1 Vom Wesen der Mathematik

> *„Mathematik ist eine von Menschen gedanklich konstruierte Wirklichkeit, die … keinen willkürlichen Charakter hat, sondern von Notwendigkeiten geprägt ist und Entdeckungen zulässt. Es gibt eine Übereinstimmung zwischen unserem mathematischen Denken und unseren Erfahrungen mit der Außenwelt (Natur)."* (Wittenberg 1963, 16)
>
> *„Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben."* (G. Galilei)
>
> *„Mathematik kann man nur mit dem Auge des Geistes ‚sehen'."* (Devlin 2002, 7)
>
> *„Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker."* (Wittgenstein 1984, 99)
>
> *„Sie (die Mathematik) ist die abstrakteste Wissenschaft von allen. Sie spricht beispielsweise von Räumen, nennt deren Elemente ‚Punkte' und kann davon abstrahieren, ob es sich dabei um Zahlen, Kurven, Flächen, Funktionen oder sonstwas handelt. Verrückt nur, dass einige ihrer reinsten Gedankenkonstruktionen den weltzugewandten Verstand überhaupt erst möglich machen – von der Raumfahrt über Klimaforschung und Kommunikationstechnik bis zur Medizin und Demografie."* (Die Zeit 2008, online)

Mathematik

All diese Zitate dienen als Einleitung, als Anregung darüber nachzudenken, was Mathematik eigentlich ist. Was charakterisiert das Wesen von Mathematik? Ist Mathematik eine Natur- oder Geisteswissenschaft? Gäbe es die Mathematik, wenn es die Menschen nicht gäbe?

Dieses Kapitel soll zunächst über einen Rückgriff auf die Geschichte der Mathematik verdeutlichen, dass die Entstehung und die Entwicklung von Mathematik eng an die kulturellen und wirtschaftlichen Gegebenheiten einer Gesellschaft gebunden waren und sind. Selbst eine Geschichte der Mathematik lässt sich nicht ohne Bezug zur Geschichte der Menschheit schreiben.

Mathematik ist ein mehr als eintausend Jahre altes Kulturgut. Schon aus den ältesten Kulturen sind zusammen mit den Schriftzeichen auch Dokumente mathematischer Berechnungen überliefert.

Die *Mathematik* (griech.: mathema) ist die „ursprünglich aus den Aufgaben des Rechnens und Messens erwachsene Wissenschaft, der praktische Fragestellungen zu Grunde liegen und zu deren Behandlung Zahlen und geometrische Figuren herangezogen wurden" (dtv-Lexikon; Bd. 11 1997, 312). Zwar gibt es in den Entstehungs- und Entwicklungsgeschichten aller Kulturen enge Zusammenhänge zwischen der Etablierung schriftsprachlicher und mathematischer Symbole, dennoch „ist das Vorliegen einer Schrift noch keine hinreichende Voraussetzung für die Existenz eigener Zahlsymbole" (Stern 2005, 293). Mathematik und Schriftsprache sind kulturelle Erscheinungen. Sie spiegeln das Ergebnis kultureller Entwicklungen wider. Deren Entwicklungen verliefen zwar zeitlich parallel, aber in deutlich unterschiedlicher Qualität (Ifrah 1998). Während in der Schriftsprache interkulturelle Unterschiede sich immer deutlich abzeichnen (werden), ist Mathematik in ihrer heutigen Form eine globale Erscheinung.

Rechnen

Eng verbunden mit Mathematik ist in unserem heutigen Sprachgebrauch der Begriff des Rechnens. Mit Rechnen (Berechnungen) will der Mensch die Vorgänge in seiner Umwelt quantitativ und mit der Sprache (d. h. mit einem konventionellen Zeichensystem) qualitativ beschreiben.

Der Begriff „Rechnen“ (althochdeutsch für „Ordnen“) bezeichnet die „Verknüpfung von Zahlen durch Addition und Multiplikation und deren Umkehrung Subtraktion und Division, mit allen Folgerungen, unter Befolgung der Rechengesetze und -regeln“ (Grube 2006, 1). Die Größe einer Menge, z. B. einer Viehherde, kann durch Zählen bestimmt werden. Rechenprozesse sind demnach Ordnungsprozesse. Mathematik gilt als das Regelwerk des Rechnens. Insofern ist die Bezeichnung „Rechner“ für einen Computer nicht abwertend, sondern trifft den Kern der Funktionalität dieses Gerätes. Ein Computer löst auf der Basis binärarithmetischer Rechnungen Aufgaben in sehr hohen Größenordnungen (Grube 2006, 1).

In unserem heutigen Sprachgebrauch schreiben wir dem Begriff des Rechnens zwei Bedeutungen zu. Zum einen meint „rechnen“, dass wir Zahlen logisch, d. h. nach bestimmten Regeln und Bildungsvorschriften miteinander verbinden, Mathematik anwenden, z. B. Peter rechnet gerade Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000. Zum anderen meinen wir mit „rechnen“ etwas stark vermuten, dass etwas geschehen wird, etwas voraussehen, z. B. heute Nacht wird *mit* starken Regenschauern *gerechnet*. Da*mit* hatten wir nicht *gerechnet*. Wir *rechnen* fest *mit* Ihnen.

Geschichte der Mathematik

Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Ihre über Jahrhunderte kontinuierliche Entwicklung machte sie zu einer der am besten begründeten Wissenschaften. Sie nimmt heute eine zentrale Stellung im System der Wissenschaften ein und bildet die Basis für andere Wissenschaftsbereiche wie Physik, Biologie, Mikroelektronik, Natur- und Sozialwissenschaften.

Ihren Ursprung fand die Mathematik in der Beschäftigung der Menschen mit Mengen, mit Messen, mit Konstruieren – jeweils aus dem Bedürfnis bzw. der Notwendigkeit einer Auseinandersetzung mit Naturphänomenen wie Zeitpunkte, Mengen der Aussaat, Berechnung von Hochwasser u. ä. heraus. So forderte der Ackerbau der alten Kulturen an Euphrat und Tigris, am Nil die genaue Kenntnis der jeweiligen Hochwasserzeiten der Flüsse, um die Termine für die Aussaat bestimmen zu können. Kanäle zur Bewässerung und Dämme zum Schutz vor Hochwasser mussten vermessen und berechnet werden. Die Bauern mussten einen Termin für die Aussaat bzw. den Zeitpunkt der Überschwemmung bestimmen. Vorformen eines Kalenders wurden entwickelt und erste trigonometrische Rechnungen aufgestellt.

Einige ausgewählte Daten zur Geschichte der Mathematik sollen diese enge Wechselwirkung zwischen Mathematik und menschlicher kultureller Entwicklung verdeutlichen. Die nachfolgende chronologische Darstellung ausgewählter historischer Daten zur Mathematikgeschichte berücksichtigen neben der Entwicklung der Zahlzeichen und des Zahlsystems vor allem die Einflüsse der griechischen, babylonischen und ägyptischen Mathematik.

Lange bevor die Schrift entwickelt wurde, beschäftigte sich der Mensch vermutlich mit Zahlzeichen und geometrischen Strukturen. Geometrische Verzierungen finden sich auf 40 000 Jahre alten Keramikgefäßen. Bereits in der Altsteinzeit, also vor etwa 20 000 bis 30 000 Jahren, entwickelten sich erste Formen elementaren Rechnens.

Die ältesten Hinweise auf den Umgang mit Zahlen wurden auf den Zeitraum 30 000 Jahre v. Chr. datiert. Aus dieser Zeit finden sich (meist auf Knochen) Kerbzeichen, die den Gebrauch natürlicher Zahlen sowohl als Ordnungs- als auch als Kardinalzahlen darstellen. Sie gelten als die ältesten Mengen- bzw. Zahldarstellungen (Ifrah 1998, 545). Diese Knochen mit Kerbmarken waren teilweise in Fünfergruppen zusammenfasst und gelten als Vorformen von Bündelungen, d. h. einer effektiven Art, größere Mengen zu erfassen.

In Ägypten wurden rund 2900 Jahre alte Handschriften gefunden, die einfache Mathematikaufgaben, etwa zur Berechnung der Fläche von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken enthalten.

Umfangreicher als die Quellen zur ägyptischen Mathematik sind die schriftlichen Zeugnisse der Babylonier. Diese hielten ihre Erkenntnisse auf Tontafeln fest, die im Gegensatz zu Papier (wie bei den Ägyptern) eine deutlich längere Lebensdauer hatten. Die Menschen dieser Zeit mussten Dinge ihres Alltags wie ihr Vieh oder auch ihren Lohn zählen und notieren. Wie alle Stromlandkulturen beschäftigten sich auch die Babylonier überwiegend mit der Geometrie. Die babylonischen Formeln, z. B. für die Berechnung von Flächeninhalten, entstanden beim Vermessen von Ackerland.

Auf den Zeitraum 3000 Jahre v. Chr. werden die ersten Ziffernsymbole in Form von Hieroglyphen bei den Sumerern datiert. Für die Darstellung ihrer Zahlzeichen nutzen sie ihre Keilschrift (Ifrah 1998, 546).

Etwa um 2900 v. Chr. entwickelten die Ägypter ebenfalls zur Planung von Bauwerken, z. B. für den Bau der Pyramiden, viele Formeln.

Um 2500 v. Chr. wurden in Mesopotamien (heutiger Irak) Keilzahlzeichen aus der sumerischen Keilschrift an ein dezimales Zahlensystem angepasst. Um 1800 v. Chr. entwickelten die Babylonier das älteste derzeit bekannte Positionssystem auf der Basis von 60.

Um 600 v. Chr. begann die Blütezeit der Mathematik bei den Griechen. Sie begründeten und bewiesen nicht nur die von ihnen erstellte, sondern auch die der bereits aus Babylon und Ägypten kommenden Formeln. Eine der wichtigsten Quellen der griechischen Mathematik sind die von Euklid v. Alexandria (365–300 v. Chr.) verfassten 13 Bände mit dem Titel „Die Elemente“. Sie stellen eine systematische Erfassung aller bekannten Sätze über die räumliche und ebene Geometrie dar und unterscheiden erstmalig Grundsätze/Axiome und Definitionen sowie Sätze.

Großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik als eigenständige wissenschaftliche Disziplin hat die (griechische) Pythagoreische Schule (500 v. Chr.). Mathematik wurde hier primär als Geometrie im Sinne der Erd(ver)messung verstanden. Pythagoras von Samoas (570–510 v. Chr.) entwickelte den Flächensatz im rechtwinkligen Dreieck: $a^2 + b^2 = c^2$.

Um 250 v. Chr. verwendeten die Babylonier erstmals ein eigenes Schriftzeichen für die Null als Leerstelle bei den Zahlen.

200 v. Chr. beschäftigte sich Archimedes (287–212 v. Chr.), ein griechischer Mathematiker, vor allem mit praktischer Umsetzung mathematischer Probleme. Er entdeckte die Hebelgesetze und konstruierte auf deren Grundlage den Flaschenzug. Ebenfalls noch vor unserer Zeitrechnung wurden die Berechnungen von Kreis, Kugel, Zahl Pi sowie Volumen entwickelt.

Um 500, durch den Einfluss der indischen Mathematik, begann der Umgang mit negativen Zahlen. Inder nutzten die Null bereits ab dem 9. Jahrhundert und symbolisierten sie durch einen Punkt oder Kreis. Ausgelöst u. a. durch die Ausweitung von Handel und Verkehr und durch die vielen ungelösten kaufmännischen Probleme, z. B. Rest-, Teilzahlungen beim Handel, Umgang mit Schulden, Sollstände usw., erweiterte sich der Zahlbereich von den natürlichen zu den ganzen Zahlen. Negative Zahlen etablierten sich als feste Größe in alltäglichen und mathematischen Kontexten.

Um 976 treten die arabischen Ziffern in Europa erstmals auf; ihr endgültiger Durchbruch erfolgte erst rund sieben Jahrhunderte später.

Arabische Mathematiker übernahmen die Null aus dem Indischen. Es dauert fast 300 Jahre vom 12. bis zum 15. Jahrhundert, bis sich dieses Symbol allmählich im europäischen Raum durchsetzte. Die Null markiert den Anfang der Reihe der natürlichen Zahlen und wird als neutraler Begriff in Bezug auf Addition und Subtraktion verwendet.

Etwa um 1100 beschäftigte man sich in Mitteleuropa intensiv mit Mathematik. Bereits bekannte Gesetzmäßigkeiten und Formeln wurden rezipiert, neue entworfen. Ebenso wurden neue Rechenhilfen wie z. B. der Abakus entwickelt.

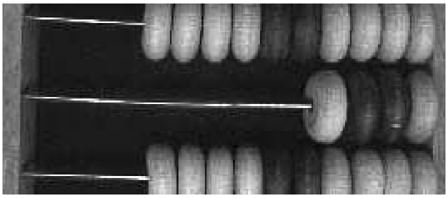


Abb. 1: Abakus

Um 1500 wurden in Mitteleuropa von den Stadtverwaltungen so genannte Rechenmeister als Lehrer und Rechner eingesetzt. Der wohl bekannteste Rechenmeister Adam Ries (1492–1550) verfasste Rechenbücher – und diese in Deutsch und nicht wie üblich in Latein. In dieser Zeit wurden die Rechenverfahren entwickelt, wie Grundrechenoperationen mit natürlichen und ganzen Zahlen sowie die Symbole Plus, Minus, Wurzel und Klammer eingeführt.

Im 16./17. Jahrhundert gewann die Mathematik durch den Aufschwung in Handel, Wirtschaft und Gewerbe erneut an Bedeutung. Geografische Entdeckungen und die Verbreitung der Buchdruckerkunst trugen vor allem zur Verbreitung schriftlicher Rechenverfahren bei. Händler und Gewerbetreibende mussten rechnen können. Häufig lösten sie ihre Aufgaben mit Hilfe von Rechenbrettern.

1610 wurden die ersten Logarithmentafeln entwickelt.

Blaise Pascal (1623–1662) entwickelte die erste mechanische Rechenmaschine. Er schuf zusammen mit dem französischen Juristen und Hobbymathematiker Pierre de Fermat (1601/1608–1665) die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1631 wurden erstmals die Zeichen „>" und „<" zur Darstellung von Ungleichungen genutzt.

1637 legte Réné Descartes (1596–1650) die Grundlagen für die Einführung der heutigen Potenzschreibweise und entwickelte Rechenstäbe mit logarithmisch eingeteilten Skalen.

Um 1870 begründete der deutscher Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) die Mengenlehre. Sie beruht auf der Erkenntnis, dass ein Teil genau so groß sein kann wie das Ganze.

1880 wurde die erste Lochkartenmaschine entwickelt, die die Grundlage für umfassende Datenerfassung und Voraussetzung für elektronische Datenverarbeitung, für die Existenz eines Computers, darstellt.

1889 begründete der italienische Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) den Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen (Peanosche Axiome). Mit diesen Axiomen legte er die Logik der natürlichen Zahlen fest.

1941 konstruierte der deutsche Bauingenieur Konrad Zuse (1910–1995) den ersten Rechenautomat auf Relaisbasis. 1946 wird in den USA die erste elektronisch arbeitende Rechenmaschine gebaut.

Dieser kurze Abriss macht deutlich, dass Mathematik kein starres, feststehendes, sondern ein lebendiges, sich ständig weiterentwickelndes Theoriegebäude ist. Diese Historie bildet damit eine Begründung dafür, Mathematik als Geistes- und nicht als Naturwissenschaft zu verstehen.

Mathematik: Eine Natur- oder Geisteswissenschaft?

In den Naturwissenschaften werden die Gesetze aus der Natur abgeleitet; in der Mathematik stellen die entwickelten Gesetze die eigentliche Wirklichkeit dar. In der Mathematik wird eine Wirklichkeit erfunden, konstruiert, die sich nicht unmittelbar aus der Natur ableiten lässt.

Mathematische Theorien stellen sich als Wechselspiel zwischen Erfinden und Entdecken dar (Brunner 2007, 32). Mathematische Definitionen sind Erfindungen des menschlichen Geistes, die daraus abgeleiteten Sätze sind Entdeckungen (ebd.). Mathematik kann ohne den Menschen nicht existieren, es gibt sie nur in den Köpfen der Menschen.

Hier zeichnet sich schon eine erste gravierende Unterscheidung zwischen Naturwissenschaften und der Mathematik ab. Entscheidend für die Gültigkeit einer mathematischen Aussage ist, im Gegensatz zu naturwissenschaftlichen Nachweisen, die richtige Herleitung. Aber anders als in den Naturwissenschaften unterliegen mathematische Aussagen keinen Paradigmen, d. h. keinen definierten Vorannahmen einzelner Fachvertreter.

Der wesentliche Unterschied mathematischer Aussagen zu denen anderer Disziplinen liegt also darin, dass sie von der momentanen Wirklichkeit, was immer das auch sein mag, unabhängig gültig sind. Bei den Naturwissenschaften bestimmt die Wirklichkeit das Gesetz, in der Mathematik bildet das Gesetz die Wirklichkeit.

Der Kern der Mathematik sind nicht die in der Umwelt beobachtbaren Objekte, Phänomene und Ereignisse. Mathematik als Wissenschaft schreibt diesen Objekten bestimmte Eigenschaften zu, die nicht direkt von diesen abzuleiten sind. Diese von den Gegenständen unabhängigen Eigenschaften wie z. B. die Anzahl, die Relationen zu anderen Objekten und Erscheinungen können wiederum auf andere Objekte angewendet werden. Für diese beobachtbaren Kategorien entwickelten die Menschen ein strenges, konventionelles Zeichen- und Begriffssystem. Mathematik beschäftigt sich also nicht mit real existierenden Gegenständen, sondern mit den Zeichen und Begriffen, die sie diesen Gegenständen zuschreiben, die aber nicht Eigenschaften der Gegenstände selbst sind. Diese Zuschreibung erfolgt auf einer hoch abstrakten und von den Gegenständen unabhängigen Art. Damit sind diese Zuschreibungen wiederum unabhängig von den Objekten und können auf beliebig andere angewendet werden. So ist es den ersten Kerbzeichen auf Knochen nicht anzusehen, was gezählt wurde, sondern nur, dass etwas gezählt wurde. Ob dabei erlegte Tiere, gesammelte Pflanzen oder die Mitglieder der Menschengruppe erfasst wurden, lässt sich aus dieser Codierung nicht ablesen. Im Gegenteil, diese Art der Darstellung ist so unabhängig von den gezählten Gegenständen, dass sie sich auf beliebig viele weitere übertragen lässt. Ebenso bezieht sich das Zahlwort „fünf“ bzw. das Ziffernsymbol „5“ nicht auf die Finger einer Hand, sondern auf beliebig verschiedene, qualitativ völlig unterschiedliche Mengen. „Fünf“ kann eben auch bedeuten, dass ein Buch, ein Auto, zwei Stühle und eine Tasse gedanklich zusammengefasst wurden.

Damit wird ein weiterer Unterschied zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften deutlich. Der Gegenstand der Mathematik sind nicht naturwissenschaftlich erfassbare Phänomene, sondern abstrakte Zeichen, Begriffe und deren Beziehungen untereinander.

Die einfache Gleichung $5 + 3 = 8$ beschreibt auf einer hochformalisierten und abstrakten Ebene, dass folgende Gesetzmäßigkeit gilt: Immer wenn eine Menge von drei Elementen mit einer Menge von fünf Elementen nach der Bildungsregel „Addition“ zusammengefügt wird, ergibt sich eine Menge, die genau so groß ist wie eine Menge mit acht Elementen. Nichts davon jedoch findet sich in der Natur wieder; selbst die Zahlen, ihre Reihenfolge und symbolische Darstellung einschließlich unserer Rechenregeln entspringen allein unserem Denken.

Ausgehend davon, dass es vermutlich niemals eine widerspruchsfreie Mathematik geben und sie notwendig unvollständig bleiben wird, rückt der Zusammenhang zwischen Menschen und Mathematik, von Mensch und Natur in den Vordergrund. In den letzten Jahrhunderten wurde die Unterscheidung zwischen Menschen und

Natur scheinbar immer grundsätzlicher und unversöhnlicher. So ist der Mensch in der Lage, Widersprüche auszuhalten, Fragen zu formulieren und sich dadurch ständig weiterzuentwickeln, während in der Mathematik das Vorhersagbare, das Beständige z. B. in Form von Axiomen gesucht wird (Zimpel 2008). Zimpel analysiert diesen Gegensatz nicht als Widerspruch, sondern als nützlich und produktiv. Beide Bereiche, die Menschen und die (Ingenieurs-)Mathematik lassen sich nur in ihren Wechselwirkungen, in ihren Verwendungen erkennen und beschreiben: „Die Zahlen, das universelle Werkzeug der Naturwissenschaft, haben die Tendenz zur Verselbstständigung und zur Entfremdung. Dadurch wird leicht übersehen, dass Zahlen nicht nur die Welt spiegeln, sondern auch den Menschen, der sie schreibt, mit ihnen zählt und rechnet“ (Zimpel 2008, 19).

Gerade dieser hohe Abstraktionsgrad, die Unabhängigkeit von den konkreten Gegenständen, Handlungen und Phänomenen macht diese Wissenschaft so universell. Die Objekte der Mathematik resultieren allein aus unserer kognitiven Tätigkeit, nicht aus einem „Absehen“ aus der Natur. Daher ist Mathematik auch diejenige Wissenschaft, die ohne die Hilfsmittel anderer Wissenschaften auskommt.

Dass Mathematik eine Geisteswissenschaft ist, lässt sich auch wahrnehmungspsychologisch begründen. Zahlen, Relationen, Punkte und Funktionen kann man weder hören, schmecken, riechen noch sehen. Zwar kann man Symbole dafür schreiben und diese dann auch sehen, die damit erfassten Phänomene jedoch nicht. Allein durch unseren Geist können wir uns der Mathematik nähern. Mathematik kann nicht mit den menschlichen Sinnen wahrgenommen werden. Vielleicht erklärt dies auch das Phänomen, dass viele Mathematiker sich gleichzeitig mit philosophischen Fragestellungen beschäftigten: Pythagoras, Platon, Kant, Frege, Wittgenstein.

Den engen Zusammenhang zwischen der kulturhistorischen Entwicklung der Menschheit und der Mathematik machen zwei Ansätze zur Erklärung von Mathematik deutlich, die hier kurz skizziert werden sollen. Beide Ansätze beeinflussen stark die gegenwärtige didaktische Diskussion. Das Konzept „Mathematik als Muster“ findet viele Parallelen in dem Konzept „mathe 2000“, einem Grundschulkonzept von Müller & Wittmann, das seit den 1980er Jahren in den Grundschulen eingesetzt wird.

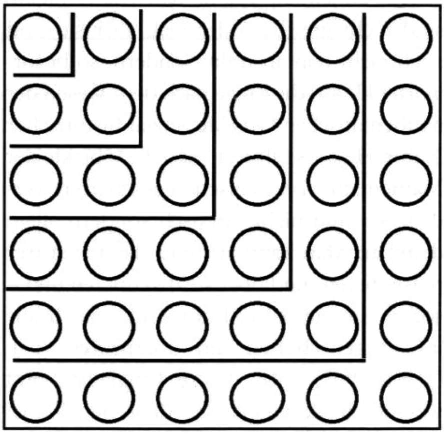
Der Ansatz von Krämer als kulturhistorische und sprachphilosophische Annäherung an Mathematik macht deutlich, wie eng vor dem Hintergrund des abstrakten Zeichen- und Begriffssystems Mathematik der Zusammenhang zwischen Mathematik und Sprache ist.

Mathematik als Muster (Devlin)

„Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern“ – diese Auffassung begründet Devlin (2002) als Mathematiker (Professor für Mathematik an der Stanford-Universität) und Wirtschaftsjournalist mit vielfach vorfindbaren naturwissenschaftlichen Phänomenen wie Blütenmuster, Muster auf Tierfellen usw. Sie lassen sich mathematisch-biologisch beschreiben und nachvollziehen, z. B. lassen sich viele Blüten durch mehrfaches Wiederholen einfacher Reproduktionsregeln künstlich erzeugen oder eine Zellteilung wird mit Hilfe arithmetischer Regeln beschreiben (Devlin 2002).

Abb. 2: Muster mit Blüten

„Der Mathematiker untersucht abstrakte ‚Muster' – Zahlenmuster, Formelmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse ‚entspringende'" (Devlin 2002, 5). So beschreibt Devlin den Kern der Mathematik. Erfasst werden dabei Themenbereiche wie Muster bei den Zahlen und beim Zählen, Muster im Umgang beim logischen Schließen und bei der Kommunikation, bei Bewegung und Veränderung, bei Formengebilden, bei Symmetrien und Lagebeziehungen usw.



$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$

Abb. 3: Quadratzahlen als Punktmuster (Steinweg 2003, 57)

Wie die Mathematiker herausgefunden haben, gibt es genau 17 Möglichkeiten, ein bestimmtes Muster zu wiederholen, und selbst die scheinbar komplizierteren werden schon seit Jahrhunderten verwendet. Vor allem aber befassen die Mathematiker sich mit hoch abstrakten Ordnungsstrukturen hinter den sichtbaren Dingen: Komplizierte mathematische Überlegungen bieten sogar eine Erklärung, wie die Leoparden zu ihren anscheinend regellosen Flecken und die Tiger zu ihren Streifen kommen.

Devlin beschreibt vier Abstraktionsebenen des Geistes:

1. Objekte des Nachdenkens sind real und sinnlich erfassbar (gedanklich aber ist ein anderer Ort, eine andere räumliche Anordnung möglich); einzelne Tierarten sind zu dieser Abstraktion in der Lage
2. Reale und vertraute Gegenstände außerhalb der unmittelbaren Umgebung
3. Imaginäre Visionen, Varianten realer Objekte, können mit Bezeichnungen für reale Objekte beschrieben werden – nur Menschen sind dazu fähig
4. Mathematisches Denken; mathematische Objekte sind vollkommen abstrakt, haben keine offensichtliche oder direkte Verbindung zur realen Welt, sondern sind davon völlig abstrahiert (Devlin 2004, 150).

Diese Muster sind in der Regel so hochgradig abstrakt, dass eine formale Notation für deren Untersuchung und Beschreibung notwendig ist. Gerade dies kennzeichnet unsere moderne Mathematik: Der Gebrauch der abstrakten Notation. Algebraische Ausdrücke, Formeln und Diagramme sind abstrakte Darstellungen, in denen sich die Abstraktheit der Muster widerspiegelt. Die Symbolsprache der Algebra eignet sich hervorragend dazu, allgemeine Eigenschaften der Grundrechenarten festzuhalten, z. B. die allgemeingültige Formel des Kommutativgesetzes: $m + n = n + m$. Grafische Darstellungen wie die Multiplikationstabelle, der Zahlenstrahl, die Hundertertafel oder auch unsere Potenzschreibweise machen diese abstrakte und zugleich effektive Schreibweise deutlich. Arithmetische Muster finden sich beispielsweise in Übungsformen wie den Zahlenmauern, Zahlenfolgen oder auch bestimmten Aufgabenpäckchen wieder:

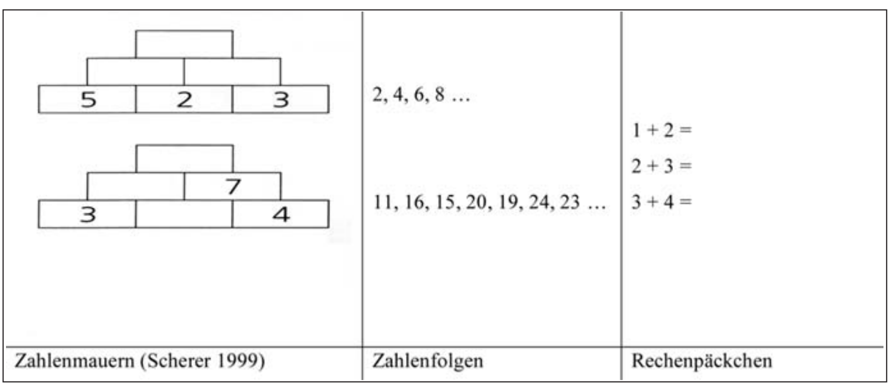


Abb. 4: Arithmetische Muster

Betont wird in diesem Zusammenhang immer wieder, dass die kompetente und sinnvolle Verwendung eines Symbols, einer Ziffer, eines Buchstabens die Einsicht voraussetzt, eine symbolisierte Einheit auch als solche Einheit wahrzunehmen. Um mit dem Symbol „7“ die Zahl Sieben darzustellen, müssen wir zunächst diese Zahl

Sieben als Etwas, eine Einheit, ein Ganzes wahrnehmen. Um den Buchstaben „m“ als Variable für eine beliebige natürliche Zahl zu benutzen, brauchen wir ein Konzept für das Wesen einer „natürlichen“ Zahl. Das Symbol aber erlaubt es, über dieses Konzept nachzudenken und es zu bearbeiten (Devlin 2004, 25).

Aber mathematische Symbole allein machen noch keine Mathematik aus, wie auch ein Notenblatt selbst noch keine Musik ist. Symbole müssen denkend erlebt werden; der Nutzer bzw. Leser dieser abstrakten Notation muss diese Symbole interpretieren und ihnen einen kontextbezogenen Sinn zuweisen, erst dann wird Mathematik „lebendig“ (Devlin 2002, 6). „Mathematik kann man nur mit den Augen des Geistes ‚sehen‘“ (ebd., 7). Um rechnen zu können, bedarf es also nicht der blinden Anwendung von Regeln, sondern einer sinnhaften, kontextgebundenen Interpretation der Symbole. Dass dies nicht immer vorausgesetzt werden kann, zeigen die immer wieder zu beobachtenden, zahlreichen Lösungsversuche der so genannten „Kapitänsaufgaben“ mit Aufgabenstellungen wie: „Ein Bauer hat 12 Kühe. Alle bis auf 5 sterben. Wie viele bleiben übrig?“ Aufgabenstellungen dieser Art zeigen, dass neben den rein numerischen Aspekten auch die kontextgebundene Interpretation und Sinnentnahme äußerst relevant für deren Lösung ist.

Mathematik als Formalisierung symbolischer Maschinen

Einen interessanten kulturhistorischen und sprachphilosophischen Zugang zur Mathematik entwickelte Krämer (1988). Im Mittelpunkt der Betrachtung über das Wesen der Mathematik steht dabei der hohe Formalisierungsgrad der heutigen Mathematik in seiner historischen Genese. Für die mathematische Wissensbildung rekonstruierte Krämer zwei Typen mathematischer Wissensbildung:

1. Rezeptwissen: Algorithmisch-algebraische Vorschriften (orientalische Herkunft); *Wie?* Dieser Zugang orientiert sich vor allem an der Frage nach den konkreten Abläufen, nach den „technischen“ Fertigkeiten zur Lösung einer Aufgabe → *techné*.
2. Begründungswissen: Kenntnisse gelten nur dann als gesichert, wenn sie sich axiomatisch-deduktiv aus einer Theorie ableiten lassen (Ursprung: klassische griechische Mathematik); *Warum?* Hier steht im Mittelpunkt die Frage nach den Begründungs- und Erklärungszusammenhängen für mathematische Vorschriften und Handlungsabläufe → *epistemé*.

Unsere heutige, neuzeitliche Mathematik ist eine Synthese aus orientalischer und griechischer Mathematik, d. h. das Wissen um die Verfahren wird in den Rang eines wissenschaftlich begründeten Wissens erhoben mit der Neuerung, dass mathematische Formeln genutzt werden. Die Anwendung dieser Formeln beruht auf dem operativen Gebrauch von Symbolen. Für die Mathematik bedeutet dies: Mathematik ist u. a. das Operieren mit Zahlen als ein regelgeleitetes Operieren mit Zeichen auf der Basis von Kalkülen. Ein Kalkül ist eine Herstellungsvorschrift, nach welcher aus einer begrenzten Menge von Zeichen unbegrenzt viele Zeichenkonfigurationen hergestellt werden können (Krämer 1988, 59).