren werden als halbfett-kursive Buchstaben gesetzt oder griechische Buchstaben mit Pfeil.

Das dreidimensionale Volumenelement ist d^3x .

Operatoren

Operatoren werden mit Buchstaben mit einem „Dach“ bezeichnet.²⁾

Die Kommutatoren oder Antikommutatoren zweier Operatoren sind $\{\hat{f}, \hat{g}\}_\pm = \hat{f}\hat{g} \pm \hat{g}\hat{f}$.

¹⁾ Diese Schreibweise ist in der heutigen Literatur weit verbreitet. Dieser Kompromiß zwischen den Vorräten an Buchstaben und den Erfordernissen der Physik erfordert natürlich vom Leser besondere Aufmerksamkeit.

²⁾ Zur Vereinfachung der Schreibweise wird aber über den Spinmatrizen das Dach weggelassen. Auch über den Bezeichnungen für die Operatoren in Matrixelementen wird das Dach nicht mitgeschrieben.

XIV Einige Bezeichnungen

Der transponierte Operator ist $\tilde{f}$.

Der adjungierte (hermitesch konjugierte) Operator ist $\hat{f}^+$.

Der Operator für die Ladungskonjugation ist $\hat{C}$.¹⁾

Der Operator einer räumlichen Spiegelung ist $\hat{P}$.¹⁾

Der Operator für die Zeitumkehr ist $\hat{T}$.

Für das Symbol des zeitgeordneten Produkts wird der Buchstabe T verwendet.

Matrixelemente

Das Matrixelement des Operators $\hat{F}$ für den Übergang aus dem Anfangszustand i in den Endzustand f ist F_{fi} oder $\langle f | F | i \rangle$.

Die Bezeichnung $|i\rangle$ wird als abstraktes Symbol für einen Zustand unabhängig von der konkreten Darstellung der zugehörigen Wellenfunktion verwendet, $\langle f |$ ist das Symbol für den Endzustand („konjugiert komplexen“ Zustand).²⁾

Dementsprechend werden mit $\langle s | r \rangle$ die Koeffizienten in der Entwicklung eines Systems von Zuständen mit den Quantenzahlen r nach Zuständen mit den Quantenzahlen s bezeichnet: $|r\rangle = \sum_s |s\rangle \langle s | r \rangle$.

Die reduzierten Matrixelemente der sphärischen Tensoren sind $\langle f || F || i \rangle$.

Dirac-Gleichung

Die DIRAC-Matrizen sind γ^μ mit $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$; ferner treten die Matrizen $\alpha = \gamma^0 \gamma$ und $\beta = \gamma^0$ auf. Ausdrücke in Spinor- und in Standarddarstellung sind (21,3), (21,16), (21,20) (S. 72, 74, 75).

$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $(\gamma^5)^2 = 1$ (s. (22,18) auf S. 78).

$\sigma^{\mu\nu} = 1/2(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ (s. (28,2) auf S. 95).

DIRACsche Konjugation: $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$.

Die PAULI-Matrizen $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sind auf S. 62 definiert.

Die Indizes von 4-Spinoren werden mit $\alpha, \beta, \dots$ und $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$ bezeichnet und nehmen die Werte 1, 2 und $\dot{1}, \dot{2}$ an.

Die Bispinorindizes $i, k, l, \dots$ nehmen die Werte 1, 2, 3, 4 an.

FOURIER-Entwicklung

Die dreidimensionale Entwicklung ist

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad f(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3x.$$

Entsprechendes gilt für den vierdimensionalen Fall.

¹⁾ Von den englischen Worten charge (Ladung) bzw. parity (Parität).

²⁾ Beziehung nach DIRAC.

Maßeinheiten

Wenn nicht besonders darauf hingewiesen wird, werden die relativistischen Einheiten $\hbar = 1$ und $c = 1$ verwendet. In diesen Einheiten ist das Quadrat der Elementarladung $e^2 = 1/137$.

Die atomaren Maßeinheiten sind: $e = 1$, $\hbar = 1$, $m = 1$. In diesen Einheiten ist $c = 137$. Atomare Längen-, Zeit- und Energieeinheit sind $\hbar^2/me^2$, $\hbar^3/me^4$ bzw. $me^4/\hbar^2$ (die Größe $Ry = me^4/2\hbar$ wird als Rydberg bezeichnet).

Die normalen Einheiten werden dem absoluten (GAUSSschen) Maßsystem entnommen.

Konstanten

Lichtgeschwindigkeit $c = 2,997\,925 \cdot 10^{10}$ cm/s.

Elementarladung¹⁾ $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ cgs-Einheiten.

Elektronenmasse $m = 9,110 \cdot 10^{-28}$ g.

PLANCKSches Wirkungsquantum $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-27}$ erg · s.

Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c$; $1/\alpha = 137,04$.

BOHRscher Radius $\hbar^2/me^2 = 5,292 \cdot 10^{-9}$ cm.

Klassischer Elektronenradius $r_e = e^2/mc^2 = 2,818 \cdot 10^{-13}$ cm.

COMPTON-Wellenlänge eines Elektrons $\hbar/mc = 3,862 \cdot 10^{-11}$ cm.

Ruhenergie eines Elektrons $mc^2 = 0,5110 \cdot 10^6$ eV.

Atomare Energieeinheit $me^4/\hbar^2 = 4,360 \cdot 10^{-11}$ erg = 27,21 eV.

BOHRsches Magneton $e\hbar/2mc = 9,274 \cdot 10^{-17}$ erg/T.

Protonenmasse $m_p = 1,673 \cdot 10^{-24}$ g.

COMPTON-Wellenlänge eines Protons $\hbar/m_p c = 2,103 \cdot 10^{-14}$ cm.

Kernmagneton $e\hbar/2m_p c = 5,051 \cdot 10^{-20}$ erg/T.

Verhältnis der Müonenmasse zur Elektronenmasse $m_\mu/m = 2,068 \cdot 10^2$.

Hinweise auf andere Bände dieses Lehrbuches sind mit Ziffern versehen: I (Mechanik, 1984), II (Feldtheorie, 1984), III (Quantenmechanik, 1984), VIII (Elektrodynamik der Kontinua, 1985), X (Physikalische Kinetik, 1990).

¹⁾ In diesem Band enthält die Bezeichnung e für die Ladung eines Teilchens (überall außer in Kapitel XIV) auch das Vorzeichen, so daß für ein Elektron $e = -|e|$ gilt.

EINLEITUNG

§ 1. Unschärferelationen im relativistischen Bereich

Die gesamte in Band III dieses Lehrbuches behandelte Quantenmechanik ist nicht-relativistisch; sie kann nicht auf Erscheinungen angewandt werden, bei denen Bewegungen mit Geschwindigkeiten, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit nicht klein sind, vorkommen. Auf den ersten Blick könnte man erwarten, daß der Übergang zu einer relativistischen Theorie durch eine mehr oder weniger direkte Verallgemeinerung des Apparates der nichtrelativistischen Quantenmechanik möglich wäre. Eine sorgfältige Betrachtung zeigt dagegen, daß der Aufbau einer logisch geschlossenen relativistischen Theorie die Einbeziehung neuer physikalischer Prinzipien erfordert.

Wir wollen an einige physikalische Vorstellungen erinnern, die der nichtrelativistischen Quantenmechanik zugrunde liegen (III, § 1). Wir haben gesehen, daß in der nichtrelativistischen Quantenmechanik der Begriff der Messung eine fundamentale Rolle spielt. Unter einem Meßprozeß versteht man die Wechselwirkung eines quantenmechanischen Systems mit einem „klassischen Objekt“ („Gerät“); durch diese Wechselwirkung nimmt das quantenmechanische System bestimmte Werte gewisser dynamischer Veränderlicher (Koordinaten, Geschwindigkeiten u. ä.) an. Wir haben auch gesehen, daß die Quantenmechanik die Möglichkeiten der gleichzeitigen Existenz verschiedener dynamischer Veränderlicher eines Elektrons¹⁾ stark einschränkt. Die Unschärfen Δq und Δp , die bei einer gleichzeitigen Messung von Ort und Impuls unvermeidlich sind, erfüllen die Beziehung $\Delta q \Delta p \sim \hbar$;²⁾ je genauer man eine dieser Größen mißt, desto weniger genau kann die andere gleichzeitig gemessen werden.

Es ist aber wesentlich, daß jede dynamische Veränderliche eines Elektrons für sich allein beliebig genau gemessen werden kann; die Messung kann in einem beliebig kleinen Zeitintervall erfolgen. Dieser Sachverhalt spielt für die ganze nichtrelativistische Quantenmechanik eine fundamentale Rolle. Nur auf Grund dessen kann man den Begriff der Wellenfunktion einführen, der für den Apparat in dieser Theorie grundlegend ist. Tatsächlich hat die Wellenfunktion $\psi(q)$ folgende physikalische Bedeutung: Das Betragsquadrat der Wellenfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man bei einer Messung zu einem bestimmten Zeitpunkt das Elektron an dem betreffenden Ort vorfindet. Eine notwendige Voraussetzung, den Begriff einer solchen Wellenfunktion einführen zu können, ist offensichtlich die prinzipielle Möglichkeit, den Ort beliebig genau und schnell messen zu können; anderenfalls würde dieser Begriff gegenstandslos und würde seinen physikalischen Sinn verlieren.

¹⁾ Wie in III, § 1 sprechen wir der Kürze halber von einem Elektron, denken dabei aber an ein beliebiges quantenmechanisches System.

²⁾ In diesem Paragraphen verwenden wir normale Einheiten.

Die Existenz einer Grenzgeschwindigkeit (der Lichtgeschwindigkeit c) führt zu neuen prinzipiellen Einschränkungen der Möglichkeiten, verschiedene physikalische Größen zu messen (L. D. LANDAU, R. PEIERLS, 1930).

In III, § 44 haben wir die Beziehung

$$(v' - v) \Delta p \Delta t \sim \hbar \quad (1,1)$$

abgeleitet, die die Unschärfe Δp in der Impulsmessung an einem Elektron mit der Dauer Δt des Meßprozesses verknüpft; v und v' sind die Geschwindigkeiten des Elektrons vor und nach der Messung. Aus dieser Beziehung folgt: Man kann eine genügend genaue Impulsmessung in einer relativ kurzen Zeit (d. h. kleines Δp bei kleinem Δt) nur auf Kosten einer recht großen Geschwindigkeitsänderung während des Meßprozesses erreichen. In der nichtrelativistischen Theorie äußerte sich dieser Sachverhalt darin, daß eine Impulsmessung nicht nach kurzen Zeitintervallen reproduziert werden kann; in keiner Weise wird davon aber die prinzipielle Möglichkeit einer beliebig genauen Impulsmessung berührt, da die Differenz $v' - v$ immer beliebig groß gemacht werden konnte.

Die Existenz einer Grenzgeschwindigkeit ändert die Sachlage grundlegend. Die Differenz $v' - v$ kann wie die Geschwindigkeiten selbst jetzt nicht größer als c (genauer $2c$) sein. Ersetzen wir in (1,1) $v' - v$ durch c , dann erhalten wir die Beziehung

$$\Delta p \Delta t \sim \frac{\hbar}{c}. \quad (1,2)$$

Diese Beziehung bestimmt die beste, prinzipiell erreichbare Genauigkeit einer Impulsmessung bei gegebener Meßdauer Δt . In einer relativistischen Theorie ist es also prinzipiell unmöglich, den Impuls beliebig genau und beliebig schnell zu messen. Eine genaue Impulsmessung ($\Delta p \rightarrow 0$) ist nur im Grenzfall einer unendlich langen Meßzeit möglich.

Auch die Meßbarkeit des Ortes erfährt eine tiefgreifende Abänderung: In einer relativistischen Theorie ist der Ort nur bis zu einer gewissen Genauigkeit meßbar, eine bestimmte untere Grenze der Ortsunschärfe kann nicht unterschritten werden. Der Begriff der Lokalisierung eines Elektrons wird in seinem physikalischen Sinn weiter eingeschränkt.

Im mathematischen Formalismus der Theorie äußert sich diese Situation so, daß eine genaue Ortsmessung mit der Positivität der Energie eines freien Teilchens unvereinbar ist. Wie wir später noch sehen werden, enthält das vollständige System der Eigenfunktionen einer relativistischen Wellengleichung für ein freies Teilchen (neben Lösungen mit der „richtigen“ Zeitabhängigkeit) auch Lösungen mit einer „negativen Frequenz“. Diese Funktionen gehen im allgemeinen auch in die Entwicklung des Wellenpaketes ein, das einem in einem kleinen Raumgebiet lokalisierten Elektron entspricht.

Die Wellenfunktionen mit „negativer Frequenz“ hängen, wie noch gezeigt wird, mit der Existenz von Antiteilchen — Positronen — zusammen. Das Auftreten dieser Funktionen in der Entwicklung eines Wellenpaketes ist der Ausdruck dafür, daß bei einer Ortsmessung für ein Elektron im allgemeinen unvermeidlich Elektron-Positron-Paare gebildet werden. Die durch den Prozeß selbst hervorgerufene, unkontrollierbare Erzeugung neuer Teilchen nimmt der Ortsmessung offensichtlich ihren Sinn.

Im Ruhssystem des Elektrons ist der minimale Fehler bei einer Ortsmessung

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc}. \quad (1,3)$$

Diesem Wert (dem einzigen, der aus Dimensionsbetrachtungen heraus möglich ist) entspricht die Impulsunschärfe $\Delta p \sim mc$, die ihrerseits der kleinsten Schwellenenergie für die Paarerzeugung entspricht.

In einem Bezugssystem, in dem sich das Elektron mit der Energie ε bewegt, haben wir statt (1,3)

$$\Delta q \sim \frac{\hbar c}{\varepsilon}. \quad (1,4)$$

Im ultrarelativistischen Grenzfall besteht zwischen Energie und Impuls die Beziehung $\varepsilon \approx cp$, und es ist dann speziell

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{p}, \quad (1,5)$$

d. h., der Fehler Δq stimmt mit der DE BROGLIE-Wellenlänge des Teilchens überein.¹⁾

Für Photonen liegt immer der ultrarelativistische Fall vor, so daß der Ausdruck (1,5) gilt. Es hat demnach nur dann einen Sinn, von den Koordinaten eines Photons zu sprechen, wenn die charakteristischen Abmessungen des Problems groß gegenüber der Wellenlänge sind. Dann handelt es sich aber gerade um den „klassischen“ Grenzfall, der der geometrischen Optik entspricht und in dem man von der Lichtausbreitung entlang bestimmter Bahnen — Strahlen — sprechen kann. Im quantenmechanischen Fall dagegen, wenn man die Wellenlänge nicht als klein ansehen kann, wird der Begriff der Koordinaten eines Photons gegenstandslos. Wir werden später (§ 4) sehen, daß sich die Unmöglichkeit der Messung von Photonenkoordinaten im mathematischen Formalismus der Theorie folgendermaßen äußert: Es ist unmöglich, aus der Wellenfunktion eines Photons eine Größe zu bilden, die die Rolle der Wahrscheinlichkeitsdichte spielen könnte und alle notwendigen Forderungen der relativistischen Invarianz erfüllt.

Man könnte daher denken, daß eine künftige Theorie von der Betrachtung des zeitlichen Ablaufs von Wechselwirkungsprozessen zwischen Teilchen ganz abgeht. Die Theorie zeigt, daß es bei diesen Prozessen keine genau definierten Charakteristika gibt (auch nicht in den Grenzen der üblichen quantenmechanischen Genauigkeit), so daß die Beschreibung des zeitlichen Ablaufs eines Prozesses genauso illusorisch wird wie eine klassische Bahnkurve in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Die einzigen beobachtbaren Größen werden die Charakteristika (Impulse, Polarisationen) freier Teilchen sein — der Teilchen, die miteinander in Wechselwirkung treten, und der Teilchen, die infolge des Prozesses entstehen (L. D. LANDAU, R. PEIERLS, 1930).

Die charakteristische Problemstellung in der relativistischen Quantentheorie verlangt die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für Übergänge zwischen gegebenen Anfangs- und Endzuständen (d. h. für $t \rightarrow \mp \infty$) von Teilchensystemen.

¹⁾ Wir denken dabei an Messungen, bei denen man aus einem beliebigen Versuchsergebnis auf den Elektronenzustand schließen kann, d. h., wir sehen von Ortsmessungen durch Stöße ab, bei denen während der Beobachtungsdauer das Resultat nicht mit der Wahrscheinlichkeit 1 realisiert wird.

Die Gesamtheit dieser Amplituden zwischen allen möglichen Zuständen bildet die *Streumatrix* oder *S-Matrix*. Diese Matrix ist der Träger der gesamten, physikalisch sinnvollen und beobachtbaren Information über die Wechselwirkungsprozesse zwischen Teilchen (W. HEISENBERG, 1938).

Gegenwärtig gibt es noch keine vollständige, logisch abgeschlossene relativistische Quantentheorie. Wir werden sehen, daß die vorhandene Theorie neue physikalische Aspekte in die Art der Beschreibung von Teilchenzuständen hineinbringt; diese neue Beschreibung erhält gewisse Züge der Feldtheorie (s. § 10). Sie wird aber weitgehend nach dem Vorbild und mit Hilfe der Begriffe der üblichen Quantenmechanik aufgebaut. Dieser Aufbau der Theorie führte auf dem Gebiet der Quantenelektrodynamik zum Erfolg. Das Fehlen einer vollständigen logischen Abgeschlossenheit äußert sich in dieser Theorie im Auftreten divergenter Ausdrücke bei der direkten Anwendung des mathematischen Apparates; zur Beseitigung dieser Divergenzen existieren aber eindeutige Verfahren. Trotzdem haben diese Verfahren weitgehend den Charakter halbempirischer Rezepte, und unsere Überzeugung von der Richtigkeit der auf diesem Wege erhaltenen Ergebnisse beruht letzten Endes auf ihrer hervorragenden Übereinstimmung mit dem Experiment, aber nicht auf der inneren Konsistenz und der logischen Klarheit der Grundprinzipien der Theorie.

I

DAS PHOTON

§ 2. Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Unser Ziel ist, das elektromagnetische Feld als quantentheoretisches Objekt zu behandeln. Es ist dabei zweckmäßig, von derjenigen klassischen Beschreibung des Feldes auszugehen, bei der das Feld durch einen zwar unendlichen, aber diskreten Satz von Veränderlichen charakterisiert wird; diese Beschreibung erlaubt unmittelbar, den üblichen Apparat der Quantenmechanik anzuwenden. Dagegen ist die Darstellung des Feldes durch die in allen Raumpunkten vorgegebenen Potentiale ihrer Natur nach eine Beschreibung mit Hilfe einer stetigen Menge von Veränderlichen.

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sei das Vektorpotential eines freien elektromagnetischen Feldes, das die „Transversalitätsbedingung“

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (2,1)$$

erfüllt. Dabei ist das skalare Potential $\Phi = 0$, und die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ werden gegeben als

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2,2)$$

Die MAXWELLSchen Gleichungen reduzieren sich auf die Wellengleichung für $\mathbf{A}$:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2,3)$$

Bekanntlich (s. II, § 52) geht man in der klassischen Elektrodynamik zu einer Beschreibung mit Hilfe eines diskreten Satzes von Veränderlichen über, indem man das Feld in einem großen, aber endlichen Volumen V betrachtet.¹⁾ Wir erinnern daran, wie man dabei vorgeht, lassen aber die Einzelheiten der Rechnungen weg.

Ein Feld in einem endlichen Volumen kann nach fortschreitenden ebenen Wellen entwickelt werden, und das Potential wird durch eine Reihe der Gestalt

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}) \quad (2,4)$$

dargestellt, wobei die Koeffizienten $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ nach dem Gesetz

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \propto e^{-i\omega t}, \quad \omega = |\mathbf{k}| \quad (2,5)$$

von der Zeit abhängen. Infolge der Bedingung (2,1) stehen die komplexen Vektoren $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ senkrecht auf den zugehörigen Wellenzahlvektoren: $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = 0$.

Die Summation in (2,4) erfolgt über einen unendlichen diskreten Satz von Wellenzahlvektoren (seiner drei Komponenten k_x, k_y, k_z). Der Übergang zur Integration über

¹⁾ Um die Formeln nicht unnötig aufzublähen, werden wir $V = 1$ setzen.

eine stetige Verteilung kann mit Hilfe des Ausdrucks

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

für die Zahl der möglichen $\mathbf{k}$ -Werte pro Volumeneinheit des $\mathbf{k}$ -Raumes $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ vorgenommen werden.

Durch die Vorgabe der Vektoren $\mathbf{a}_k$ ist das Feld in dem betrachteten Volumen vollständig bestimmt. Man kann also diese Größen als diskreten Satz klassischer „Feldvariablen“ ansehen. Um zur Quantentheorie überzugehen, muß man diese Variablen zuerst noch so transformieren, daß die Feldgleichung eine Gestalt erhält, die den kanonischen Gleichungen (HAMILTONschen Gleichungen) der klassischen Mechanik analog ist. Die kanonischen Feldvariablen werden folgendermaßen definiert:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \\ \mathbf{P}_k &= \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}} (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k \end{aligned} \right\} \quad (2,6)$$

(sie sind offensichtlich reell). Das Vektorpotential lautet in diesen kanonischen Variablen

$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{Q}_k \cos \mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{1}{\omega} \mathbf{P}_k \sin \mathbf{k}\mathbf{r} \right). \quad (2,7)$$

Zur Bestimmung der HAMILTON-Funktion H ist die Gesamtenergie des Feldes

$$\frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d^3x$$

auszurechnen und durch die Größen $\mathbf{Q}_k$ und $\mathbf{P}_k$ auszudrücken. Wir verwenden für $\mathbf{A}$ die Entwicklung (2,7), rechnen nach (2,2) $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ aus, integrieren und erhalten

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{P}_k^2 + \omega^2 \mathbf{Q}_k^2).$$

Jeder Vektor $\mathbf{P}_k$ und $\mathbf{Q}_k$ steht senkrecht auf dem Wellenzahlvektor $\mathbf{k}$, d. h., jeder Vektor hat zwei unabhängige Komponenten. Die Richtung dieser Vektoren bestimmt die Polarisationsrichtung der betreffenden Welle. Wir bezeichnen die beiden Komponenten der Vektoren $\mathbf{Q}_k$ und $\mathbf{P}_k$ (in der Ebene senkrecht zu $\mathbf{k}$) mit $Q_{k\alpha}$ bzw. $P_{k\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) und schreiben die HAMILTON-Funktion in der Gestalt

$$H = \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (P_{k\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k\alpha}^2). \quad (2,8)$$

Die HAMILTON-Funktion zerfällt also in eine Summe voneinander unabhängiger Terme; jeder einzelne Summand enthält nur je ein Paar $Q_{k\alpha}$ und $P_{k\alpha}$. Jeder dieser Summanden entspricht einer fortschreitenden Welle mit einem bestimmten Wellenzahlvektor und einer bestimmten Polarisation und hat die Gestalt der HAMILTON-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Man bezeichnet daher die erhaltene Entwicklung als Entwicklung des Feldes nach *Oszillatoren*.

Wir kommen jetzt zur Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. Die dargestellte Art der klassischen Beschreibung des Feldes läßt den Weg für den Übergang zur Quantentheorie bereits erkennen. Wir müssen die kanonischen Variablen

— die verallgemeinerten Koordinaten $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ und die verallgemeinerten Impulse $P_{\mathbf{k}\alpha}$ — jetzt als Operatoren mit der Vertauschungsregel

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha} = -i \quad (2,9)$$

auffassen (alle Operatoren mit verschiedenen $\mathbf{k}\alpha$ sind miteinander vertauschbar). Mit diesen Größen werden auch das Potential $\hat{A}$ und (nach (2,2)) die Feldstärken $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{H}}$ zu Operatoren.

Um den HAMILTON-Operator für das Feld auszurechnen, ist das Integral

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi} \int (\hat{\mathbf{E}}^2 + \hat{\mathbf{H}}^2) d^3x \quad (2,10)$$

zu berechnen, in dem $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{H}}$ durch die Operatoren $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$ und $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ auszudrücken sind. Die Nichtvertauschbarkeit der letzteren wirkt sich dabei faktisch aber nicht aus, weil die Produkte $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$ mit dem Faktor $\cos \mathbf{k}\mathbf{r} \sin \mathbf{k}\mathbf{r}$ behaftet sind, der bei der Integration über das ganze Volumen verschwindet. Wir erhalten deshalb für den HAMILTON-Operator den Ausdruck

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2} (\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}^2), \quad (2,11)$$

der mit der entsprechenden klassischen HAMILTON-Funktion genau übereinstimmt, was auch zu erwarten war.

Die Bestimmung der Eigenwerte dieses HAMILTON-Operators erfordert keine besonderen Rechnungen, da sie auf das bekannte Problem der Energieniveaus linearer Oszillatoren zurückgeführt werden kann (s. III, § 23). Wir können daher sofort die Energieniveaus des Feldes aufschreiben:

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha} (N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}) \omega \quad (2,12)$$

mit ganzen Zahlen $N_{\mathbf{k}\alpha}$.

Wir werden diese Formel im folgenden Paragraphen diskutieren. Jetzt wollen wir die Matrixelemente für die Größen $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ aufschreiben; das kann unmittelbar mit Hilfe der bekannten Formeln für die Matrixelemente der Koordinaten eines Oszillators geschehen (s. III, § 23). Die von Null verschiedenen Matrixelemente sind

$$\langle N_{\mathbf{k}\alpha} | Q_{\mathbf{k}\alpha} | N_{\mathbf{k}\alpha} - 1 \rangle = \langle N_{\mathbf{k}\alpha} - 1 | Q_{\mathbf{k}\alpha} | N_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = \sqrt{\frac{N_{\mathbf{k}\alpha}}{2\omega}}. \quad (2,13)$$

Die Matrixelemente der Größen $P_{\mathbf{k}\alpha} = \dot{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ unterscheiden sich von den Matrixelementen für $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ nur um den Faktor $\pm i\omega$.

Für die weiteren Rechnungen ist es jedoch zweckmäßiger, anstelle der Größen $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ und $P_{\mathbf{k}\alpha}$ die Linearkombinationen $\omega Q_{\mathbf{k}\alpha} \pm iP_{\mathbf{k}\alpha}$ zu verwenden; diese haben nur für die Übergänge $N_{\mathbf{k}\alpha} \rightarrow N_{\mathbf{k}\alpha} \pm 1$ von Null verschiedene Matrixelemente. Dementsprechend führen wir die folgenden Operatoren ein:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} + i \hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}), \quad \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - i \hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}) \quad (2,14)$$

(die klassischen Größen $c_{k\alpha}^*$ und $c_{k\alpha}$ stimmen bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi/\omega}$ mit den Koeffizienten $a_{k\alpha}$ und $a_{k\alpha}^*$ in der Entwicklung (2,4) überein). Die Matricelemente dieser Operatoren sind

$$\langle N_{k\alpha} - 1 | c_{k\alpha} | N_{k\alpha} \rangle = \langle N_{k\alpha} | c_{k\alpha}^+ | N_{k\alpha} - 1 \rangle = \sqrt{N_{k\alpha}}. \quad (2,15)$$

Die Vertauschungsregel für $\hat{c}_{k\alpha}$ und $\hat{c}_{k\alpha}^+$ ergibt sich aus der Definition (2,4) und der Regel (2,9):

$$\hat{c}_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^+ - \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha} = 1. \quad (2,16)$$

Für das Vektorpotential ziehen wir die Entwicklung in der Gestalt (2,14) heran mit Operatoren als Koeffizienten. Wir schreiben sie in der Form

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha} \mathbf{A}_{k\alpha} + \hat{c}_{k\alpha}^+ \mathbf{A}_{k\alpha}^*) \quad (2,17)$$

mit

$$\mathbf{A}_{k\alpha} = \sqrt{4\pi} \frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2,18)$$

Wir haben die Bezeichnung $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ für die Einheitsvektoren in Richtung der Polarisierung der Oszillatoren eingeführt; die Vektoren $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ stehen senkrecht auf dem Wellenzahlvektor $\mathbf{k}$, zu jedem $\mathbf{k}$ gibt es zwei unabhängige Polarisierungen.

Analog schreiben wir für die Feldoperatoren $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{H}}$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha} \mathbf{E}_{k\alpha} + \hat{c}_{k\alpha}^+ \mathbf{E}_{k\alpha}^*), \\ \hat{\mathbf{H}} &= \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha} \mathbf{H}_{k\alpha} + \hat{c}_{k\alpha}^+ \mathbf{H}_{k\alpha}^*) \end{aligned} \right\} \quad (2,19)$$

mit

$$\mathbf{E}_{k\alpha} = i\omega \mathbf{A}_{k\alpha}, \quad \mathbf{H}_{k\alpha} = [n \mathbf{E}_{k\alpha}], \quad (n = k/\omega). \quad (2,20)$$

Die Vektoren $\mathbf{A}_{k\alpha}$ sind in folgendem Sinne orthogonal zueinander:

$$\int \mathbf{A}_{k\alpha} \mathbf{A}_{k'\alpha'}^* d^3x = \frac{2\pi}{\omega} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (2,21)$$

Wenn sich $\mathbf{A}_{k\alpha}$ und $\mathbf{A}_{k'\alpha'}^*$ in den Wellenzahlvektoren unterscheiden, dann enthält ihr Produkt den Faktor $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, der bei der Integration über das Volumen Null ergibt; wenn sie sich in den Polarisierungen unterscheiden, ist $\mathbf{e}^{(\alpha)} \mathbf{e}^{(\alpha')*} = 0$, weil die beiden unabhängigen Polarisationsrichtungen senkrecht aufeinander stehen. Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Vektoren $\mathbf{E}_{k\alpha}$ und $\mathbf{H}_{k\alpha}$. Ihre Normierung schreibt man zweckmäßig in der Form

$$\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}_{k\alpha} \mathbf{E}_{k'\alpha'}^* + \mathbf{H}_{k\alpha} \mathbf{H}_{k'\alpha'}^*) d^3x = \omega \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (2,22)$$

Wir setzen die Operatoren (2,19) in (2,10) ein, integrieren, beachten dabei (2,22) und bekommen für den HAMILTON-Operator des Feldes mit den Operatoren $\hat{c}_{k\alpha}$ und $\hat{c}_{k\alpha}^+$:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} (\hat{c}_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^+ + \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha}) \frac{1}{4\pi} \int (|\mathbf{E}_{k\alpha}|^2 + |\mathbf{H}_{k\alpha}|^2) d^3x \\ &= \sum_{k\alpha} \frac{1}{2} \omega (\hat{c}_{k\alpha} \hat{c}_{k\alpha}^+ + \hat{c}_{k\alpha}^+ \hat{c}_{k\alpha}). \end{aligned} \quad (2,23)$$

Dieser Operator ist in der betrachteten Darstellung (Matrixelemente der Operatoren $\hat{c}$ und $\hat{c}^+$ aus (2,15)) diagonal, und seine Eigenwerte stimmen natürlich mit (2,12) überein.

In der klassischen Theorie wird der Impuls des Feldes durch das Integral

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d^3x$$

gegeben. Beim Übergang zur Quantentheorie ersetzen wir $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ durch die Operatoren (2,19) und finden ohne große Mühe

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2) \mathbf{n} \quad (2,24)$$

in Übereinstimmung mit der bekannten klassischen Beziehung zwischen Energie und Impuls ebener Wellen. Die Eigenwerte dieses Operators sind

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{k} (N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}).$$

Die mit den Matrixelementen (2,15) realisierte Darstellung der Operatoren ist die „Besetzungszahldarstellung“, sie entspricht der Beschreibung eines Zustandes des Systems (des Feldes) durch die Angabe der Quantenzahlen $N_{\mathbf{k}\alpha}$ (*Besetzungszahlen*). In dieser Darstellung wirken die Feldoperatoren (2,19) (und damit auch der HAMILTON-Operator (2,11)) auf eine Wellenfunktion des Systems, die eine Funktion der Besetzungszahlen $N_{\mathbf{k}\alpha}$ ist; wir bezeichnen sie mit $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$. Die Feldoperatoren (2,19) hängen nicht explizit von der Zeit ab. Das entspricht dem in der nichtrelativistischen Quantenmechanik üblichen SCHRÖDINGER-Bild für die Operatoren. Der Zustand $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$ des Systems ist dabei zeitabhängig. Diese Zeitabhängigkeit wird durch die SCHRÖDINGER-Gleichung bestimmt:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{H} \Phi.$$

Eine solche Beschreibung des Feldes ist in ihrem Wesen relativistisch invariant, weil sie auf den invarianten MAXWELLSchen Gleichungen basiert. Diese Invarianz ist aber nicht explizit zu sehen — vor allem deshalb nicht, weil räumliche Koordinaten und Zeit in dieser Beschreibung äußerst unsymmetrisch enthalten sind.

In der relativistischen Theorie ist es zweckmäßig, einer Beschreibung auch äußerlich eine invariante Gestalt zu geben. Zu diesem Zweck muß man das sogenannte HEISENBERG-Bild verwenden, in dem die explizite Zeitabhängigkeit auf die Operatoren selbst übertragen wird (s. III, § 13). Zeit und Koordinaten gehen dann in die Ausdrücke für die Feldoperatoren gleichberechtigt ein, und ein Zustand des Systems Φ hängt allein von den Besetzungszahlen ab.

Der Übergang zum HEISENBERG-Bild erfolgt für den Operator $\hat{A}$ einfach, indem man in jedem Summanden in (2,17) die Faktoren $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ durch $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ ersetzt, d. h., man hat unter $A_{\mathbf{k}\alpha}$ die zeitabhängigen Funktionen

$$A_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{4\pi} \frac{e^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \quad (2,26)$$

zu verstehen. Man kann sich davon leicht überzeugen, indem man daran denkt, daß das Matrixelement eines HEISENBERG-Operators für den Übergang $i \rightarrow f$ den Faktor

$\exp \{-i(E_i - E_f) t\}$ enthalten muß, wenn E_i und E_f die Energien von Anfangs- bzw. Endzustand sind (s. III, § 13). Für einen Übergang unter Verkleinerung oder Vergrößerung von $N_{\mathbf{k}}$ um 1 ist dieser Faktor einfach $e^{-i\omega t}$ bzw. $e^{i\omega t}$.

Im folgenden (sowohl bei der Behandlung des elektromagnetischen Feldes als auch der Felder von Teilchen) werden wir für die Operatoren immer das HEISENBERG-Bild zugrunde legen.

§ 3. Photonen

Wir wollen jetzt die erhaltenen Formeln für die Feldquantisierung diskutieren.

Vor allem weist die Formel (2,12) für die Feldenergie folgende Schwierigkeit auf. Zum niedrigsten Energieniveau des Feldes gehören die Werte Null für die Quantenzahlen $N_{\mathbf{k}\alpha}$ aller Oszillatoren (dieser Zustand wird als *Vakuumzustand des elektromagnetischen Feldes* bezeichnet). Aber bereits in diesem Zustand hat jeder Oszillator die von Null verschiedene „Nullpunktsenergie“ $\omega/2$. Bei der Summation über die unendlich vielen Oszillatoren erhalten wir ein unendliches Ergebnis. Wir stoßen auf diese Weise auf eine der „Divergenzen“, die die vorhandene Theorie enthält, weil sie nicht vollständig und nicht logisch abgeschlossen ist.

Solange es sich um die Eigenwerte der Feldenergie handelt, können wir diese Schwierigkeit beseitigen, indem wir einfach die Energie der Nullpunktschwingungen subtrahieren, d. h., indem wir für Feldenergie und -impuls schreiben¹⁾

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha} N_{\mathbf{k}\alpha} \omega, \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} N_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{k}. \quad (3,1)$$

Anhand dieser Formeln kann man den für die ganze Quantenelektrodynamik grundlegenden Begriff der *Lichtquanten* oder *Photonen* einführen.²⁾ Wir können nämlich das freie elektromagnetische Feld als eine Gesamtheit von Teilchen ansehen, von denen jedes die Energie ω ($= \hbar\omega$) und den Impuls $\mathbf{k}$ ($= \hbar\mathbf{k}$) hat. Die Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Photons ist so, wie sie in der relativistischen Mechanik für Teilchen mit der Ruhmasse Null, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, sein muß. Die Besetzungszahlen erhalten den Sinn von Photonenzahlen zu gegebenen Impulsen $\mathbf{k}$ und Polarisationen $e^{(\alpha)}$. Die Eigenschaft der Polarisierung eines Photons ist dem Begriff des Spins anderer Teilchen analog (spezifische Besonderheiten des Photons in dieser Hinsicht werden später in § 6 behandelt).

Der ganze im vorigen Paragraphen entwickelte mathematische Formalismus entspricht völlig der Vorstellung des elektromagnetischen Feldes als einer Gesamtheit von Photonen; es handelt sich dabei um den Apparat der sogenannten zweiten Quantisierung in Anwendung auf ein Photonensystem.³⁾ Bei dieser Methode (s. III, § 64) spielen die Besetzungszahlen der Zustände die Rolle der unabhängigen Veränder-

¹⁾ Diese Subtraktion kann man formal widerspruchsfrei durchführen, indem man unter den Operatorprodukten in (2,10) die „Normalprodukte“ versteht, d. h. Produkte, in denen die Operatoren $\hat{c}^+$ immer links von den Operatoren $\hat{c}$ stehen. Die Formel (2,23) erhält dann die Gestalt $\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \omega \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$.

²⁾ Die Vorstellung von Photonen ist erstmalig von EINSTEIN eingeführt worden (A. EINSTEIN, 1905).

³⁾ Die Methode der zweiten Quantisierung in Anwendung auf die Strahlungstheorie ist zuerst von DIRAC entwickelt worden (P. A. M. DIRAC, 1927).

lichen, und die Operatoren wirken auf Funktionen dieser Besetzungszahlen. Dabei spielen die „Vernichtungs“- und „Erzeugungs“-Operatoren eine wesentliche Rolle; diese Operatoren verkleinern bzw. vergrößern die Besetzungszahlen um 1. Solche Operatoren sind gerade $\hat{c}_{k\alpha}$ und $\hat{c}_{k\alpha}^+$; der Operator $\hat{c}_{k\alpha}$ vernichtet ein Photon im Zustand $k\alpha$, $\hat{c}_{k\alpha}^+$ erzeugt ein Photon in diesem Zustand.

Die Vertauschungsregel (2,16) entspricht Teilchen, die der BOSE-Statistik gehorchen. Die Photonen sind also Bosonen, wie es auch von vornherein zu erwarten ist: Die zulässige Photonenzahl in einem beliebigen Zustand muß beliebig sein (wir werden noch in § 5 auf die Bedeutung dieses Sachverhaltes zurückkommen).

Die ebenen Wellen $A_{k\alpha}$ (2,26), die im Operator $\hat{A}$ (2,17) als Faktoren der Vernichtungsoperatoren für die Photonen auftreten, kann man als Wellenfunktionen der Photonen mit bestimmten Impulsen k und Polarisationen $e^{(\alpha)}$ ansehen. Dieser Standpunkt entspricht der Entwicklung des ψ -Operators in eine Reihe nach den Wellenfunktionen der stationären Zustände eines Teilchens in der nichtrelativistischen Methode der zweiten Quantisierung (anders als dort sind aber in der Entwicklung (2,17) sowohl Vernichtungs- als auch Erzeugungsoperatoren von Teilchen enthalten; wir werden die Bedeutung dieses Unterschiedes später klären, s. § 12).

Die Wellenfunktion (2,26) ist nach der Vorschrift

$$\int \frac{1}{4\pi} (|E_{k\alpha}|^2 + |H_{k\alpha}|^2) d^3x = \omega \quad (3,2)$$

normiert. Das ist die Normierung „auf ein Photon im Volumen $V = 1$ “. Tatsächlich ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung der quantenmechanische Mittelwert der Photonenenergie im Zustand mit der betreffenden Wellenfunktion (diese Interpretation ist an der Darstellung des HAMILTON-Operators in der ersten Zeile von (2,23) sofort abzulesen).¹⁾

Die MAXWELLSchen Gleichungen übernehmen die Rolle der „SCHRÖDINGER-Gleichung“ für ein Photon. In unserem Fall bedeutet das (für ein Potential $A(r, t)$, das die Bedingung (2,1) erfüllt) die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = 0.$$

Die „Wellenfunktion“ eines Photons ist im allgemeinen Fall beliebiger stationärer Zustände eine komplexe Lösung dieser Gleichung, die über den Faktor $e^{-i\omega t}$ von der Zeit abhängt.

Wir wollen noch einmal betonen, daß man die Wellenfunktion eines Photons keinesfalls als Wahrscheinlichkeitsamplitude einer räumlichen Lokalisierung des Photons auffassen darf — im Gegensatz zur Interpretation der Wellenfunktion in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Das hängt damit zusammen, daß (wie in § 1 erläutert wurde) der Begriff der Koordinaten eines Photons überhaupt keinen physikalischen Sinn hat. Mit dem mathematischen Aspekt dieses Sachverhaltes werden wir uns noch am Ende des folgenden Paragraphen beschäftigen.

¹⁾ Wir machen darauf aufmerksam, daß der Koeffizient $1/4\pi$ im Integral (3,2) doppelt so groß ist wie der übliche Koeffizient $1/8\pi$ in (2,10). Dieser Unterschied hängt letzten Endes damit zusammen, daß die Vektoren $E_{k\alpha}$ und $H_{k\alpha}$ komplex sind, während die Feldoperatoren $\hat{E}$ und $\hat{H}$ hermitesch sind.

Die Komponenten der räumlichen FOURIER-Entwicklung der Funktion $A(\mathbf{r}, t)$ bilden die Wellenfunktion eines Photons in der Impulsdarstellung, wir bezeichnen sie mit $A(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}$. Für einen Zustand mit einem bestimmten Impuls $\mathbf{k}$ und bestimmter Polarisation $e^{(\alpha)}$ ist die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung einfach der Faktor der Exponentialfunktion in (2,26):

$$A_{k\alpha}(\mathbf{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi} \frac{e^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{\alpha'\alpha}. \quad (3,3)$$

Im Zusammenhang mit der Meßbarkeit des Impulses eines freien Teilchens hat die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung einen tieferen physikalischen Sinn als die Funktion in der Ortsdarstellung: Sie erlaubt, die Wahrscheinlichkeiten $w_{k\alpha}$ für die verschiedenen Werte von Impuls und Polarisation eines Photons in einem gegebenen Zustand zu berechnen. Nach den allgemeinen Regeln der Quantenmechanik wird $w_{k\alpha}$ durch das Betragsquadrat der Entwicklungskoeffizienten der Funktion $A(\mathbf{k}')$ nach den Wellenfunktionen der Zustände mit bestimmten $\mathbf{k}$ und $e^{(\alpha)}$ gegeben:

$$w_{k\alpha} \sim \left| \sum_{\mathbf{k}'\alpha'} A_{k\alpha}^*(\mathbf{k}', \alpha') A(\mathbf{k}') \right|^2$$

(der Proportionalitätsfaktor hängt von der Art der Normierung der Funktionen ab). Wir setzen hier (3,3) ein und erhalten

$$w_{k\alpha} \propto |e^{(\alpha)} A(\mathbf{k})|^2. \quad (3,4)$$

Nach der Summation über die beiden Polarisationen finden wir als Wahrscheinlichkeit, daß das Photon den Impuls $\mathbf{k}$ hat:

$$w_{\mathbf{k}} \propto |A(\mathbf{k})|^2. \quad (3,5)$$

§ 4. Eichinvarianz

Bekanntlich ist die Wahl der Potentiale für ein Feld in der klassischen Elektrodynamik nicht eindeutig: Die Komponenten des 4-Potentials A_μ können einer beliebigen *Eichtransformation* der Gestalt

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (4,1)$$

unterworfen werden, wobei χ eine beliebige Funktion von Ort und Zeit ist (s. II, § 18).

Beschränkt man sich für eine ebene Welle auf Transformationen, die die Gestalt des Potentials nicht verändern (seine Proportionalität zum Faktor $\exp(-ik_\mu x^\mu)$), dann tritt die fehlende Eindeutigkeit folgendermaßen in Erscheinung: Man kann zur Amplitude der Welle einen beliebigen 4-Vektor parallel zum 4-Vektor k^μ addieren.

Die Nichteindeutigkeit des Potentials bleibt natürlich auch in der Quantentheorie erhalten, — sie bezieht sich auf die Feldoperatoren oder auf die Wellenfunktionen der Photonen. Um die Wahl der Potentiale nicht vorwegzunehmen, muß man statt (2,17) eine analoge Entwicklung für den Operator des 4-Potentials aufschreiben:

$$\hat{A}^\mu = \sum_{k\alpha} (\hat{c}_{k\alpha} A_{k\alpha}^\mu + \hat{c}_{k\alpha}^+ A_{k\alpha}^{\mu*}), \quad (4,2)$$

wobei die Wellenfunktionen $A_{k\alpha}^\mu$ 4-Vektoren der Gestalt

$$A_k^\mu = \sqrt{4\pi} \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{-ik_\nu x^\nu}, \quad e_\mu e^{\mu*} = -1,$$

sind, oder in kürzerer Schreibweise unter Weglassen der vierdimensionalen Vektorindizes:

$$A_k = \sqrt{4\pi} \frac{e}{\sqrt{2\omega}} e^{-ikx}, \quad ee^* = -1. \quad (4,3)$$

Hier ist der 4-Impuls $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, so daß $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ ist; e ist der 4-Einheitsvektor der Polarisation.¹⁾

Beschränkt man sich auf Eichtransformationen, die die Abhängigkeit der Funktion (4,3) von Ort und Zeit nicht verändern, dann reduzieren sich die Eichtransformationen auf die Substitution

$$e_\mu \rightarrow e_\mu + \chi k_\mu \quad (4,4)$$

mit einer beliebigen Funktion $\chi = \chi(k^\mu)$. Die transversale Polarisation bedeutet, daß immer eine solche Eichung möglich ist, bei der der 4-Vektor e die Gestalt

$$e^\mu = (0, \mathbf{e}), \quad \mathbf{e}\mathbf{k} = 0 \quad (4,5)$$

hat (diese Eichung werden wir als *dreidimensional transversal* bezeichnen). In invarianter vierdimensionaler Form wird aus dieser Forderung die Bedingung der *vierdimensionalen Transversalität*

$$ek = 0. \quad (4,6)$$

Wir machen darauf aufmerksam, daß diese Bedingung (wie auch die Normierungsvorschrift $ee^* = -1$) durch eine Transformation (4,4) nicht verletzt wird, weil $k^2 = 0$ ist. Andererseits bedeutet das Verschwinden des 4-Impulses eines Teilchens, daß dessen Masse Null ist. Hierin äußert sich der Zusammenhang zwischen Eichinvarianz und der Masse Null des Photons (andere Aspekte dieses Zusammenhanges werden in § 14 behandelt werden).

Bei einer Eichtransformation der Wellenfunktionen der Photonen, die an einem Prozeß beteiligt sind, dürfen sich keine meßbaren physikalischen Größen ändern. Diese Forderung nach *Eichinvarianz* spielt in der Quantenelektrodynamik eine noch größere Rolle als in der klassischen Theorie. Wir werden an vielen Beispielen sehen, daß sie hier neben der Forderung nach relativistischer Invarianz ein aussagekräftiges heuristisches Prinzip ist.

Die Eichinvarianz der Theorie ist wiederum mit dem Erhaltungssatz für die elektrische Ladung eng verknüpft; wir werden uns mit diesem Aspekt in § 43 beschäftigen.

Wir haben schon im vorangegangenen Paragraphen erwähnt, daß die ortsabhängige Wellenfunktion eines Photons nicht als Wahrscheinlichkeitsamplitude für eine räumliche Lokalisierung gedeutet werden kann. In mathematischer Hinsicht äußert sich dieser Sachverhalt so, daß es unmöglich ist, mit Hilfe der Wellenfunktion eine Größe zu bilden, die wenigstens in ihren formalen Eigenschaften die Rolle einer Wahrscheinlichkeitsdichte spielen könnte. Eine solche Größe müßte eine positiv definite Bilinearform aus der Wellenfunktion A_μ und der konjugiert komplexen Funktion sein. Außer-

¹⁾ Der Ausdruck (4,3) hat keine vollständig relativistisch kovariante (4-Vektor-)Gestalt; das hängt mit der nicht invarianten Natur der angenommenen Normierung auf das endliche Volumen $V = 1$ zusammen. Dieser Sachverhalt hat jedoch keine prinzipielle Bedeutung und wird von den Vorteilen ausgeglichen, die diese Normierung mit sich bringt. Wir werden später sehen, daß auf Grund dieser Normierung reale physikalische Größen einfach und automatisch in der erforderlichen invarianten Form erhalten werden können.

dem müßte sie gewisse Forderungen der relativistischen Kovarianz genügen, — sie müßte die Zeitkomponente eines 4-Vektors sein (es geht darum, daß die Kontinuitätsgleichung für die Erhaltung der Teilchenzahl in vierdimensionaler Form als Verschwinden der Divergenz eines 4-Stromvektors geschrieben wird; die Zeitkomponente dieses Stromvektors ist dann die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Lokalisierung des Teilchens, s. II, § 29). Auf Grund der Forderung nach Eichinvarianz kann der 4-Vektor A_μ andererseits in einem Strom nur als antisymmetrischer Tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$ enthalten sein. Der 4-Stromvektor muß also bilinear aus $F_{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}^*$ aufgebaut werden (und aus den Komponenten des 4-Vektors k_μ). Einen solchen 4-Vektor kann man aber überhaupt nicht bilden: Jeder Ausdruck, der die gestellten Bedingungen erfüllt (zum Beispiel $k^\lambda F_{\mu\nu}^* F_\lambda^\nu$), verschwindet infolge der Transversalitätsbedingung ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$), abgesehen davon, daß er nicht positiv definit ist (weil er ungerade Potenzen der Komponenten k_μ enthält).

§ 5. Das elektromagnetische Feld in der Quantentheorie

Die Beschreibung des Feldes als Gesamtheit von Photonen ist die einzige Beschreibung, die dem physikalischen Sinn des elektromagnetischen Feldes in der Quantentheorie völlig adäquat ist. Sie ersetzt die klassische Beschreibung mit Hilfe der Feldstärken. Letztere gehen in den mathematischen Apparat des Photonenbildes als Operatoren der zweiten Quantisierung ein.

Bekanntlich ähneln die Eigenschaften eines quantenmechanischen Systems den klassischen Eigenschaften in den Fällen, in denen die Quantenzahlen für die stationären Zustände eines Systems groß sind. Für ein freies elektromagnetisches Feld (in einem vorgegebenen Volumen) bedeutet das, daß die Quantenzahlen der Oszillatoren, d. h. die Photonenzahlen $N_{\mathbf{k}\alpha}$, groß sein müssen. In dieser Hinsicht ist es von großer Bedeutung, daß die Photonen der BOSE-Statistik gehorchen. Im mathematischen Formalismus der Theorie zeigt sich der Zusammenhang der BOSE-Statistik mit den Eigenschaften des klassischen Feldes in den Vertauschungsregeln für die Operatoren $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ und $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+$. Für große $N_{\mathbf{k}\alpha}$, wenn die Matricelemente dieser Operatoren groß sind, kann man die 1 auf der rechten Seite der Vertauschungsregel (2,16) vernachlässigen und es ergibt sich

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \approx \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha},$$

d. h., diese Operatoren gehen in miteinander vertauschbare klassische Größen $c_{\mathbf{k}\alpha}$ und $c_{\mathbf{k}\alpha}^*$ über, die die klassischen Feldstärken bestimmen.

Die Bedingung für das quasiklassische Verhalten des Feldes erfordert jedoch noch eine Verschärfung; denn wenn alle Zahlen $N_{\mathbf{k}\alpha}$ groß sind, dann ist die Feldenergie bei der Summation über alle Zustände $\mathbf{k}\alpha$ auf jeden Fall unendlich, so daß die Bedingung gegenstandslos wird.

In einer physikalisch sinnvollen Fragestellung nach den Bedingungen für quasiklassisches Verhalten wird man die über ein gewisses kleines Zeitintervall Δt gemittelten Werte des Feldes betrachten. Wir denken uns das klassische elektrische Feld $\mathbf{E}$ (oder das Magnetfeld $\mathbf{H}$) als FOURIER-Integral bezüglich der Zeit dargestellt. Bei der Mittelung über das Zeitintervall Δt liefern nur diejenigen FOURIER-Komponenten einen merklichen Beitrag zum Mittelwert $\bar{\mathbf{E}}$, deren Frequenzen die Bedingung $\omega \Delta t \gtrsim 1$