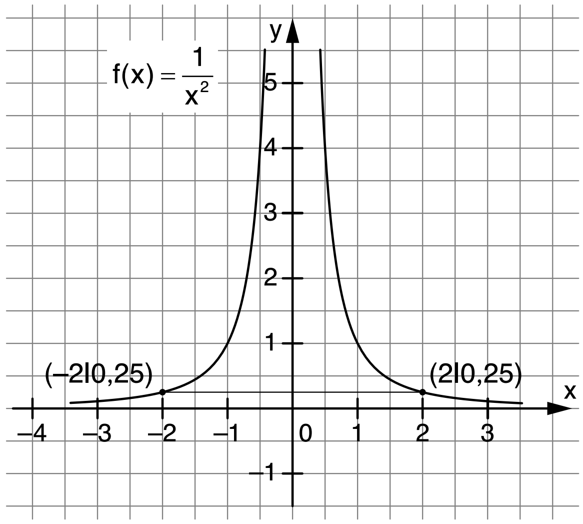
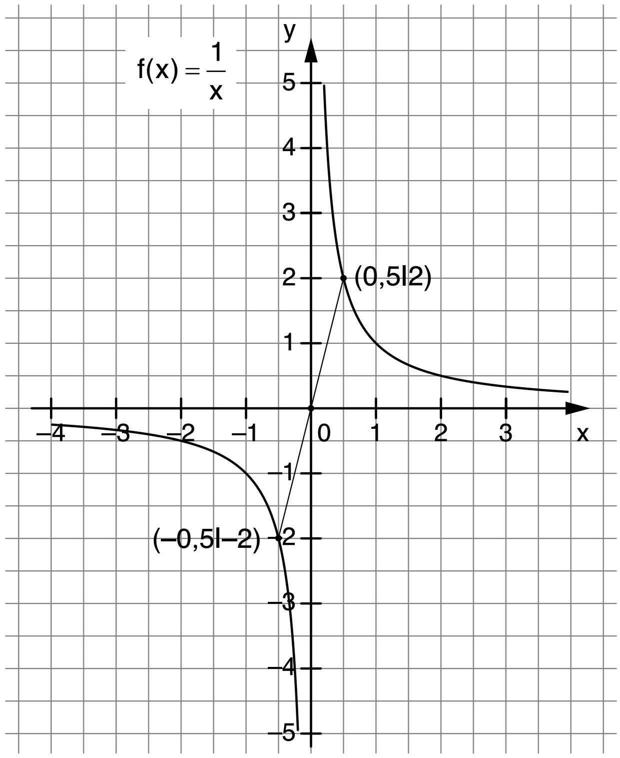
Symmetrie eines Graphen zum Koordinatensystem



Achsensymmetrie zur y-Achse:
f(–x) = f(x)

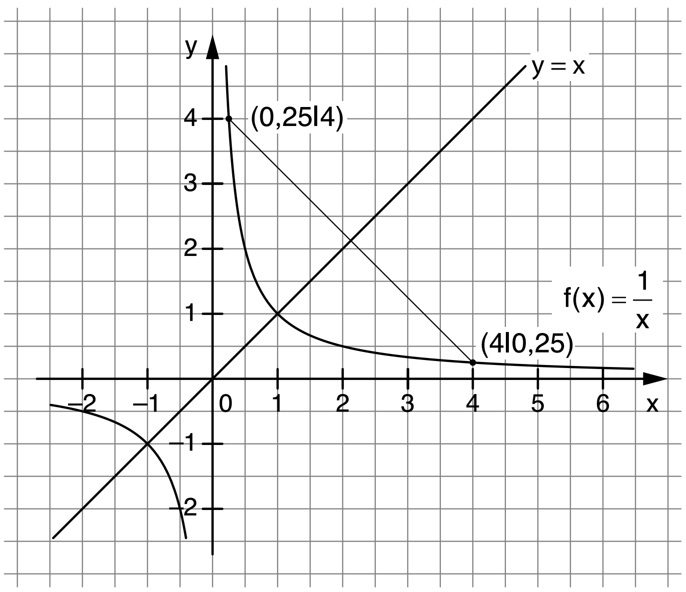


Punktsymmetrie zum Ursprung:
f(x) = –f(–x)

Bild 13

Bild 14

Symmetrie zur Achse y = x: vertausche Variable und Wert



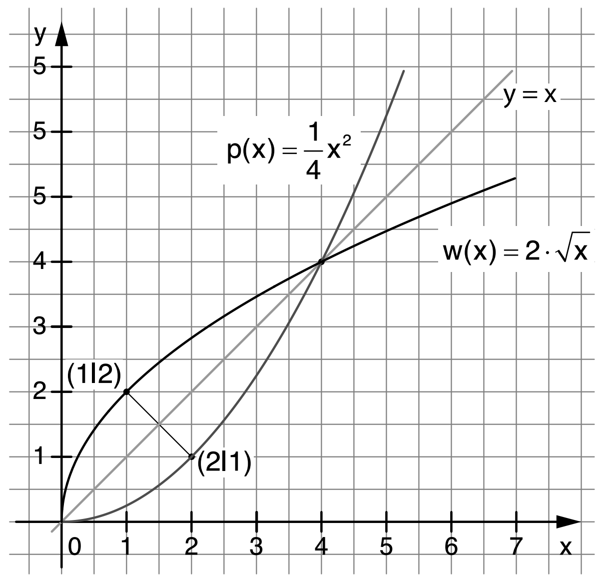


Bild 15

Bild 16

$$p(x)\colon y = \frac{1}{4} \cdot x^2 \Leftrightarrow w(x)\colon x = \frac{1}{4} \cdot y^2 \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{x}$$

Beachten Sie den Rollentausch von Definitions- und Wertebereich.

Umkehrfunktion

Manchmal ist es sinnvoll, die unabhängige und die abhängige Variable zu vertauschen.

Dazu gleich ein ziemlich vertracktes Beispiel: Pyramidenbau .

Ein nach wie vor nicht wirklich gelöstes Problem: Wie haben die Ägypter beim Pyramidenbau die vielen tonnenschweren Marmorblöcke hochtransportiert?
So wie in der Zeichnung angedeutet sicher nicht, das ist aus vielen Gründen unmöglich, selbst wenn Tausende oder Obelix alleine ziehen würden.

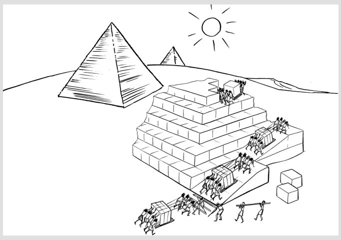


Bild 17

Selbst mit modernster Technik kann man mit Zugmaschinen keine Steigungen über 100 % bewältigen.

Beachten Sie: 100 % Steigung bedeutet 45°.

Die Steigung s in % berechnet sich als Quotient:

$$s = \frac{\text{Rampenhöhe } h}{\text{Basislänge } b}$$

Und Sie wissen: s = Tangens (α) (α = Steigungswinkel).
Schreibweisen: s = tan(α) (= tg(α) (*selten!*))
Betrachten wir eine Pyramide mit 100 m Höhe und als Rampengrenzwinkel 45°.
Sie wissen sicher: tan (45°) = 1 = 100 %, umgekehrt 45° = Inv tan(1) (entspricht $\frac{\pi}{4}$)

Schreibweisen: α = Inv tan(s) *(bevorzugt)* = arc tan(s) = $\tan^{-1}$(s) *(lieber nicht!)*

Berechnen wir nun die Steigung s einer Rampe der Länge l. Dazu stellen wir das Steigungsdreieck mit der Hypotenuse l und den Katheten h und b auf:

$$s(l)^2 = \frac{h^2}{b^2} \Rightarrow s(l)^2 \cdot b^2 = h^2$$

Mithilfe des Satzes von Pythagoras ($l^2 = h^2 + b^2 \rightarrow b^2 = l^2 - h^2$) gilt:

$$s(l)^2 \cdot (l^2 - h^2) = h^2 \qquad | : h^2$$

$$s(l)^2 \cdot \frac{l^2 - h^2}{h^2} = 1 \Rightarrow s(l)^2 = \frac{1}{\frac{l^2}{h^2} - 1} \Rightarrow s(l) = \sqrt{\frac{1}{\frac{l^2}{h^2} - 1}}$$

mit Definitionsbereich $D_s \approx [141\text{ m}; +\infty[$
und Wertebereich $W_s =]0; 1]$.

Interessanter für den Rampenbauer wäre die Umkehrung, die Funktion l(s).
Wir lösen nach l auf und erhalten die sog. **Umkehrfunktion:**

$$l(s) = h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}}$$

mit Definitionsbereich $D_l =]0; 1]$ und mit h = 100.
Wertebereich $W_l = [100 \cdot \sqrt{2}; +\infty[\approx [141\text{ m}; +\infty[$

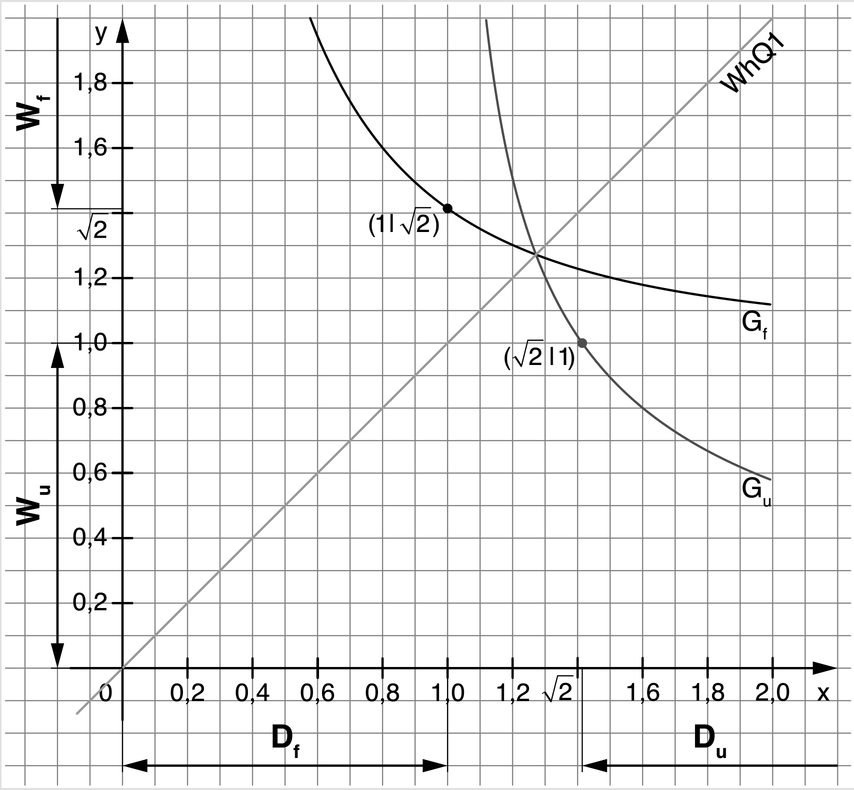
Wir wissen, dass die Ägypter Materialrampen mit 9,9 % Steigung gebaut haben:
l(0,099) = 1 015 … eine über 1 km lange Rampe für eine 100 m hohe Pyramide!

Reduzierte Darstellung: Setzen wir in den Funktionstermen vereinfachend h = 1 und wählen die typischen Variablenbezeichnungen x und y

Funktion f: $y = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ mit $D_f =]0; 1]$ und $W_f = [\sqrt{2}; +\infty[$

Vertausche x und y $\Rightarrow$ **Umkehrfunktion u:** $x = \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}}$

mit $D_u = [\sqrt{2}; +\infty[$ und $W_u =]0; 1]$.



Beachten Sie hier:

Höhe h = 1 m bedeutet: Eine Rampe mit 45° hat die Länge $f(1) = \sqrt{2}$. D. h., bei einer Steigung von 1 = 100 % ist die Rampe $\sqrt{2}$ m lang.

$u(\sqrt{2}) = 1$. D. h., bei einer Rampenlänge von $\sqrt{2}$ m ist die Rampe 100 % steil (45°).

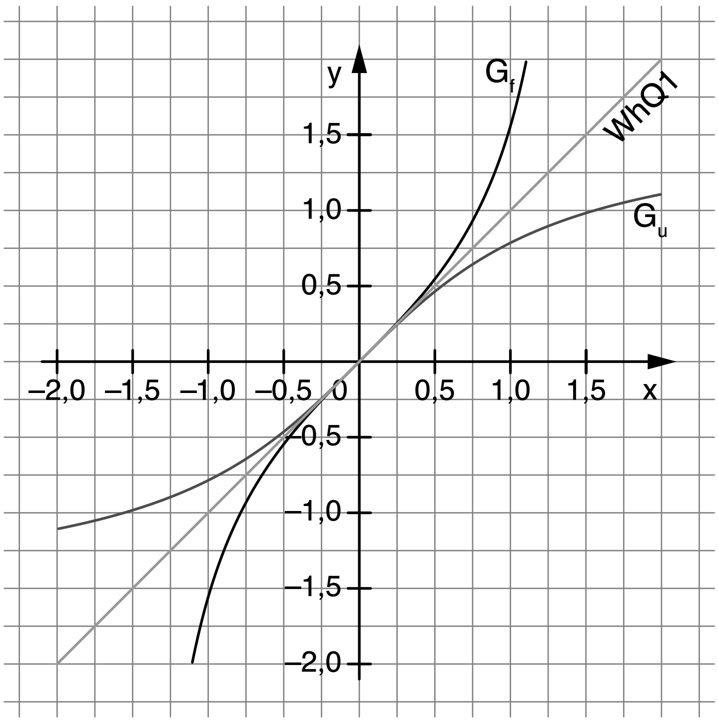
„WhQ1" meint die Winkelhalbierende des 1. (und 3.) Quadranten im Koordinatensystem.

Beachten Sie: Die Funktionen sind nur im jeweiligen Definitionsbereich gültig.

Bild 18

Sie bemerken: Definitions- und Wertebereich von Funktion und Umkehrfunktion tauschen ihre Rolle analog zum Tausch der Variablen x und y.

Und: Der Austausch der Variablen bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der „Winkelhalbierenden des 1. Quadranten".
Die Graphen schneiden sich daher, wenn überhaupt, auf der WhQ1.



Formales Beispiel:

f: $y = \tan(x)$ mit $D_f =]-0{,}5\pi; 0{,}5\pi[$ und $W_f =]-\infty; +\infty[$
vertausche nun x und y ⇒

u: $x = \tan(y)$ mit $D_u =]-\infty; +\infty[$ und $W_u =]-0{,}5\pi; 0{,}5\pi[$
⇒ löse auf nach y
⇒ $y = \text{arcus} \tan(x) = \text{Inv} \tan(x)$

Bild 19

Aufgabe A7: Pyramidenrampe ☼☼, ☼☼☼ K1, K2, K3

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen in Bild 18, S. 17. Interpretieren Sie ihn.

Aufgabe A8: Formale Umkehrfunktionen ☼, ☼☼, ☼☼☼ K1, K2, K3

a) ☼ Erklären Sie, weshalb eine Parabel auf $D =]-\infty; +\infty[$ nicht umkehrbar ist und ermitteln Sie die Umkehrfunktion von $y = -x^2$ im Bereich $[0; +\infty[$.

b) ☼ Zeigen Sie, dass $y = \frac{1}{x}$ die Umkehrfunktion von $y = \frac{1}{x}$ ist.

c) ☼☼ Ermitteln Sie die Umkehrfunktion des linken Astes der Parabel $y = x^2 + x$.

d) ☼☼☼ Skizzieren Sie von Hand die Umkehrfunktion von $y = 2 \cdot \sin(x - 0{,}5\pi) + 2$ im maximal möglichen Bereich [0; ?].
Geben Sie an, wo sich die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion schneiden.

Aufgabe A9: Anomalie von Wasser ☼☼, ☼☼☼ K1, K2, K3

Sie wissen sicher: Wasser hat bei 4 °C seine größte Dichte. Daher steigt sowohl Eis als natürlich auch „warmes Wasser" nach oben. Hier ein paar Messdaten für den Volumenzuwachs ΔV von 1 Liter Wasser (in cm^3) im Temperaturbereich [0 °C; 8 °C]:

Bild 20: Eis in Island: Gletschersee Jökulsárlón

t I °C	0	2	4	6	8
ΔV I cm^3	0,12	0,03	0,00	0,03	0,12

Beschreiben Sie das Ausdehnungsverhalten mit einem möglichst gut passenden quadratischen Term V(t) und ermitteln Sie den Term der Umkehrfunktion T(V) in den maximal möglichen Bereichen. Berechnen Sie mit diesem Term, bei welcher Temperatur eine 1-Liter-Flasche Wasser mit 2 cm^3 freiem Volumen nach längerem Aufenthalt im Tiefkühlfach regelrecht explodiert *(leidvolle eigene Erfahrung)*.

Aufgabe A10: Extremgeschwindigkeiten ☼☼☼ K1, K2, K3

Sie kennen sicher auch die weltberühmte Formel $E = m \cdot c^2$, mit Energie E, Masse m und Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000 \frac{km}{s}$.
Jede Masse hat eine „Ruhemasse" m_o und damit eine „Ruheenergie" $E_0 = m_0 \cdot c^2$.
Bei Beschleunigung mit der Energie E* ist die Gesamtenergie $E = E_0 + E^*$.

a) Ermitteln Sie die Funktionsterme m(E*) und E*(m) für Protonen.
Drücken Sie in m(E*) die Masse in Protonenmassen und die Energie in MeV aus.

b) Der Teilchenbeschleuniger CERN ( ) beschleunigt Protonen mit bis zu 7 TeV *(Tera-Elektronenvolt)*. Berechnen Sie den Massenzuwachs in Vielfachen der Protonenmasse und nach geeigneter Recherche die Geschwindigkeit in Prozent der Lichtgeschwindigkeit.

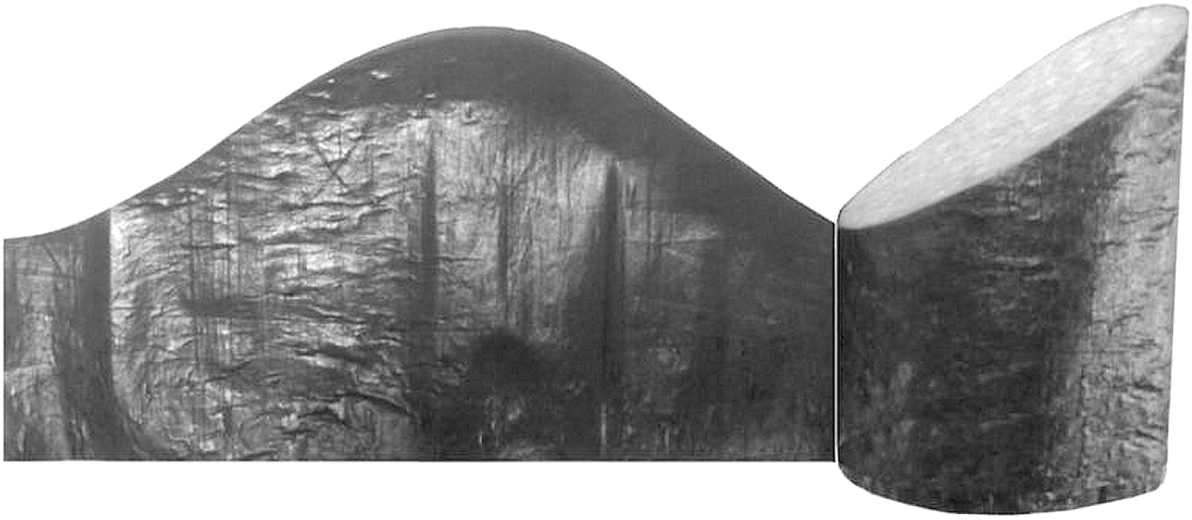


Bild 34

Lösung A7

Schnittstelle der beiden Graphen: $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}} \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0$.

Substitution: $z = x^2 \Rightarrow z^2 - z - 1 \Rightarrow$ mit der bekannten Formel $x = y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \sim 1{,}272$.

Inhaltlich und für die Praxis ist dieser Schnitt ohne jede Bedeutung.
Der Wert liegt auch weder im Definitionsbereich der Funktion f noch der Funktion u.
Für f bedeutet diese 1,272 eine Rampenlänge, nämlich 1,272 m.
Für u aber stellt 1,272 eine Steigung dar, nämlich 127,2 % entsprechend ~ 52°.

Lösung A8

a) Betrachten Sie als einfachsten Fall die Normalparabel $y = x^2$.
Die formale Umkehrung ist $x = y^2 \Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$ und damit nicht eindeutig.

b) $y = \frac{1}{x}$ mit der Umkehrung $x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

c) Sie wissen: G_f und G_u sind spiegelbildlich bez. der WhQ1.
$y = x^2 + x = x \cdot (x + 1)$ mit den Nullstellen $x = 0$ und $x = -1$ sowie dem Scheitel $(-0{,}5 | -0{,}25)$.
Der linke Ast der um 0,5 nach links und 0,25 nach unten verschobenen Normalparabel hat den $D_f =]-\infty; -0{,}5]$.
Betrachten Sie statt lange zu rechnen den Graphen G_f und spiegeln sie ihn an der WhQ1:
$y = -\sqrt{x + 0{,}25} - 0{,}5$

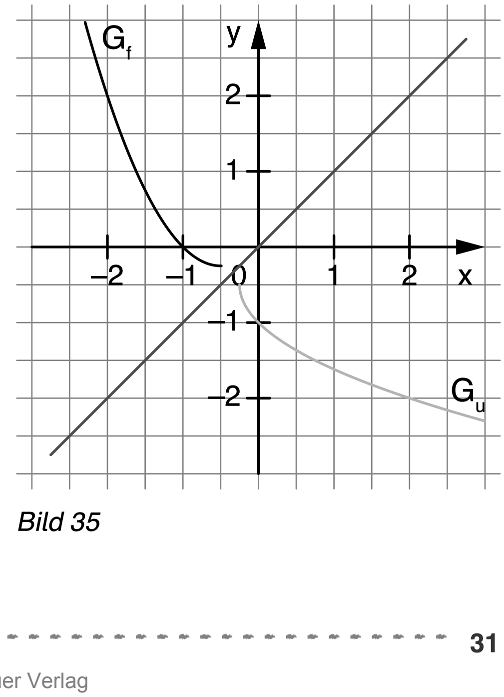


Bild 35

d) Überlegen Sie sich einfach den Verlauf des Graphen von $y = 2 \cdot \sin(x - 0{,}5\pi) + 2$ ausgehend vom Graphen $y = \sin(x)$
- Streckung in y-Richtung mit Faktor 2
- Verschiebung in y-Richtung um 2
- Verschiebung in x-Richtung um $0{,}5\pi$

und spiegeln Sie diesen an der WhQ1;

$y = \sin(x)$ ist im Bereich $[-0{,}5\pi; 0{,}5\pi]$ umkehrbar und daher ist f wegen der x-Verschiebung um $0{,}5\pi$ nach rechts im Bereich $[0; \pi]$ umkehrbar. Schnittpunkte von $G_f \cap G_u$ sind (0|0) und ~ (1,1|1,1).

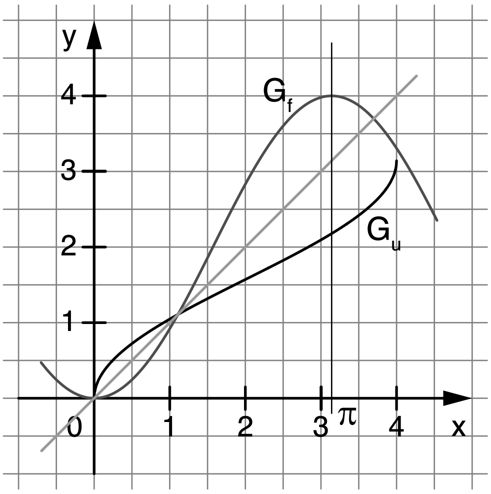


Bild 36

Lösung A9

Ein Blick auf die Daten legt nahe: $V(t) = a \cdot ((t-4)\,°C)^2 + V_0$ mit $V_0 = 1$ Liter $= 1\,000\,cm^3$. Für die Bestimmung von a arbeiten Sie besser mit $f(x) = ax^2$ und den Tabellenwerten: Überlegen Sie:
$f(2) = 4a = 0{,}03 \Leftrightarrow a = 0{,}0075$
$f(4) = 16a = 0{,}12 \Leftrightarrow a = 0{,}0075$ *(passt wunderbar)*

Also: $V(t) = 0{,}0075\,\frac{cm^3}{°C} \cdot ((t-4)\,°C)^2 + 1\,000\,cm^3$, formal $y = 0{,}0075 \cdot (x-4)^2 + 1\,000$.

Umkehrung: $x = 0{,}0075 \cdot (y-4)^2 + 1\,000 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x-1\,000}{0{,}0075}} + 4 \Rightarrow$

$T(V) = \sqrt{\frac{x-1\,000}{0{,}0075}}\,°C + 4\,°C$ mit x in cm^3,

und bei unter $t\,(1\,002\,cm^3) = -12{,}33\,°C$ gibt es in der Gefriertruhe alsbald einen Knall.

Lösung A10

TeV bedeutet „Tera-Elektronenvolt“, also 10^{12} eV $= 10^6$ MeV *(mit der elementaren Energieeinheit 1 eV = 1,6022 · 10^{-19} Joule).* Protonen haben die Ruheenergie $E_0 = 938{,}27$ MeV $\Leftrightarrow$ $m_0 = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}$ kg.

Nun ist ja nach $E = mc^2$ generell $m = \frac{E}{c^2} = \frac{E_0 + E^*}{c^2}$ mit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$.

Ein Randproblem sind die Einheiten … Wir müssen die Energie in Joule ausdrücken:

$1\text{ MeV} = 10^6\text{ eV} = 1{,}6022 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6\text{ J} = 1{,}6022 \cdot 10^{-13}\text{ J}$ und $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$;

damit erhalten wir automatisch die korrekte Masseneinheit kg *(SI-System)*

$m(E^*) = \ldots = 1{,}6022 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{938{,}27 + E^*}{9 \cdot 10^{16}}\text{ kg} = 1{,}780^{-30} \cdot (938{,}27 + E^*)\text{ kg}.$

Rechnen wir noch in Protonenmassen „PM“ um:

$\ldots = 1{,}780 \cdot 10^{-30} \cdot \frac{938{,}27 + E^*}{1{,}67262 \cdot 10^{-27}}\text{ PM} = 0{,}001 \cdot (938{,}27 + E^*)\text{ PM}.$

Bei 7 TeV ergibt das eine Masse von $1{,}780 \cdot 10^{-30} \cdot (938{,}27 + 7 \cdot 10^6)\text{ kg} = 1{,}25 \cdot 10^{-23}$ kg.
Die Protonen sind damit um den Faktor 7460 schwerer als in Ruhe.

Einfacher scheint $E^*(m) = mc^2 - E_0$, aber auch hier das Einheitenproblem …

Zunächst: 1 Joule $= 6{,}2415 \cdot 10^{18}$ eV, d. h. 1 J $= 6{,}2415 \cdot 10^{12}$ MeV.

Wir geben zunächst rechtsseitig kg und $\frac{m}{s}$ und Joule ein und brauchen links MeV:

$E^*(m) = m \cdot (3 \cdot 10^8)^2 - 938{,}27 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,J = (9 \cdot 10^{16} \cdot m - 1{,}5033 \cdot 10^{-10})\,J$
$= 6{,}2415 \cdot 10^{12} \cdot (9 \cdot 10^{16} \cdot m - 1{,}5033 \cdot 10^{-10})$ MeV mit m in kg.

Protonenmasse $\approx 1{,}67262 \cdot 10^{-27}$ kg, also 1 kg $= E^*(m) = m \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 = 5{,}979 \cdot 10^{26}$ PM:

$E^*(m) = 6{,}2415 \cdot 10^{12} \cdot (9 \cdot 10^{16} \cdot 1{,}67262 \cdot 10^{-27} m - 1{,}5033 \cdot 10^{-10})$ MeV
$= 6{,}2415 \cdot 10^{12} \cdot (15{,}0536 \cdot 10^{-11} m - 1{,}5033 \cdot 10^{-10})$ MeV mit m in PM

Sie haben sicher gefunden: $m(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot m_0 = \ldots$ *(s. o.)* $\ldots = 7460 \cdot m_0$

Lösen Sie auf: $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 7460 \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \left(\frac{1}{7460}\right)^2} = 99{,}999999\,\%$ c.

Lösung A11

log(100 000) =	5
log(0,001) =	–3
log(10$^{4)}$ =	4
log(1) =	0

log(?) = –1	? =	0,1
log(?) = 10	? =	10 000 000 000
log(?) = 1	? =	10
log(?) = –2	? =	0,01

Lösung A12

a) $K_1 = K_0 + 2\,\% \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + 2\,\%) = 1{,}02 \cdot K_0$
analog: $K_2 = 1{,}02 \cdot K_1 = 1{,}02^2 \cdot K_0$ und damit $K_n = 1{,}02^n \cdot K_0 = K_0 \cdot 1{,}02^n$

b) $K_{15} = K_0 \cdot 1{,}02^{15} \Rightarrow$ Zuwachs $K_0 \cdot 1{,}02^{15} - K_0 \ldots$
$\Rightarrow$ in %: $\frac{K_0 \cdot 1{,}02^{15} - K_0}{K_0 \cdot 1{,}02^{15}} = \frac{1{,}02^{15} - 1}{1{,}02^{15}} = 25{,}7\,\%$.

c) Verdopplung: alle $1{,}02^n = 2 \mid \log \Leftrightarrow n \cdot \log(1{,}02) = \log(2) \Leftrightarrow n = 35$ Jahre

Lösung A13

Laut Einführung beträgt die Schallstärke bei 0 dB ca. $10^{-15}\frac{W}{cm^2}$.
Der Knall des Krebses mit 340 dB = 34 Bel ist objektiv 10^{34}-mal stärker und erzeugt damit eine Schallstärke von $10^{34} \cdot 10^{-15}\frac{W}{cm^2} = 10^{19}\frac{W}{cm^2}$. Allerdings ist die Wirkung auf winzige Luftblasen begrenzt.

Lösung A14

Fachwissen laut Einführung: $E(1_m) = 100 \cdot E(6_m)$ mit logarithmischem Anstieg.
Die 6 – 1 = 5 Anstiege der subjektiven Helligkeit bedeuten eine Abnahme um 5 x den Faktor q mit der Eigenschaft $q^5 = 100 \Leftrightarrow q = 10^{\frac{2}{5}} = 10^{0{,}4} \approx 2{,}5$.

a) Der 6_m-Stern ist also physikalisch $q^{33-6} = q^{27}$-mal heller als das 33_m-Objekt.

b) Sirius $(-1{,}46_m)$ ist $q^{1{,}97-(-1{,}46)} = 23{,}55$-mal objektiv heller als der Polarstern $(1{,}97_m)$.