Teil I: Funktionen mit einer Variablen

1 Häufig vorkommende Funktionstypen

In diesem Kapitel…

- Funktionen ganz allgemein
- Polynome, gebrochen rationale Funktionen und Wurzelfunktionen
- Exponential-, Logarithmus- und Hyperbelfunktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Betragsfunktion und Gaußklammerfunktion

Funktionen werden in den Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften verwendet, um quantitative Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen zu beschreiben (beispielsweise zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg eines Autos, zwischen Dauer und Kosten eines Telefonats oder zwischen der Laufzeit eines Satellitensignals und der Position eines GPS-Empfängers). Ich stelle Ihnen zunächst die Eigenschaften vor, die bei jeder Funktion vorkommen können.
Die Vielfalt der möglichen Funktionen ist unüberschaubar. Einige Typen tauchen in diesen Zusammenhängen aber so häufig auf, dass es sich lohnt, ihre speziellen Eigenschaften parat zu haben. In den darauf folgenden vier Abschnitten dieses Kapitels werden sie zu Gruppen zusammengefasst vorgestellt.

Funktionen ganz allgemein

Der Begriff „Funktion“ ist Ihnen mit ziemlicher Sicherheit auf der Schule schon begegnet. So wird Ihnen manches in diesem Abschnitt bereits bekannt sein. Wenn Sie ihn also zunächst überschlagen und erst dann genauer anschauen, wenn Sie etwas nachschlagen oder auffrischen wollen, ist das völlig in Ordnung.

Eine **Funktion** $f(x)$ besteht aus einem **Definitionsbereich** D_f, einem **Wertebereich** W_f und einer **Zuordnungsvorschrift**, die *jeder* Zahl $x \in D_f$ *genau eine*(! nicht mehr und nicht weniger) Zahl $f(x) \in W_f$ zuordnet. Ob dabei alle Zahlen aus W_f verwendet werden und ob Zahlen aus W_f möglicherweise mehrmals vorkommen, ist an dieser Stelle egal.

Tipp

Der mathematische Funktionsbegriff ist nicht auf das Rechnen mit Zahlen beschränkt. Wenn Sie etwa eine Menge von Personen haben und jeder Person ihren Geburtsort zuordnen, handelt es sich auch dabei um eine Funktion. Wichtig dafür ist nur die Eindeutigkeit auf Seiten des Definitionsbereichs: *Jeder* Mensch hat einen Geburtsort und jeder Mensch hat (nur) *einen* Geburtsort. Streng genommen hören daher die Funktionen, bei denen mit reellen Zahlen gerechnet wird, auf die Bezeichnung „reelle Funktionen“. Aber da in diesem Buch ohnehin von nichts anderem die Rede sein wird, lasse ich diesen Vornamen stillschweigend weg.

Die Verwendung des Buchstabens x ist dabei pure Gewohnheit. Wenn der Definitionsbereich ausdrücklich eine bestimmte Größe (beispielsweise aus der Physik) repräsentiert, kommen auch andere Buchstaben zum Einsatz – zum Beispiel t, wenn die Elemente des Definitionsbereichs Zeitangaben sind. Der Buchstabe, der in der Zuordnungsvorschrift die Elemente des Definitionsbereichs repräsentiert, wird auch als **Argument** der Funktion bezeichnet. So ist beispielsweise t das Argument in der Weg-Zeit-Formel für den freien Fall: $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$.

Die wichtigsten Eigenschaften einer Funktion können Sie oft auf einen Blick erfassen, wenn Sie die Kurve der Funktion (auch Graph der Funktion genannt) zeichnen. Das geschieht meistens in einem kartesischen Koordinatensystem mit einer waagerechten Achse, auf der die Werte von x aufgetragen werden und einer senkrechten Achse, deren Werte mit dem Buchstaben y bezeichnet werden. Die Kurve entsteht dann dadurch, dass in der Zeichenebene alle Wertepaare (x, y) markiert werden, bei denen die y-Koordinate dem Funktionswert $f(x)$ entspricht. Deshalb sagt man hierzu auch abkürzend „die Kurve $y = f(x)$“. In diesem Zusammenhang heißt x die *unabhängige Variable* und y die *abhängige Variable*. Die Koordinatenachse, die die unabhängige Variable wiedergibt (also die X-Achse) heißt die **Abszisse**, und die Koordinatenachse, die die abhängige Variable wiedergibt (also die Y-Achse), heißt die **Ordinate** des Koordinatensystems.

Umkehrung einer Funktion

Eine Funktion heißt umkehrbar, wenn jedes Element des Wertebereichs genau einmal verwendet wird. Dann können Sie die Rollen von Definitions- und Wertebereich vertauschen, und die Vorschrift für diese neue Zuordnung wird als $f^{-1}(x)$ bezeichnet.

Um eine Funktion umkehrbar zu machen, müssen Sie zunächst den Wertebereich so weit verkleinern, dass er keine überflüssigen Elemente mehr enthält (man spricht vom **Bildbereich** B_f, wenn man sich ausschließlich auf die Zahlen konzentriert, die als Funktionswerte tatsächlich vorkommen). Anschließend schränken Sie den Definitionsbereich so weit ein, dass kein Funktionswert mehrmals angenommen wird.

Die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen und am Ende den Buchstaben x durch $f^{-1}(x)$ sowie den Buchstaben y durch x ersetzen. Für den Definitions- und den Bildbereich der Umkehrfunktion gilt $D_{f^{-1}} = B_f$ sowie $B_{f^{-1}} = D_f$. Die Kurve $y = f^{-1}(x)$ entsteht durch Spiegelung der Kurve $y = f(x)$ an der Geraden $y = x$.

BEISPIEL

In Abbildung 1.1 sehen Sie die Kurve der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Ihr Bildbereich umfasst alle reellen Zahlen, die größer oder gleich minus drei sind: $B_f = [-3, \infty)$(diese Schreibweise wird in Anhang A erläutert). Durch die Einschränkung $D_f = [1, \infty)$ taucht jede Zahl aus B_f nur noch einmal als Funktionswert auf (das entspricht dem fett gezeichneten rechten Teil der Kurve). Wenn Sie nun die Gleichung $y = x^2 - 2x - 2$ unter Beachtung der Einschränkung $x \geq 1$ mit der p-q-Formel nach x auflösen, bekommen Sie:

$$y = x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - (2 + y) = 0 \Rightarrow x = \underbrace{1 + \sqrt{1 + 2 + y}}_{\geq 1}$$

Jetzt werden noch die Namen der Variablen vertauscht, damit x wieder die unabhängige Variable verkörpert. Dadurch entsteht die Zuordnungsvorschrift

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{3 + x}$$

und mit dem Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = B_f = [-3, \infty)$ sowie dem Bildbereich $B_{f^{-1}} = D_f = [1, \infty)$ ist die Umkehrfunktion komplett. Die Kurve $y = f^{-1}(x)$ ist in Abbildung 1.1 gestrichelt eingezeichnet. Sie entspricht genau der Spiegelung des fett gezeichneten Kurvenstücks an der Geraden $y = x$.

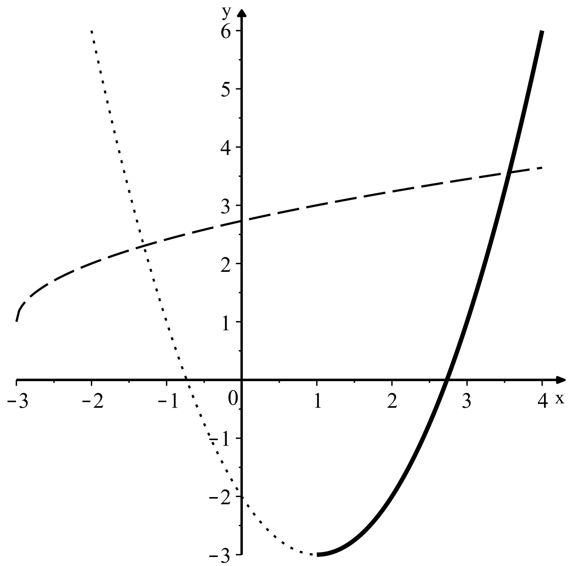

Abbildung 1.1 Die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$ ist umkehrbar, wenn ihr Wertebereich auf die Menge der tatsächlich angenommenen Funktionswerte (diese Menge wird als Bildbereich bezeichnet) und ihr Definitionsbereich auf alle Zahlen ab 1 eingegrenzt wird: $B_f = [-3, \infty)$, $D_f = [1, \infty)$. Dies entspricht dem durchgezogenen Teil der Parabel. Die Umkehrfunktion hat die Zuordnungsvorschrift $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 3}$ mit dem Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = B_f = [-3, \infty)$ und dem Bildbereich $B_{f^{-1}} = D_f = [1, \infty)$. Ihre Kurve (gestrichelt) entsteht dadurch, dass der durchgezogene Teil der Parabel an der Geraden x = y gespiegelt wird. Alternativ wäre es auch möglich, die Parabel stattdessen auf den gepunkteten Teil zu beschränken. Dann ergäbe sich aber eine andere Umkehrfunktion.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden Sie an mehreren Stellen Umkehrfunktionen begegnen. Achten Sie doch einmal darauf, wie leicht oder schwer es in den unterschiedlichen Situationen ist, die Ausgangsfunktion so zurechtzustutzen, dass sie sich umkehren lässt.

Rechenoperationen bei Funktionen

Durch die vier Grundrechenarten und durch Verkettung können Funktionen zu neuen Funktionen zusammengesetzt werden.

- Unproblematisch sind **Addition**, **Subtraktion** und **Multiplikation**: Die resultierenden Funktionen sind überall definiert, wo die Ausgangsfunktionen definiert sind.
- Wenn Sie zwei Funktionen **dividieren**, ist das Ergebnis überall dort definiert, wo Dividend (= der Zähler) und Divisor (= der Nenner) definiert sind und der Divisor ungleich null ist.
- Ein wenig genauer hinschauen müssen Sie bei der **Verkettung** von Funktionen, wenn Sie also aus einer Funktion $f(x)$ und einer Funktion $g(x)$ die Funktion $f(g(x))$ bilden: Die neue Funktion ist überall definiert, wo $g(x)$ definiert ist und der Funktionswert $g(x)$ im Definitionsbereich von $f(x)$ liegt.

BEISPIEL

- Die Funktion $f(x) = x$ ist für jede reelle Zahl x definiert. Deshalb ist die Funktion $f(x) \cdot f(x) - f(x) = x^2 - x$ ebenfalls für jede reelle Zahl x definiert: $D = \mathbb{R}$
- Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist für alle positiven Zahlen x definiert. Die Funktion $g(x) = x^2 - x$ ist zwar für jede reelle Zahl definiert, hat aber für $x = 0$ und $x = 1$ den Wert null. Deshalb ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{;\ln;x}{x^2 - x}$ nur für positive Zahlen x ungleich 1 definiert: $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist definiert, solange $x \geq 0$ gilt. Die Funktion $g(x) = x^2 - x$ ist zwar für jede reelle Zahl definiert, hat aber für $0 < x < 1$ negative Werte. Deshalb ist $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - x}$ nur für $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ definiert.

Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heißt **monoton steigend** auf einem Intervall, wenn dort bei zunehmendem x die Funktionswerte niemals fallen (sie dürfen aber konstant bleiben). Die Funktion heißt **streng monoton steigend**, wenn die Funktionswerte bei zunehmendem x tatsächlich steigen (und nicht etwa konstant bleiben). Entsprechend sind monotones und streng monotones Fallen definiert.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn Sie eine Zahl angeben können, die von den Funktionswerten garantiert nie überschritten wird (die Zahl muss selbst kein Funktionswert sein und muss auch nicht knapp oberhalb der tatsächlichen Funktionswerte liegen). Entsprechend wird Beschränktheit nach unten definiert. Eine Funktion heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **achsensymmetrisch zur Y-Achse**, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt. Sie heißt **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn $-f(x) = f(-x)$ gilt.

Tipp

- Achsensymmetrische Funktionen werden auch als *gerade Funktionen* bezeichnet (weil unter anderem die geraden Potenzen $x^2, x^4, x^6, \ldots$ diese Eigenschaft haben).
- Punktsymmetrische Funktionen werden auch als *ungerade Funktionen* bezeichnet (weil unter anderem die ungeraden Potenzen $x, x^3, x^5, \ldots$ diese Eigenschaft haben).
- Die Summe und die Differenz gerader Funktionen sowie das Produkt und der Quotient zweier Funktionen mit derselben Symmetrie sind ihrerseits gerade Funktionen.
- Die Summe und die Differenz ungerader Funktionen sowie das Produkt und der Quotient zweier Funktionen mit unterschiedlicher Symmetrie sind ihrerseits ungerade Funktionen.

BEISPIEL

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ definiert. Im Bereich $x < 0$ ist sie streng monoton steigend, im Bereich $x > 0$ hingegen ist sie streng monoton fallend. Sie ist nach unten beschränkt, nach oben aber unbeschränkt. Da $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$ gilt, ist sie achsensymmetrisch zur Y-Achse (siehe Abbildung 1.2).

Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_E ein **lokales Maximum**, wenn der Funktionswert $f(x_E)$ in der näheren Umgebung nicht übertroffen wird. Entsprechend spricht man von einem **lokalen Minimum**, wenn der Funktions-

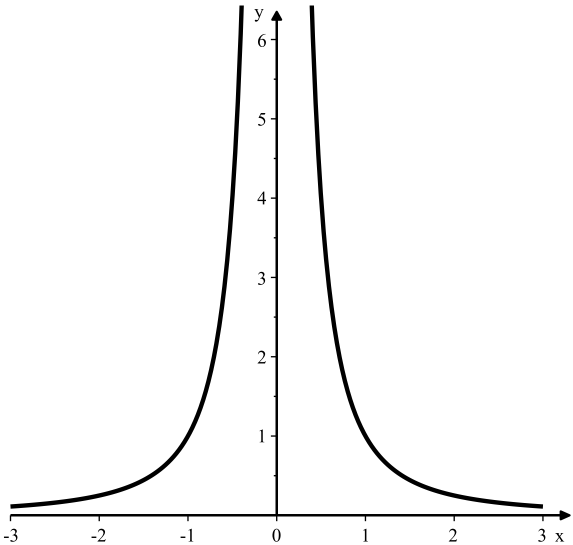

Abbildung 1.2 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist streng monoton steigend für alle $x < 0$ und streng monoton fallend für alle $x > 0$. Sie ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Sie ist eine gerade Funktion (also achsensymmetrisch zur Y-Achse).

wert in der näheren Umgebung nicht unterschritten wird. In beiden Fällen heißt x_E eine **Extremstelle** von $f(x)$. Falls der Funktionswert sogar auf dem gesamten Definitionsbereich nirgends überschritten, beziehungsweise unterboten wird, spricht man von einem *globalen* Maximum, beziehungsweise Minimum.

BEISPIEL

In Abbildung 1.3 hat die gepunktete Kurve ein Minimum bei $x = 1$, das sogar global ist. Die Strich-Punkt-Kurve hat ein Maximum in der Nähe von $x = 0,13$ und ein Minimum in der Nähe von $x = 2,54$. Diese beiden Extremstellen sind jeweils nur lokal, weil die Funktion nach links noch viel kleinere und nach rechts noch viel größere Werte annimmt.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **periodisch**, wenn sich ihre Funktionswerte in festem Abstand wiederholen, wenn es also eine Zahl x_p gibt, sodass auf dem gesamten Definitionsbereich von $f(x)$ gilt $f(x + x_p) = f(x)$. x_p heißt die *Periodenlänge* von $f(x)$.

BEISPIEL

Periodizität kennen Sie im Moment wohl nur von den trigonometrischen Funktionen her (ihre Definition finden Sie weiter unten in diesem Kapitel). Die Sinus- und die Cosinusfunktion haben die Periodenlänge $x_p = 2\pi$ (Abbildung 1.15); die Tangensfunktion hat die Periodenlänge $x_p = \pi$ (Abbildung 1.16). Eine abgewandelte Sinusfunktion mit $x_p = \frac{2\pi}{3}$ finden Sie in Abbildung 1.17.

Polynome

Funktionen, bei denen Sie die Zuordnungsvorschrift in dieser Form sortieren können:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

heißen **Polynome**. Damit es möglichst suggestiv aussieht, werde ich in der Regel $p(x)$ an Stelle von $f(x)$ schreiben. Die Zahl n, also der Exponent der höchsten Potenz von x, heißt der **Grad** des Polynoms.

BEISPIEL

- Die Funktion $p_0(x) = 2$ ist ein Polynom vom Grad null. Ihre Kurve ist eine waagerechte Gerade.
- Die Funktion $p_1(x) = -x + 3$ ist ein Polynom vom Grad eins. Ihre Kurve ist eine Gerade mit der Steigung –1 und dem *Y*-Achsenabschnitt 3.
- Die Funktion $p_2(x) = x^2 - 2x + 2$ ist ein Polynom vom Grad zwei. Ihre Kurve ist eine nach oben geöffnete Parabel. (Mit einem negativen Faktor von x^2 wäre die Parabel nach unten geöffnet.)

- Die Funktion $p_3(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ ist ein Polynom vom Grad drei. Ihre Kurve kommt von links unten und geht nach rechts oben (bei einem negativen Faktor vor x^3 käme sie von links oben und ginge nach rechts unten). Unterwegs hat sie ein Maximum und ein Minimum. Wenn Sie die Kurve auf einem Motorrad abfahren könnten, würden Sie unterwegs einmal die Neigungsrichtung wechseln.

Die Kurven aller vier Funktionen sehen Sie in Abbildung 1.3.

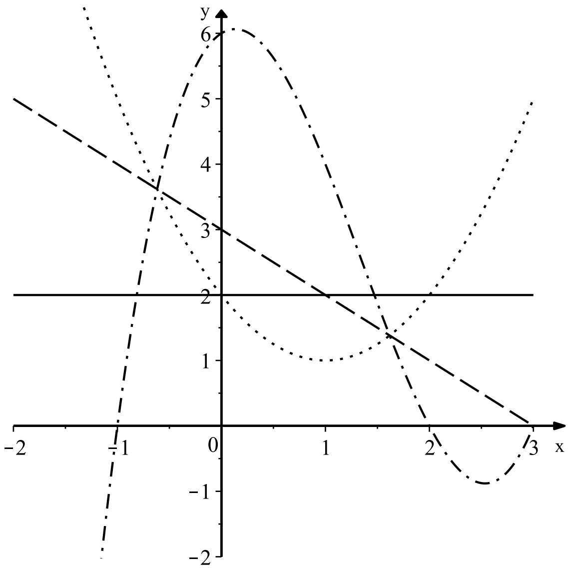

Abbildung 1.3 Typische Kurven von Polynomen vom Grad null ($f(x) = 2$, durchgezogen), eins ($f(x) = -x + 3$, gestrichelt), zwei ($f(x) = x^2 - 2x + 2$, gepunktet) und drei ($f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, Striche und Punkte im Wechsel).

Linearfaktoren

Polynome besitzen eine Eigenschaft, die unter Funktionen einzigartig ist: Mit jeder Nullstelle, die Sie kennen, können Sie die Zuordnungsvorschrift vereinfachen.

Konkret: Wenn $x = x_0$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist, dann können Sie den so genannten Linearfaktor $(x - x_0)$ ausklammern und so $p(x)$ als Produkt aus diesem Linearfaktor und einem Polynom darstellen, dessen Grad um eins niedriger ist. Ein Beispiel hierzu, bei dem Sie auch sehen, wie Sie dieses Ausklammern praktisch durchführen können, finden Sie am Ende des folgenden Abschnitts über das Horner Schema.

Letzen Endes lässt sich ein Polynom stets in ein Produkt aus Linearfaktoren und aus quadratischen Faktoren zerlegen, die keine Nullstelle besitzen. Wenn ein- und derselbe Linearfaktor $(x - x_0)$ dabei mehrmals auftritt, heißt x_0 eine mehrfache Nullstelle.

BEISPIEL

Das Produkt

$$p(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 + x + 3) = x^5 - 2x^4 - 5x^2 + 4x + 12$$

ist ein Polynom vom Grad 5 mit einer einfachen Nullstelle bei $x = -1$ und einer doppelten Nullstelle bei $x = 2$.

Das Horner Schema für Polynome

Das Horner Schema liefert den Funktionswert $p(x)$ an einer Stelle $x = x_0$ mit besonders wenigen Rechenoperationen. Diese werden durch maximales Ausklammern von Faktoren eingespart. Aus

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

wird so

$$p(x) = ((\ldots(a_n x + a_{n-1}) \cdot x + \ldots + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$$

Diese letzte Form müssen Sie aber nicht ausdrücklich hinschreiben. Das Horner Schema besteht aus drei Zeilen und ordnet die Zahlen $a_n, \ldots, a_0$ von links nach rechts in der ersten Zeile an. In der zweiten Zeile steht links außen die Zahl x_0 – „außer Konkurrenz“ und nur zur Erinnerung. Die dritte Zeile erhält als ersten Eintrag die Zahl a_n. Von links nach rechts werden nun abwechselnd die zweite und die dritte Zeile gefüllt:

- Der jüngste Eintrag in der dritten Zeile wird mit x_0 multipliziert. Das Ergebnis kommt schräg rechts darüber in die zweite Zeile. – Weiter geht’s mit dem nächsten Schritt.

- Der jüngste Eintrag in der zweiten Zeile wird zu dem Eintrag in der ersten Zeile addiert. Das Ergebnis kommt senkrecht darunter in die dritte Zeile. – Weiter geht's mit dem vorangegangenen Schritt.

Schließlich steht am rechten Ende der dritte Zeile der gewünschte Funktionswert $p(x_0)$.

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & a_n & & a_{n-1} & & \dots & a_2 & & a_1 & & a_0 \\ x_0 & 1 & & & & & & & & & \\ \hline & \downarrow + & \nearrow \cdot x_0 & \downarrow + & \nearrow \cdot x_0 & \dots & \downarrow + & \nearrow \cdot x_0 & \downarrow + & \nearrow \cdot x_0 & \downarrow + \\ & & & & & & & & & & p(x_0) \end{array}$$

BEISPIEL

Das Polynom $p_3(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ soll an der Stelle x = 5 ausgewertet werden. In der ersten Zeile des Horner Schemas erscheinen daher nacheinander die Zahlen 1, –4, 1 und 6. In der zweiten Zeile wird ganz links die Stelle der Auswertung notiert. Die dritte Zeile beginnt mit der 1 aus der ersten Zeile. Nun werden die weiteren Positionen der zweiten und dritten Zeile abwechselnd gefüllt:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 1 & 6 & \\ x = 5 & & 5 & 5 & 30 & \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 36 & = p(5) \end{array}$$

Die Zahlen, die in der dritten Zeile vor dem Endergebnis stehen, haben ebenfalls eine Bedeutung. Wenn Sie aus ihnen wieder ein Polynom $q(x)$ machen, gilt

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + p(x_0)$$

Im vorangegangenen Beispiel heißt dies konkret für die Zahlen 1, 1 und 6

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 5) \cdot (1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 6) + 36$$

(Das war jetzt nur zur Verdeutlichung, in Zukunft lasse ich das „eins mal" vor dem x^2 und dem x wieder weg.) Weiter unten am Ende des Abschnitts über gebrochen rationale Funktionen werden Sie sehen, dass dies ein Spezialfall der *Polynomdivision mit Rest* ist.
Besonders nützlich ist diese Eigenschaft des Horner Schemas, wenn die Zahl x_0 eine Nullstelle des Polynoms ist. Dann erhalten Sie nämlich die Zerlegung

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$$

sodass Sie sofort ablesen können, wie der Linearfaktor $(x - x_0)$ aus dem Polynom ausgeklammert wird. Allerdings liefert Ihnen das Horner Schema selbst keinen Anhaltspunkt dafür, wo Sie nach einer Nullstelle des Polynoms suchen sollen.

BEISPIEL

Für $p_3(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ erhalten Sie an der Stelle $x = 3$ das Horner Schema

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -4 & 1 & 6 & \\
x = 3 & & 3 & -3 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0 & = p(3)
\end{array}
$$

$p(x)$ hat also eine Nullstelle bei $x = 3$, und der entsprechende Linearfaktor $(x - 3)$ lässt sich so ausklammern:

$$p(x) = (x - 3) \cdot (x^2 - x - 2)$$

In Kapitel 4 lernen Sie eine weitere nützliche Eigenschaft des Horner Schemas kennen.

Nullstellen bei Polynomen bestimmen

Es gibt hierfür keine allgemeingültige Formel. Unter Umständen bleibt Ihnen nichts anderes übrig, als die Nullstellen näherungsweise mit dem in Kapitel 6 vorgestellten Newton-Verfahren zu bestimmen.
Bei Polynomen, die sich jemand speziell für Ihre Übungsaufgaben ausgedacht hat, können Sie es aber einmal mit folgender Regel versuchen:
Falls das Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ überhaupt rationale Nullstellen besitzt, sind sie ganze Zahlen und Teiler von a_0

BEISPIEL

In die Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ setzen Sie versuchsweise die Zahlen $x = \pm 1$, und $x = \pm 2$ ein. Tatsächlich klappt es mit $x = 2$.

Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen, deren Zuordnungsvorschrift als Quotient aus zwei Polynomen geschrieben werden kann, heißen **gebrochen rationale Funktionen**.

Tipp

In diesem Zusammenhang gibt es auch den Fachbegriff **ganzrationale Funktionen**. Dies ist einfach ein anderes Wort für Polynome.

In Aufgaben über gebrochen rationale Funktionen werden in Einführungskursen über Analysis üblicherweise zwei Arten von Fragen gestellt:

- die Frage nach dem Definitionsbereich der Funktion und
- die Frage nach ihrer Asymptote.

Der Definitionsbereich einer gebrochen rationalen Funktion

Eine gebrochen rationale Funktion ist überall dort definiert, wo ihr Nenner nicht null ist.

BEISPIEL

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ ist überall auf den reellen Zahlen definiert, außer an den Stellen $x = -2$ und $x = 1$: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2, 1\}$.

Die Werte, die nicht zum Definitionsbereich gehören, heißen die **Definitionslücken** der gebrochen rationalen Funktion. Die Funktion hat dort eine Polstelle oder eine hebbare Lücke.

- Bei einer **hebbaren Lücke** kann der Funktion ein Funktionswert hinzugefügt werden, der zu den Werten rechts und links von ihr passt. (In Kapitel 2 werden Sie sehen, dass die Funktion durch diese Ergänzung stetig gemacht wird.) Sie erkennen eine hebbare Lücke daran, dass *Zähler und Nenner* der Zuordnungsvorschrift dort eine *gemeinsame Nullstelle* haben und dass die *Nullstelle im Nenner durch Kürzen* des passenden Linearfaktors *verschwindet.*
- Bei einer **Polstelle** werden die Funktionswerte unbegrenzt immer größer oder unbegrenzt immer kleiner, je näher Sie dem x-Wert kommen. Ist das

Verhalten der Funktionswerte von beiden Seiten gleich, spricht man von einer Polstelle *ohne Vorzeichenwechsel*, ist das Verhalten von beiden Seiten unterschiedlich, spricht man von einer Polstelle *mit Vorzeichenwechsel*. Sie erkennen eine Polstelle daran, dass sie entweder *von vornherein nur eine Nullstelle des Nenners* ist oder dass sie sich *durch Kürzen von* gemeinsamen *Linearfaktoren* in Zähler und Nenner *nicht beseitigen* lässt. Ein Vorzeichenwechsel liegt vor, wenn die Vielfachheit der Nullstelle (nachdem, wenn möglich, gekürzt wurde) ungerade ist.

BEISPIEL

Bei der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ wird an der Stelle x = 1 nur der Nenner null. Es liegt daher eine Polstelle vor. Da die Nullstelle des Nenners einfach ist, handelt es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. An der Stelle x = –2 hingegen werden Zähler und Nenner gleichzeitig null. Nach dem Kürzen des gemeinsamen Linearfaktors $(x + 2)$ entsteht die Zuordnungsvorschrift $g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$. Da $g(-2) = \frac{-2 + 1}{-2 - 1} = \frac{1}{3}$ ist, kann die Lücke geschlossen werden, wenn der Funktion $f(x)$ der Wert $f(-2) = \frac{1}{3}$ hinzugefügt wird. (Abbildung 1.4)

Asymptoten einer gebrochen rationalen Funktion

Unter der Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion versteht man das Polynom, dem die Funktion immer ähnlicher wird, je größer oder je kleiner x wird.

Tipp

Mitunter werden zusätzlich die Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion als senkrechte Asymptoten bezeichnet.

Sie müssen dabei drei Fälle unterscheiden:

- Wenn das Polynom im Nenner einen höheren Grad hat als das Polynom im Zähler, dann ist die Asymptote immer die Nullfunktion.
- Wenn die beiden Polynome im Zähler und im Nenner denselben Grad n haben, dann ist die Asymptote eine waagerechte Gerade $y = c$. c ist dabei der Quotient aus den Koeffizienten von x^n im Zähler und im Nenner.

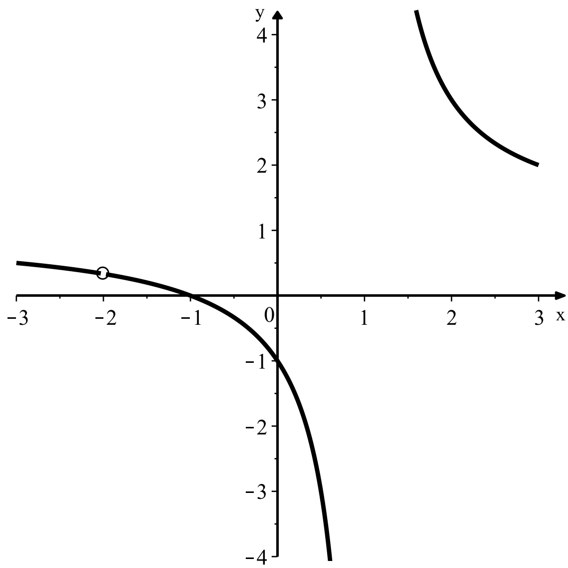

Abbildung 1.4 Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ ist für x = –2 und für x = 1 nicht definiert. Bei x = –2 kann die Lücke im Kurvenverlauf durch Hinzufügen eines zusätzlichen Funktionswertes geschlossen werden. Bei x = 1 liegt hingegen eine Polstelle (und zwar in diesem Fall mit Vorzeichenwechsel) vor.

- Wenn das Polynom im Nenner einen niedrigeren Grad hat als das Polynom im Zähler, dann ist die Asymptote das Polynom, das Sie erhalten, wenn Sie den Zähler durch den Nenner dividieren (mehr dazu im nächsten Abschnitt) und den Rest dieser Division weglassen.

BEISPIEL

- Die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ hat die Asymptote $y = 0$.
- Die Funktion $g(x) = \frac{2x + 1}{3x - 4}$ hat die Asymptote $y = \frac{2}{3}$.
- Die Funktion $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ hat die Asymptote $y = x - 1$. (Die Rechnung hierzu finden Sie im nächsten Abschnitt.)

In Abbildung 1.5 können Sie sehen, wie sich die Kurven der Funktionen ihrer jeweiligen Asymptote immer mehr annähern, je weiter sich x von der Null entfernt.

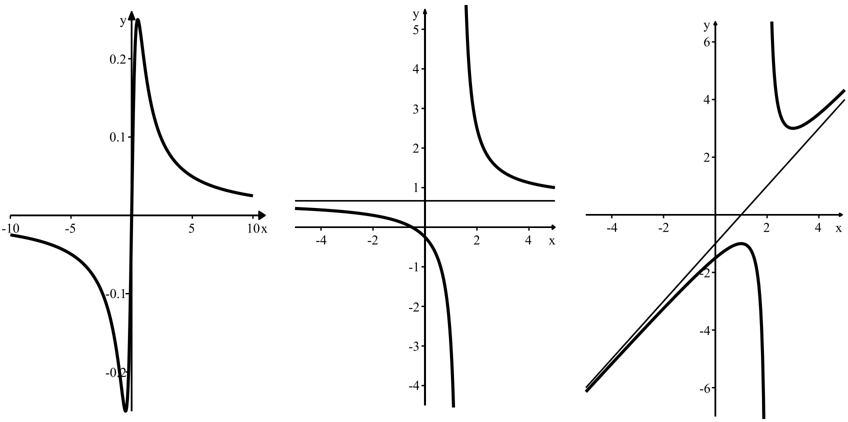

Abbildung 1.5 Die Kurven der Funktionen nähern sich immer mehr ihren Asymptoten an, je weiter x nach rechts oder nach links geht. Links: Für die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ist dies die X-Achse (also die Gerade $y = 0$). Mitte: Für die Funktion $g(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ ist dies die waagerechte Gerade $y = \frac{2}{3}$. Rechts: Für die Funktion $h(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$ ist dies die Gerade $y = x - 1$.

Polynomdivision

Bei der Division eines Polynoms (Dividend) durch ein anderes Polynom (Divisor) arbeiten Sie sich beginnend bei der höchsten Potenz von x Summand für Summand durch den Dividenden hindurch. Sie

- teilen jeweils die höchste Potenz des verbliebenen Dividenden durch die höchste Potenz des Divisors,
- fügen das Resultat zum Rechenergebnis hinzu und
- subtrahieren das entsprechende Vielfache des Divisors vom Dividenden.

Sobald die höchste Potenz des Dividenden kleiner ist als die höchste Potenz des Divisors, beenden Sie die Rechnung und notieren den verbliebenen Dividenden als Rest.

BEISPIEL

Die Division $(x^2 - 3x + 3) : (x - 2)$ liefert im ersten Durchgang das Resultat $x^2 : x = x$. Wenn Sie $x \cdot (x - 2)$ vom Dividenden subtrahieren, verbleibt $-x + 3$. Im zweiten Durchgang dividieren Sie also $-x : x = -1$ und ziehen anschließend vom Dividenden $-1 \cdot (x - 2)$ ab. Jetzt bleibt als Dividend noch 1 übrig, also ein Polynom vom Grad null. Hier gibt es nichts mehr zu dividieren, sodass das Ergebnis wie folgt lautet:

$$(x^2 - 3x + 3) : (x - 2) = x - 1 \text{ Rest } 1 \text{ oder}$$
$$(x^2 - 3x + 3) : (x - 2) = x - 1 + \frac{1}{x - 2}.$$

Den Rechengang schreiben Sie üblicherweise so auf:

$$\begin{array}{rrrl}
(x^2 & -3x & +3) & : (x - 2) = x - 1 \text{ Rest } 1 \\
-x^2 & +2x & & \\ \hline
 & -x & +3 & \\
 & +x & -2 & \\ \hline
 & & 1 &
\end{array}$$

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome, die aus genau einem Summanden bestehen, heißen **Potenzfunktionen**. In Abbildung 1.6 sehen Sie die typischen Verläufe der Funktionskurven für gerade, beziehungsweise ungerade (ab 3) Exponenten.
Die Umkehrungen der Potenzfunktionen heißen **Wurzelfunktionen**. Die Umkehrung von $f(x) = x^n$ wird dabei als $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ geschrieben. Sie sehen in Abbildung 1.6, dass die Potenzfunktionen für ungerade Exponenten überall umkehrbar sind. Für gerade Exponenten werden sie erst umkehrbar, wenn der Definitionsbereich auf die Menge $\mathbb{R}_0^+$ der nichtnegativen Zahlen eingeschränkt wird. In Abbildung 1.7 sehen Sie die typischen Verläufe der Funktionskurven.

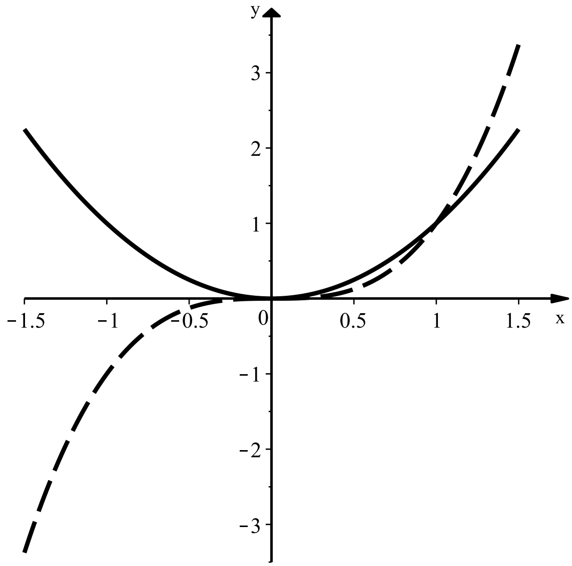

Abbildung 1.6 Die Kurve der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ hat für alle geraden Zahlen n eine Form, die der durchgezogenen Linie entspricht. Für ungerade Zahlen $n \geq 3$ entspricht ihre Form der gestrichelten Linie.

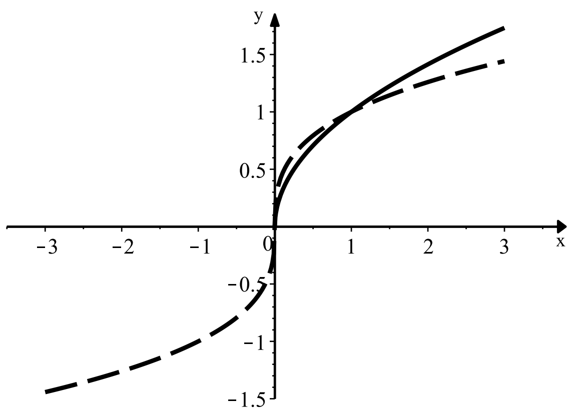

Abbildung 1.7 Für gerade Zahlen n sind die Wurzelfunktionen $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ nur für nichtnegative Werte von x definiert. Ihre Kurven haben dieselbe Form wie die durchgezogene Linie. Für ungerade Zahlen $n \geq 3$ kann man die Wurzelfunktionen auch ins Negative fortsetzen. Ihre Kurven haben dann die Form der gestrichelten Linie.

Tipp

Möglicherweise wird in Ihrem Kurs festgelegt, dass Potenzfunktionen für *alle* Exponenten nur im Bereich $x \geq 0$ umgekehrt werden dürfen. Dies geschieht dann in Hinblick auf die allgemeinere Formulierung $f(x) = x^a$, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$, bei der a nicht unbedingt eine natürliche Zahl sein muss.

Für negative x-Werte entstehen hier Widersprüche, beispielsweise ist dann zwar $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, aber $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2 \neq 2 = (-8)^{\frac{2}{6}}$.

Exponential-, Logarithmus- und Hyperbelfunktionen

Unter Exponentialfunktionen versteht man Funktionen mit einer Zuordnungsvorschrift $f(x) = a^x$. Das ist eine Potenz, bei der eine konstante Zahl die Basis bildet und die Variable im Exponenten auftritt. Die Konstante kann jede Zahl zwischen 0 und 1 und jede Zahl größer als 1 sein. In Abbildung 1.8 sehen Sie die beiden Kurvenverläufe, die hierbei möglich sind.

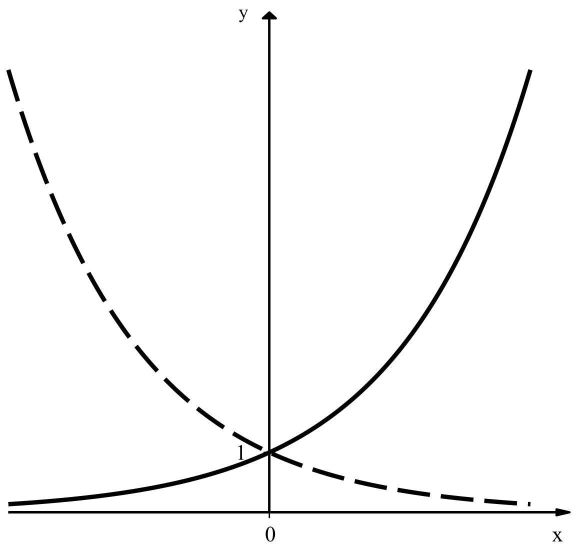

Abbildung 1.8 Alle Kurven von Funktionen $f(x) = a^x$ gehen durch den Punkt (0,1). Alle diese Funktionen sind nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Für $0 < a < 1$ ist die Funktion streng monoton fallend wie die gestrichelte Kurve, und für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend wie die durchgezogene Kurve.

Der „Goldstandard" bei diesem Funktionentyp ist allerdings die Funktion $f(x) = e^x$ mit der Eulerschen Zahl $e = 2,718...$ als Basis. Das liegt zunächst einmal daran, dass sich alle Exponentialfunktionen mühelos in einander umrechnen lassen (ich führe Ihnen das im Tipp weiter unten vor), also sowieso nur eine Exponentialfunktion gebraucht wird. Die Wahl fällt nun gerade auf diese spezielle Exponentialfunktion, weil sie sich selbst als Ableitung hat (der Begriff wird in Kapitel 4 vorgestellt) und sich deshalb von allen Exponentialfunktionen am geschmeidigsten in die Differenzialrechnung einfügt.

Wenn Sie in Abbildung 1.8 die Kurven an der Geraden $y = x$ spiegeln, sehen Sie, dass Exponentialfunktionen umkehrbar sind. Die Umkehrung hat als Definitionsbereich alle positiven reellen Zahlen und nimmt Werte aus dem Bereich der gesamten reellen Zahlen an. Die Umkehrung der Funktion $f(x) = a^x$ heißt **Logarithmus zur Basis** a und wird als $f^{-1}(x) = \log_a x$ geschrieben. Ich beschränke mich auch hier auf einen einzigen Logarithmus, nämlich die Umkehrung von $f(x) = e^x$. Sie trägt den Namen **natürlicher Logarithmus** und besitzt die Schreibweise $f^{-1}(x) = \ln x$. Den Verlauf der Funktionskurve sehen Sie in Abbildung 1.9. (In den Naturwissenschaften ist auch der Logarithmus zur Basis 10 verbreitet. In der Informatik treffen Sie des Öfteren auf den Logarithmus zur Basis 2.)

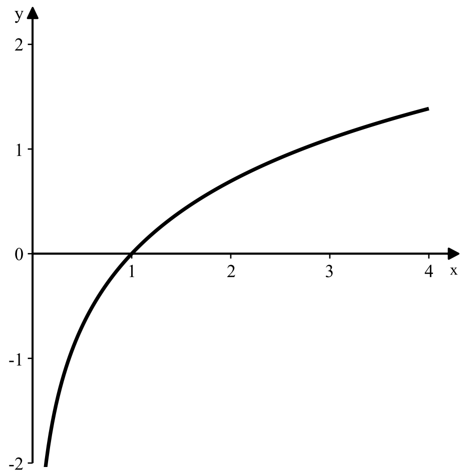

Abbildung 1.9 Die Funktion $f^{-1}(x) = \ln x$ ist die Umkehrung der Funktion $f(x) = e^x$. Sie ist nur für positive Werte von x definiert, streng monoton steigend und nach unten und oben unbeschränkt.

Tipp

Aus den Regeln für das Rechnen mit Potenzen ergeben sich einige häufig benutzte Rechenregeln für die Exponentialfunktion und den Logarithmus:

- $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^b = e^{a \cdot b} = (e^b)^a$
- $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln a^b = b \cdot \ln a$

Beispiele: $e^2 \cdot e^3 = e^5$, $(e^2)^3 = e^6 = (e^3)^2$, $\ln 2 + \ln 7 = \ln 14$, $\ln 1024 = 10 \cdot \ln 2$.

Tipp

Exponentialfunktion und Logarithmus: Kennt man eine(n), kennt man alle
Bei der Zuordnungsvorschrift $f(x) = a^x$ können Sie die Zahl a auch durch die Potenz $e^{\ln a}$ ersetzen (Exponentialfunktion und Logarithmus heben sich gegenseitig auf) und erhalten dann:

$$f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a) \cdot x}$$

Die Menge aller Funktionen $f(x) = e^{\alpha \cdot x}$ mit einer beliebigen reellen Konstante α deckt also alle nur vorstellbaren Exponentialfunktionen ab.

Entsprechend können Sie auch den Logarithmus $\log_a x$ zu einer Basis a stets in den natürlichen Logarithmus umrechnen:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Die Menge aller Funktionen $f(x) = \alpha \cdot \ln x$ mit einer beliebigen reellen Konstante α deckt also alle nur vorstellbaren Logarithmen ab.

Exponentialfunktionen vom Typ $f(x) = e^{\alpha x}$ treten typischerweise bei Wachstums- und Abklingprozessen auf (beispielsweise Wachstum von Bakterienkulturen, radioaktiver Zerfall, Zinseszinsrechnung). Wegen der Beziehung $f(x+1) = e^{\alpha(x+1)} = e^{\alpha x} \cdot e^{\alpha} = e^{\alpha} \cdot f(x)$ verändert sich der Funktionswert auf jedem Intervall der Länge 1 um denselben festen Faktor. α wird als *Wachstumsrate* des Prozesses bezeichnet.

Mit einer **halblogarithmischen Darstellung** der Funktionskurve fällt es leichter, zu erkennen, ob sich bei einem solchen Prozess die Wachstumsrate ändert. Dabei wird die Unterteilung der Y-Achse so geändert, dass jetzt nicht mehr die Werte 1, 2, 3, ... denselben Abstand haben, sondern die Werte 1, 10, 100, ... Die Kurve der Exponentialfunktion $f(x) = e^{\alpha x}$ ist dann eine Gerade mit der Steigung α. Wenn α einen neuen Wert annimmt, bekommt die Kurve einen Knick (Abbildung 1.10)

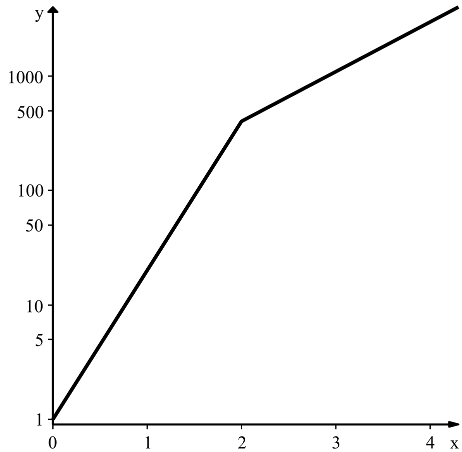

Abbildung 1.10 In halblogarithmischer Darstellung wird die Kurve einer Exponentialfunktion zu einer Geraden. Wenn sich im zeitlichen Verlauf eines Prozesses die Wachstumsrate ändert, zeigt sich dies durch einen Knick im Kurvenverlauf. In diesem Beispiel sinkt an der Stelle x = 2 bei der Funktion $f(x) = e^{\alpha x}$ der bisherige Wert $\alpha = 3$ auf $\alpha = 1$.

Mit dem Namen **Hyperbelfunktionen** werden einige spezielle Exponentialfunktionen bezeichnet, nämlich

- der sinus hyperbolicus $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- der cosinus hyperbolicus $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ sowie
- der tangens hyperbolicus $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Die Verläufe der Funktionskurven sehen Sie in Abbildung 1.11.

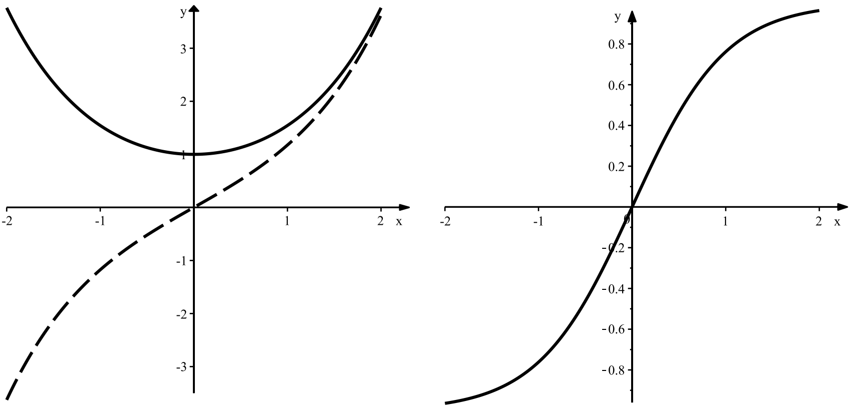

Abbildung 1.11 Der sinus hyperbolicus (links, gestrichelt) ist eine ungerade Funktion, streng monoton steigend und nach unten wie nach oben unbeschränkt. Der cosinus hyperbolicus (links, durchgezogen) ist eine gerade Funktion, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Der tangens hyperbolicus (rechts) ist eine ungerade streng monoton steigende Funktion. Seine Werte sind stets größer als –1 und kleiner als 1.

Schleudergefahr

Der Buchstabe „h" bei den Hyperbelfunktionen gehört zum Namen der Funktion. Es handelt sich nicht um einen Faktor, mit dem x multipliziert wird. Die Ähnlichkeit der Bezeichnung zu den Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktionen ist sprachlich begründet. Das lateinische Wort „Sinus" bedeutet „Bogen". Die Sinusfunktion lässt sich über einen Kreisbogen erklären (Abbildung 1.14) und der sinus hyperbolicus über einen Hyperbelbogen (Abbildung 1.12).

Zwischen dem sinus hyperbolicus und dem cosinus hyperbolicus besteht ein Zusammenhang, der dem Satz des Pythagoras bei trigonometrischen Funktionen (sie folgen im Anschluss) recht ähnlich sieht:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Abbildung 1.12 veranschaulicht diesen Zusammenhang: Jeder Punkt der Hyperbel $y^2 = x^2 - 1$ hat als x-Koordinate den cosinus hyperbolicus eines gewissen Arguments t und als y-Koordinate den sinus hyperbolicus *desselben* Arguments t.

Die Umkehrungen der Hyperbelfunktionen heißen **Areafunktionen**. Sie werden eigentlich durch ein vorangestelltes „ar" gekennzeichnet. Auf manchen Taschenrechnern und auch bei manchen Softwaresystemen wird aber wie

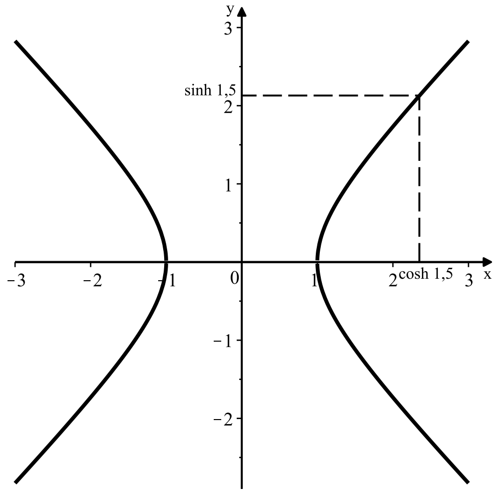

Abbildung 1.12 Wenn Sie für eine reelle Zahl t auf der positiven X-Achse den Wert cosh t abtragen, dann hat die y-Koordinate des entsprechenden Hyperbelpunktes den Wert sinh t. Für $t > 0$ gehen Sie dabei nach oben, für $t < 0$ gehen Sie nach unten.

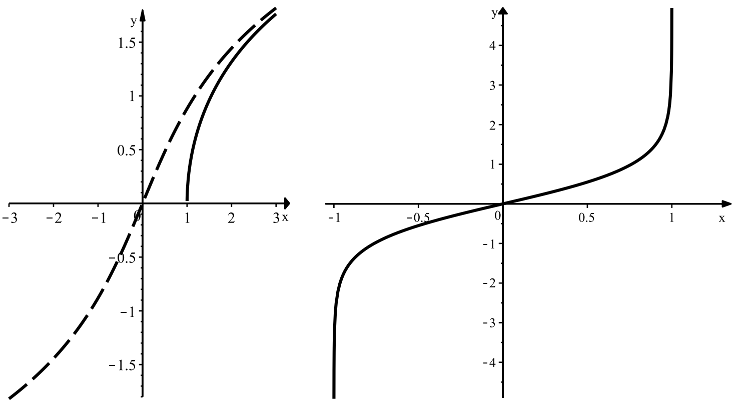

Abbildung 1.13 Der area sinus hyperbolicus (links, gestrichelt) ist eine ungerade Funktion, streng monoton steigend sowie nach oben und unten unbeschränkt. Der area cosinus hyperbolicus (links durchgezogen) ist für $x \geq 1$ definiert, streng monoton steigend und nach oben unbeschränkt. Der area tangens hyperbolicus (rechts) ist für $-1 < x < 1$ definiert, ungerade, streng monoton steigend sowie nach oben und unten unbeschränkt.

bei den Arcusfunktionen (siehe unten) die Buchstabenkombination „arc“ verwendet.
Areafunktionen sind im Grunde spezielle Logarithmusfunktionen:

- $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
- $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
- $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \cdot (\ln(1+x) - \ln(1-x))$

Trigonometrische Funktionen

Die *Winkelfunktionen* (Sinus, Cosinus, ...) und ihre Umkehrungen, die *Arcusfunktionen* werden unter dem Begriff *trigonometrische Funktionen* zusammengefasst.
Die Begriffe Sinus, Cosinus und Tangens sind Ihnen sicherlich in der Schule schon einmal begegnet. Allerdings ging es dort zunächst einmal um Dreiecksberechnungen, und damit um einen eingeschränkten Bereich von Winkeln. In der Analysis stehen die Begriffe aber für Funktionen, in die beliebig große positive oder negative reelle Zahlen eingesetzt werden dürfen. Deshalb präsentiere ich Ihnen als Erstes eine neue Definition, die auch für Argumente gilt, die keine Dreieckswinkel sind.
Abbildung 1.14 zeigt das vermutlich anschaulicher, als Worte es je könnten: Ein Strahl aus dem Koordinatenursprung, der mit der positiven X-Achse den Winkel α bildet, schneidet den Kreis um den Ursprung mit Radius 1. Die x-Koordinate des Schnittpunkts heißt dann $\cos \alpha$, und die y-Koordinate heißt $\sin \alpha$. An dem Punkt, an dem der Strahl oder seine Fortsetzung anschließend die senkrechte Tangente des Kreises schneidet, bekommt die y-Koordinate den Namen $\tan \alpha$. Der Winkel α wird stets im Gegenuhrzeigersinn gemessen. Ein Winkel im Uhrzeigersinn bekommt deshalb ein negatives Vorzeichen.
Abbildung 1.14 macht klar, dass der Sinus und der Cosinus immer definiert sind, auch dann, wenn der Winkel so groß ist, dass der Strahl mehrmals um den Ursprung rotiert, wenn also α niemals als Winkel in einem Dreieck auftauchen könnte. Der Tangens ist nur dann nicht definiert, wenn der Strahl genau senkrecht nach oben oder nach unten weist.

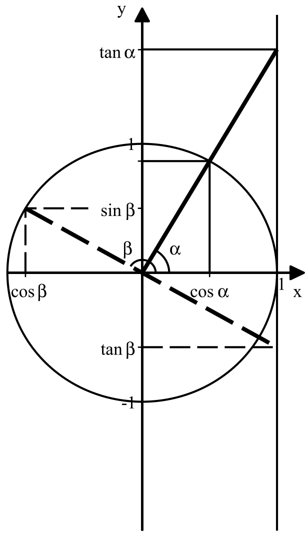

Abbildung 1.14 Die Definition der trigonometrischen Funktionen durch einen Kreis mit Radius 1. Der Winkel α liegt im 1. Quadranten, deshalb sind sein Sinus, sein Cosinus und sein Tangens sämtlich positiv. Der Winkel β liegt im 2. Quadranten. Deshalb ist sein Sinus positiv, während sein Cosinus und sein Tangens negativ sind.

So, und jetzt müssen Sie einmal ganz tapfer sein: In der Analysis werden Winkel standardmäßig im *Bogenmaß* angegeben. Dabei handelt es sich um eine unbenannte Zahl, die von 0 bis 2π anwächst, wenn α einen vollen Kreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Sie berechnen diese Zahl, indem Sie die Gradangabe eines Winkels durch 180° teilen und mit π multiplizieren. In Tabelle 1.1 finden Sie Beispiele für Entsprechungen zwischen Gradmaß und Bogenmaß. Auf die Dauer ist es aber einfacher, wenn Sie Ihren Taschenrechner auf das Bogenmaß umstellen und ihre komplette Rechnung damit durchführen.

im Gradmaß	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**150°**	**270°**
im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

Tabelle 1.1 Beispiele für Entsprechungen im Gradmaß und im Bogenmaß

Wenn Sie erst einmal den Schritt gegangen sind, die Argumente der Sinus- und der Cosinusfunktion als gewöhnliche reelle Zahlen und nicht unbedingt als geometrische Objekte anzusehen, sind Sie auch nicht mehr auf den Kreis in Abbildung 1.14 angewiesen, sondern können den Definitionsbereich wie bei anderen Funktionen auch auf die X-Achse und den Wertebereich auf die Y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems legen. Als Funktionskurven ergeben sich identisch geformte, aber gegeneinander verschobene Schwingungen (Abbildung 1.15). Die Schwingungen sind 2π-periodisch. Das bedeutet: Wenn Sie die Funktionskurve um 2π nach rechts oder links verschieben, sieht sie genauso aus, wie vor der Verschiebung.

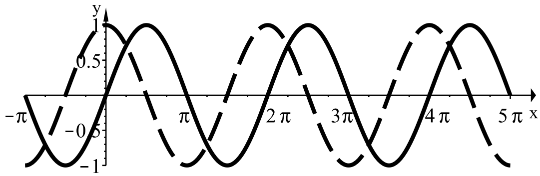

Abbildung 1.15 Die Kurven der Sinusfunktion (durchgezogen) und der Cosinusfunktion (gestrichelt) im X-Y-Koordinatensystem. Die Kurven haben identische Gestalt, die Cosinuskurve ist gegenüber der Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben. Die Funktionen sind periodisch mit der Periodenlänge 2π.

Im X-Y-Koordinatensystem erhalten Sie für den Tangens eine π-periodische Kurve, die bei allen ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel hat und dazwischen streng monoton steigt (Abbildung 1.16).

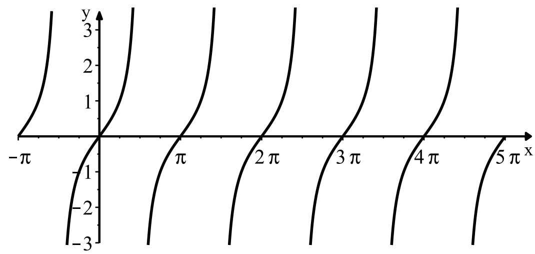

Abbildung 1.16 Die Tangensfunktion ist ungerade, streng monoton steigend, nach oben und unten unbeschränkt und periodisch mit Periodenlänge π. Wenn x ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, hat die Tangensfunktion eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel und ist deshalb dort nicht definiert.

Was Sie über die Winkelfunktionen unbedingt wissen müssen:

- Häufig vorkommende Sinus- und Cosinuswerte können Sie sich in der folgenden Darstellung bestimmt gut merken:

x	0°	30°	45°	60°	90°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$

- Der Satz des Pythagoras ist die Grundlage für viele Formeln bei trigonometrischen Funktionen und trägt oft zur Vereinfachung von Gleichungen bei:
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Die Additionstheoreme geben an, wie sich die Addition und Subtraktion von Winkeln auf den Sinus und den Cosinus des entstehenden Winkels auswirken:
  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$,
  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- Als allgemeine Sinusfunktion wird eine Funktion bezeichnet, bei der die Sinuskurve durch vier Stellgrößen verformt wird. Sie hat die Zuordnungsvorschrift $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$. a, b, c, d sind Konstanten mit folgender Wirkung:
  - Die *Amplitude a* sorgt für einen Abstand von 2a zwischen dem Maximalwert und dem Minimalwert der Kurve.
  - Die *Winkelgeschwindigkeit b* macht die Kurve $\frac{2\pi}{b}$-periodisch.
  - Die *Phasenverschiebung c* verschiebt die Kurve um c nach links.
  - Der *Offset d* verschiebt die Kurve um d nach oben.

  In Abbildung 1.17 können Sie ein Beispiel mit der Funktion $\sin x$ vergleichen.
- Zwischen dem Tangens und den beiden anderen Winkelfunktionen besteht die Beziehung $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

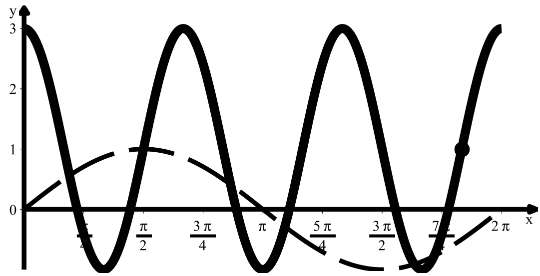

Abbildung 1.17 Die Kurve der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$ (durchgezogen) hat gegenüber der Kurve der Sinusfunktion (gestrichelt) einen doppelt so großen Abstand zwischen dem maximalen und dem minimalen Funktionswert; im Intervall $[0, 2\pi]$ durchläuft sie drei Perioden; der Punkt, an dem sie ihren mittleren Funktionswert durchläuft (ein Beispiel dafür ist markiert), ist jedesmal um $\frac{\pi}{6}$ nach links und um 1 nach oben verschoben.

Tipp

Es gibt noch eine vierte Winkelfunktion, den **Cotangens**. Er ist der Kehrwert des Tangens. Mit Ihrem Taschenrechner berechnen Sie den Wert cot x, indem Sie ihn zunächst tan x ausrechnen lassen und dann die „1/x"-Taste drücken. Der Cotangens ist nicht definiert, wenn der Tangens den Wert null hat. Dort, wo der Tangens nicht definiert ist, hat der Cotangens den Wert null. Mit den anderen beiden Winkelfunktionen steht er in der Beziehung $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Die Umkehrungen der Winkelfunktionen werden als Arcusfunktionen bezeichnet. Die Winkelfunktionen müssen dabei zunächst auf einen Teil des Definitionsbereichs begrenzt werden, bevor eine Umkehrung sinnvoll definiert ist. Dieser eingeschränkte Definitionsbereich ist dann der Wertebereich der Arcusfunktion.
Das bedeutet schließlich:

- Die Funktion arcsin x hat den Definitionsbereich $[-1, 1]$ und liefert Werte aus dem Bereich $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Die Funktion arccos x hat den Definitionsbereich $[-1, 1]$ und liefert Werte aus dem Bereich $[0, \pi]$.
- Die Funktion arctan x ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und liefert Werte aus dem Bereich $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Abbildung 1.18 zeigt, wie die Funktionskurven verlaufen.

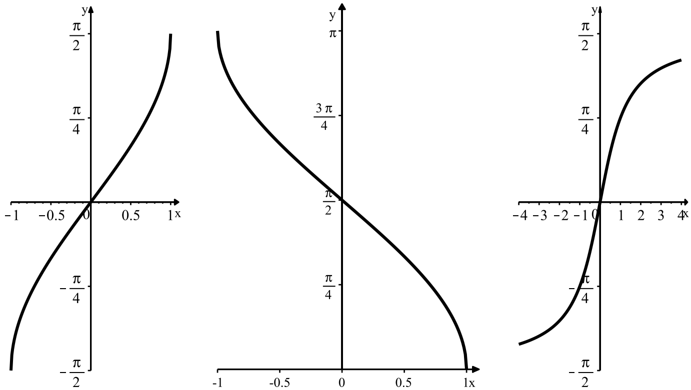

Abbildung 1.18 Die Arcussinusfunktion (links), Arcuscosinusfunktion (Mitte) und die Arcustangensfunktion (rechts) können erst definiert werden, wenn die Sinus-, die Cosinus- und die Tangensfunktion auf geeignete Teilbereiche eingeschränkt werden. Deshalb können sie nur Werte aus bestimmten Intervallen annehmen. Die Arcussinusfunktion und die Arcuscosinusfunktion sind auch nur für x-Werte zwischen –1 und 1 (jeweils einschließlich) definiert.

Schleudergefahr

Nur wenn Sie den beschränkten Winkelbereich beachten, kehrt die Arcusfunktion die entsprechende Winkelfunktion um. Wenn Sie beispielsweise in Ihren Taschenrechner den Winkel $\frac{\pi}{6}$ eingeben (oder, wenn das noch ungewohnt sein sollte, 30°) und die Sinustaste drücken erhalten Sie als Ergebnis $\frac{1}{2}$ oder 0,5. Drücken Sie nun die Arcussinustaste (oder -tastenkombination), wird wieder $\frac{\pi}{6}$ oder 30° angezeigt. So weit, so gut. Beginnen Sie aber mit dem Winkel $\frac{5\pi}{6}$ oder 150° und wenden Sie wieder erst den Sinus und dann den Arcussinus an, landen Sie keineswegs bei Ihrem Ausgangswinkel, sondern die Anzeige des Taschenrechners lautet wiederum $\frac{\pi}{6}$ oder 30°. Von allen Winkeln, deren Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist, liegt nur dieser im Wertebereich der Arcussinusfunktion.

Tipp

Warum nur dieses Bogenmaß?

Diesen Stoßseufzer kenne ich nur zu gut. Die Antwort ist im Grunde einfach: Mit Winkelangaben im Bogenmaß fügen sich die trigonometrischen Funktionen reibungslos in die Welt der anderen Funktionen ein. Sie tauchen nämlich auch immer wieder in Situationen auf, die überhaupt nichts mit Winkeln oder Dreiecken zu tun haben. Beispielsweise erfahren Sie in Kapitel 8, was $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ bedeutet und dass arctan x der zentrale Teil des Ergebnisses dieser Rechnung ist. Sollten Sie sich einmal (außerhalb dieses Schnellkurses) mit Differenzialgleichungen beschäftigen, wird Ihnen bestimmt die Gleichung $y'' + y = 0$ begegnen, und Sie werden mit Sinus und Cosinus hantieren, um sie zu lösen.

Aber das alles hört sich doch ein wenig abstrakt an, und deshalb habe ich hier noch etwas ganz Anschauliches für Sie: In Abbildung 1.19 sehen Sie einen Kreis mit Radius 1, der auf einer waagerechten Linie rollt. Wie weit bewegt sich der Mittelpunkt des Kreises (oder, was zur selben Antwort führt, der Berührpunkt des Kreises auf der Unterlage) nach rechts, wenn der Kreis um den Winkel α gedreht wird? Die einfachste mögliche Antwort erhalten Sie, wenn Sie im Bogenmaß rechnen: Eine Drehung um den Winkel α bewirkt eine Seitwärtsbewegung ebenfalls um α. Sie werden zugeben: Simpler kann eine Umrechnungsformel nicht ausfallen.

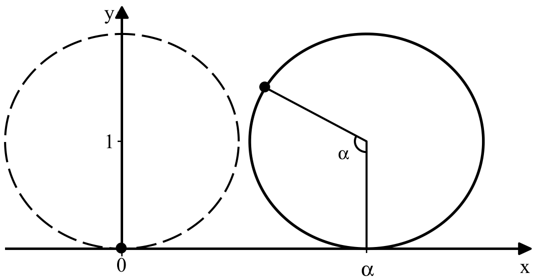

Abbildung 1.19 Wenn ein Kreis mit dem Radius 1 auf einer waagerechten Unterlage rollt und sich dabei um den Winkel α dreht, dann hat der Weg, den er auf der Unterlage zurücklegt, ebenfalls die Länge α – jedenfalls, wenn man im Bogenmaß rechnet!

Betragsfunktion und Gaußklammerfunktion

Zum Abschluss dieses Kapitels stelle ich Ihnen noch zwei Funktionen vor, die auf den ersten Blick ziemlich exotisch wirken mögen. Die Gedanken, die hinter ihrer Definition stehen, wenden wir im Alltag aber ganz selbstverständlich an.

Die Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl wird dadurch ausgedrückt, dass die Zahl in zwei senkrechte Striche eingeschlossen wird. Sie berechnen ihn, indem Sie bei der Zahl das Vorzeichen auf „plus" setzen. Das lässt sich natürlich auch noch ein wenig präziser formulieren:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

BEISPIEL

1. $|7| = 7,\ |-5| = -(-5) = 5$
2. Eine Billardkugel rollt mit der Geschwindigkeit $1\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ senkrecht auf die Bande zu. Zum Zeitpunkt $t = -10$ s ist sie 10 cm von der Bande entfernt. Wie groß ist ihr Abstand von der Bande zu einem späteren Zeitpunkt $t > -10$ s? Antwort: Zum Zeitpunkt t s beträgt ihr Abstand von der Bande stets $|t|$ cm. (Abbildung 1.20 links)

Die Kurve der Betragsfunktion hat die Form des Buchstabens V (Abbildung 1.20 links). Wenn Sie sie durch Verkettung auf eine andere Funktion anwenden, werden bei der Kurve der anderen Funktion alle Teile, die unterhalb der X-Achse verlaufen, nach oben geklappt (Abbildung 1.20 rechts).
Die Betragsfunktion gibt den Abstand einer Zahl zur Null an. Der Betrag $|a - b|$ gibt den Abstand zwischen den Zahlen a und b an. Dieser Zusammenhang gilt auch in komplizierteren Zahlenbereichen wie den komplexen Zahlen oder Vektorkoordinaten.

Mit der Betragsfunktion können Sie das Wurzelziehen korrekt aufschreiben. Aus einer Gleichung $a^2 = b$ folgt nämlich keineswegs $a = \sqrt{b}$, sondern $|a| = \sqrt{b}$. Sie können das gerne einmal mit $a = -2$ und $b = 4$ ausprobieren. Diesen Zusammenhang kann man auch als alternative Definition der Betragsfunktion verwenden:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

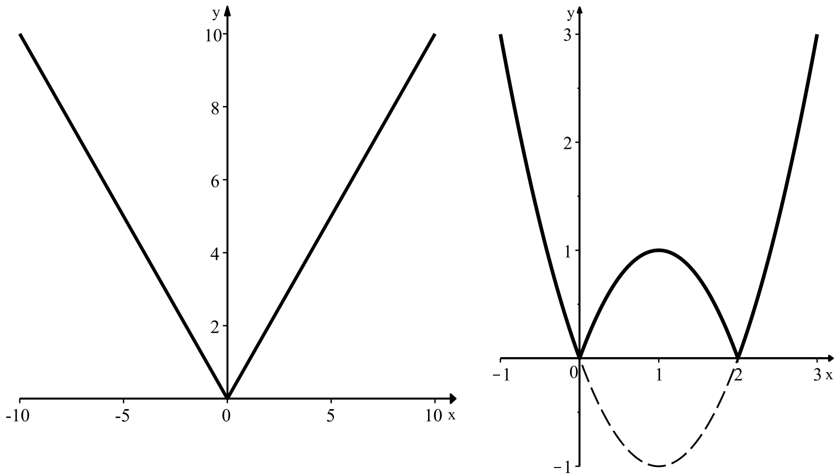

Abbildung 1.20 Die Kurve der Betragsfunktion (links) hat die Form des Buchstabens V. Die Verkettung einer anderen Funktion f(x) mit der Betragsfunktion zu einer neuen Funktion |f(x)| bewirkt, dass bei der Kurve von f(x) alle Abschnitte unterhalb der X-Achse nach oben geklappt werden (rechts).

Die Gaußklammerfunktion

Die **Gaußklammerfunktion** *rundet* jede Zahl auf die nächstgelegene ganze Zahl *ab*. Ihr Symbol ist ein Paar eckige Klammern. Die **obere Gaußklammerfunktion** *rundet* jede Zahl auf die nächstgelegene ganze Zahl *auf*. Ihr Symbol ist ein Paar eckige Klammern, denen der untere Querstrich fehlt.

BEISPIEL

1. $\lfloor 2,9 \rfloor = 2, \ \lceil 2,9 \rceil = 3$
2. $\lfloor -1,7 \rfloor = -2, \ \lceil -1,7 \rceil = -1$
3. $\lfloor 5 \rfloor = \lceil 5 \rceil = 5$ (ganze Zahlen ändern sich durch die Gaußklammern also nicht)

Die Kurven der beiden Funktionen sehen Sie in Abbildung 1.21.

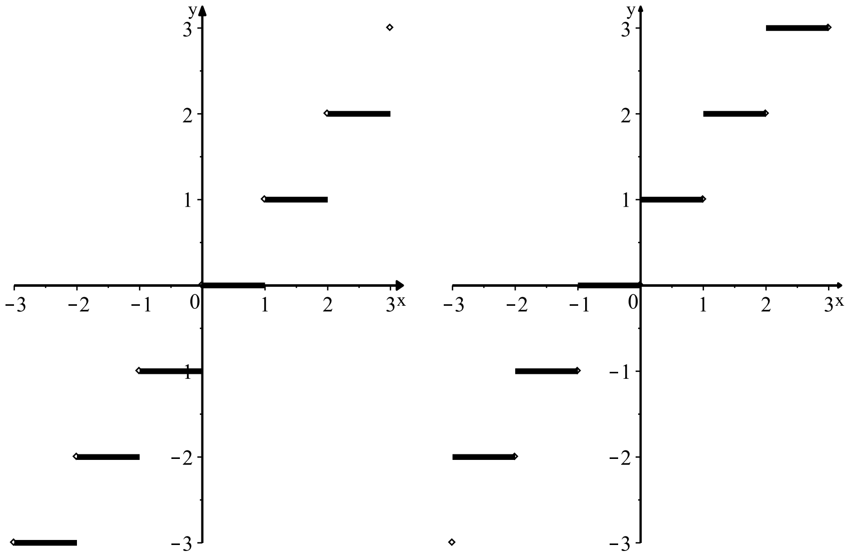

Abbildung 1.21 Die (untere) Gaußklammerfunktion (links) und die obere Gaußklammerfunktion (rechts). Für ganzzahlige x-Werte stimmen ihre Funktionswerte überein, ansonsten ist der Wert der oberen Gaußklammerfunktion immer um 1 höher als derjenige der (unteren) Gaußklammerfunktion.

Mit Gaußklammerfunktionen können Sie Vorgänge beschreiben, die in Sprüngen ablaufen (zum Beispiel in Übungsaufgabe 6).

Runden mit der Gaußklammerfunktion

Die Funktion $f(x) = \frac{[100 \cdot x + 0,5]}{100}$ rundet die Zahl x auf zwei Stellen nach dem Komma – zum Beispiel:

- $f(1,234) = \frac{[123,4 + 0,5]}{100} = \frac{[123,9]}{100} = \frac{123}{100} = 1,23$
- $f(2,7654) = \frac{[276,54 + 0,5]}{100} = \frac{[277,04]}{100} = \frac{277}{100} = 2,77$

Wenn Sie auf eine andere Zahl von Nachkommastellen runden wollen, müssen Sie einfach nur die Zahl 100 durch eine andere Zehnerpotenz ersetzen.

Tipp

Im englischsprachigen Bereich sind für die beiden Gaußklammerfunktionen die Bezeichnungen *floor* und *ceiling* gebräuchlich. An Stelle von $[x]$ wird dort meist $\lfloor x \rfloor$ geschrieben.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Zeichnen Sie die Kurve der Funktion $f(x) = x - |x|$ und geben Sie möglichst große Intervalle aus dem Definitionsbereich und dem Wertebereich an, auf denen die Funktion umkehrbar ist.

Aufgabe 2

Das Polynom $p(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$ hat Nullstellen bei $x = -2$ und bei $x = 3$. Schreiben Sie $p(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 3

Die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^5 - 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 8x + 4}$ hat den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1, 2\}$. Welche Definitionslücke ist eine Polstelle, und welche ist eine hebbare Lücke? Geben Sie bei einer Polstelle an, ob sie einen Vorzeichenwechsel mit sich bringt. Geben Sie bei einer hebbaren Lücke den ergänzbaren Funktionswert an.

Aufgabe 4

Fassen Sie den Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot (\ln a - \ln b)$ so weit wie möglich zusammen.

Aufgabe 5

Vereinfachen Sie den Ausdruck $\cos 2x + 2 \sin^2 x$.

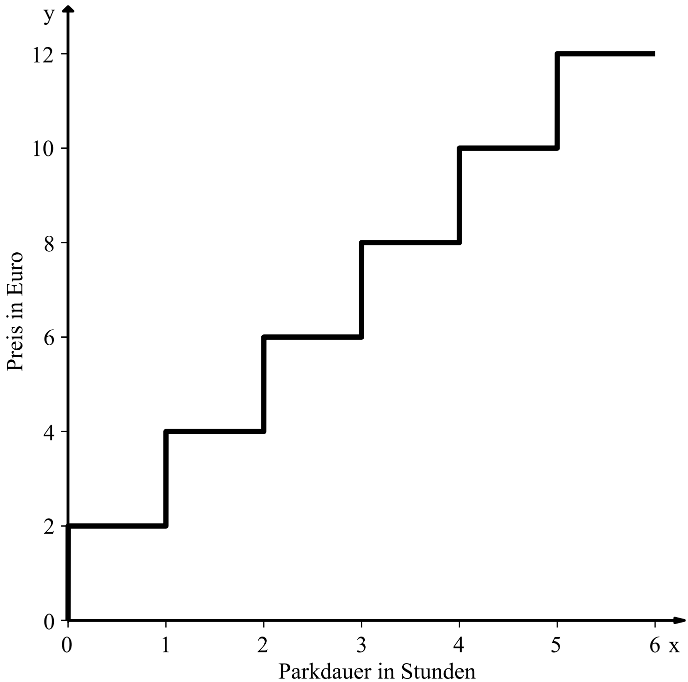

Abbildung 1.22 Zu Aufgabe 6: Das Parken im Parkhaus kostet pro angefangener Stunde 2 Euro. (Die senkrechten Linien sind streng genommen inkorrekt, da sie für den betreffenden Zeitpunkt jeden Euro-Betrag, bei dem sie vorbeikommen, als möglichen Preis signalisieren. Aber da diese Stufendarstellung so schön anschaulich ist, habe ich mich hier einmal über die Regeln hinweggesetzt.)

Aufgabe 6

Ein Abstellplatz im Parkhaus kostet 2 Euro pro angefangener Stunde. Geben Sie eine Funktion $f(t)$ an, die für eine Parkdauer von t Stunden den Preis berechnet. (Abbildung 1.22)

AUF EINEN BLICK

- Eine *Funktion* ordnet jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zu. Um die Funktion *umkehrbar* zu machen, müssen in der Regel zunächst der Wertebereich und der Definitionsbereich gezielt verkleinert werden.
- *Polynome* lassen sich stets als Produkt aus linearen und quadratischen Faktoren schreiben. Lineare Faktoren weisen dabei auf Nullstellen des Polynoms hin.
- Bei *gebrochen rationalen Funktionen* weist jede Nullstelle des Nenners auf eine hebbare Lücke oder auf eine Polstelle hin. Je weiter sich x von null entfernt, desto mehr nähert sich $f(x)$ der Asymptote der Funktion an. Sie lässt sich dadurch berechnen, dass bei der Polynomdivision der Rest weggelassen wird.
- Alle *Exponentialfunktionen* und ihre Umkehrungen, die *Logarithmusfunktionen* können durch die Exponentialfunktion e^x und den natürlichen Logarithmus ln x ausgedrückt werden.
- Die *trigonometrischen Funktionen* werden durch geometrische Überlegungen an einem Kreis definiert. Wenn ihr Argument im Bogenmaß angegeben wird, passen sie nahtlos in die Welt der anderen Funktionen hinein. Umkehrbar sind sie nur für Argumente zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ (Sinus und Tangens), beziehungsweise zwischen 0 und π (Cosinus und Cotangens).