

Symétries, brisures de symétries et complexité

en mathématiques, physique et biologie

Luciano Boi
(éd.)



Peter Lang

Philosophia Naturalis et Geometricalis
Collection dirigée par Luciano Boi



Préface

Géométrie, dynamique et auto-organisation dans la nature et le vivant

Cet ouvrage aborde des questions fondamentales qui se rattachent directement à un ensemble d'idées et de méthodes développées depuis quelques décennies dans les sciences de la nature et du vivant, ainsi qu'à l'interface entre les deux. Les auteurs y ayant contribué proposent de nouvelles approches interdisciplinaires pour étudier plusieurs aspects théoriques, empiriques et épistémologiques relatifs à des problèmes scientifiques fondamentaux pour lesquels on ne dispose pas à l'heure actuelle d'explication satisfaisante, et dont la signification est loin d'avoir été pleinement comprise. Ces questions et ces problèmes concernent notamment le statut des théories des systèmes dynamiques, des bifurcations et du chaos, la signification des symétries et des brisures de symétries dans la nature et le monde du vivant, les propriétés de la stabilité des structures, ainsi que la nature des processus sous-jacents à l'émergence des formes et à l'apparition de comportements collectifs complexes.

Dans ce livre, on cherche à conjuguer le point de vue «platonicien» d'un investissement des formes mathématiques abstraites dans la genèse des formes naturelles, avec la conception aristotélicienne d'une nature en elle-même dynamique et dotée d'un pouvoir d'auto-organisation. Une telle perspective suggère l'existence d'un lien profond entre la nature «nécessaire» et déterminée des structures et formes mathématiques constitutives et le caractère en quelque sorte aléatoire et «contingent» de bon nombre de phénomènes naturels. D'un côté, on remarque qu'une même structure formelle de type mathématique peut agir sur plusieurs substrats matériels à la fois, en générant ainsi une diversification de leurs effets morphologiques et phénoménologiques. De l'autre, on note que la variété des événements qui se produisent dans la nature est souvent à l'origine de changements quantitatifs et qualitatifs dans les phénomènes observés, ainsi que de l'émergence de nouvelles structures qui évoluent dans un espace et dans un temps qui sont eux-mêmes des «objets» dynamiques. Tout cela peut se résumer en

disant qu'il existe de nombreux processus naturels caractérisés par une géométrie fine et une dynamique complexe, ainsi que par leur capacité à s'auto-organiser et à engendrer des formes aux propriétés et aux fonctions souvent imprédictibles et inattendues.

Une idée centrale semble se dégager de ce livre, qui est que les phénomènes peuvent être appréhendés en tant qu'ils se produisent dans l'espace. Une pensée géométrique renouvelée, et une philosophie naturelle conséquente, se doivent d'essayer de décrire et d'expliquer tout phénomène comme se constituant et s'organisant dans l'espace; plus précisément, dans un certain espace. Ce peut être l'espace euclidien à trois dimensions, ou l'espace-temps continu de la relativité générale, ou l'espace discret des opérateurs en mécanique quantique, ou encore l'espace substrat des activités biochimiques et métaboliques de la cellule. Dans chacun de ces exemples, la géométrie pertinente se dégage de l'espace lui-même, de sa structure, de ses propriétés dynamiques. Il y a donc co-existence, interdépendance entre la géométrie de l'espace et les phénomènes qui se déroulent en lui.

On pourrait alors se demander que sont tous ces divers espaces, et les différentes géométries qui peuvent servir à caractériser chacun d'entre eux? L'espace substrat de la cellule, par exemple, est-il distinct de l'espace usuel dans lequel nous vivons? La réponse doit prendre en compte la possibilité que l'espace caractéristique des activités biochimiques et métaboliques d'un organisme vivant possède effectivement des propriétés différentes de l'espace euclidien. Cela peut s'avérer d'autant plus vrai lorsqu'on passe à d'autres échelles, et que l'on considère notamment les phénomènes quantiques, ou les propriétés globales de l'univers. Il est clair ainsi que l'espace du vivant est déterminé par l'ensemble de ses activités biochimiques, métaboliques et physiologiques, et impossible à isoler de celles-ci, tout comme l'espace de la relativité générale est inséparable des propriétés de la matière qu'y est contenue. Comme on sait, dans les équations d'Einstein, le membre (à gauche) exprimant le tenseur de courbure et le membre (à droite) exprimant le tenseur d'énergie ne peuvent être considérés indépendamment l'un de l'autre. Il est donc essentiel d'admettre qu'il y a plusieurs espaces et, bien sûr, plusieurs géométries. Dans l'espace tridimensionnel qui est celui de nos actions et perceptions ordinaires, il y a comme un emboîtement (ou une stratification) d'espaces plus précis et spécialisés, dont l'espace moléculaire, l'espace cellulaire, les différents espaces physiologiques, l'espace quantique, et d'autres encore. L'univers présente une pluralité d'espaces, qui ne sont pas nécessairement isomorphes à l'espace euclidien.

Il convient d'ajouter quelques remarques sur ce sujet, car il constitue l'un des thèmes centraux de plusieurs études remarquables présentées ici. En fait, il se pourrait qu'à la même échelle, l'espace soit régi par des structures géométriques différentes suivant le niveau d'organisation des phénomènes auquel on se place. Il existe donc un lien important, qui reste encore en grande partie à explorer, entre le niveau d'organisation des phénomènes et les structures spatiales et temporelles qui en résultent. Il suffit de penser à l'exemple des transitions de phase, phénomène fondamental aussi bien dans le monde quantique que dans notre réalité macroscopique. Considérons le cas (apparemment) simple et (relativement) bien connu de l'eau. Elle peut passer par deux changements de phase. Au-dessus de la température critique de 99,5 degrés centigrades, elle se transforme en vapeur, alors qu'au-dessous de la valeur critique de 0 degré, elle se solidifie en glace. Or ces transitions brutales dans l'état de l'eau (ou de tout autre liquide) se produisent à la même échelle de grandeur, celui de la structure supramoléculaire de la matière. En revanche, la transition qui transforme un état de la matière dans un autre fait apparaître de nouvelles structures spatiales et de nouvelles propriétés dynamiques.

Ainsi quand on dit qu'un corps a changé d'état, on doit essentiellement entendre que c'est la nature des symétries spatiales qui a changé, car le comportement physique du système dépend essentiellement de la manière dont il s'organise dans l'espace. C'est cette capacité de donner naissance à des morphologies tout aussi étonnantes que significatives, et souvent visible sous la forme d'un motif géométrique précis, qui caractérise ce mouvement de structuration interne de l'espace. Mentionnons le cas très significatif des quasi-cristaux. Ils présentent une symétrie pentagonale (qui était pendant très longtemps jugée impossible): ils ne sont ni uniformément ordonnés comme les cristaux (en d'autres termes, ils sont non-périodiques), ni amorphes comme les verres. En effet, la transition de phase qui se produit en $T = T_c$ correspond à un état où la symétrie initiale a été brisée. Beaucoup de systèmes que l'on considère avant qu'ils ne subissent une transition de phase sont des objets d'extension *finie* (par exemple, des sous-groupes du groupe O_3 – correspondant aux symétries d'une sphère – ou du groupe O_2 – l'équivalent des symétries d'un cercle), leurs groupes de symétries ne pouvant pas contenir des translations, notamment.

Le point essentiel, donc, est qu'à la même échelle macroscopique de systèmes apparemment aussi simples qu'une couche de fluide, un mélange chimique ou un alliage métallique peuvent s'auto-organiser selon des modes

différents, chacun desquels fait apparaître une grande variété de structures spatiales et de trajectoires temporelles complexes. L'idée fondamentale, ici, est la suivante: des modèles mathématiques simples, descriptibles par des équations différentielles de premier ordre, peuvent exhiber un spectre très large de comportements dynamiques complexes comme des bifurcations suivies par des brisures de symétries, des attracteurs étranges, et des fluctuations chaotiques. (Remarquons que, dans certains cas, comme celui de la réaction chimique de Belousov-Zabotinsky, ces attracteurs peuvent présenter une apparence très compliquée, par exemple, en forme torique).

L'auto-organisation de beaucoup de systèmes naturels et vivants consiste alors en l'émergence spontanée de structures spatiales, de dynamiques complexes et de comportements collectifs nouveaux qui ne résultent pas d'un programme codé par un algorithme, c'est-à-dire comme une suite d'instructions (ou d'itérations) menant à un résultat prédéterminé. L'auto-organisation résulte bien plutôt de l'évolution spontanée de systèmes très divers sous l'effet de transformations géométriques et/ou topologiques et de la variation (dans le temps) d'au moins un paramètre physique fondamental au-delà ou en deçà d'une certaine valeur critique. Cela a très souvent comme conséquence d'éloigner le système hors de l'équilibre thermodynamique et d'en accroître son entropie temporelle. Le fait qu'une goutte d'eau en apesanteur prenne une forme sphérique est l'exemple plus simple d'auto-organisation. La disposition des feuilles sur une branche, ou celle des pétales sur une fleur lors de la croissance, sont d'autres exemples de processus d'auto-organisation spontanée en spirale. Il s'agit là des phénomènes possédant un certain caractère d'universalité, et qui illustrent bien la corrélation profonde entre les propriétés géométriques et les processus dynamiques dans de très nombreux systèmes naturels.

Ajoutons encore une remarque épistémologique à propos du sens que l'on doit attribuer au concept d'auto-organisation, proposé notamment par la théorie des structures dissipatives de Prigogine. L'une des idées fondamentales de cette théorie est que les organismes vivants fonctionnent comme des structures dissipatives qui se forment à partir de flux d'énergie. Ces structures dissipatives ont la capacité de s'auto-organiser en réponse aux fluctuations chaotiques de l'environnement. Une implication importante en découle: l'auto-organisation est beaucoup plus qu'un processus au cours duquel des structures globales émergent uniquement à partir des très nombreuses interactions entre les composants élémentaires du système. De se référer aux seules règles spécifiant les interactions locales entre les compo-

sants du système, c'est-à-dire donc à l'information locale, sans prendre en compte les processus globaux eux-mêmes, ne saurait pas expliquer comment et pourquoi de nouvelles structures et propriétés d'un système comme un «tout» sont créées à partir uniquement d'interactions élémentaires et d'une information locale.

Si l'on considère brièvement le cas de la biologie, il est désormais clair, par exemple, que tout comme la complexité d'un organisme n'est pas directement proportionnelle au nombre de gènes qu'il possède, la forme des cellules ne provient pas seulement d'interactions strictes et statiques entre les molécules qui la constituent; en réalité, la plupart des formes des organelles et des cellules émergent bien plutôt d'interactions hautement dynamiques entre un grand nombre de composants cellulaires. Il faut notamment que la transcription des gènes qui codent pour toutes les molécules impliquées dans l'émergence des structures ayant des fonctions extrêmement précises, soit réglée et en quelque sorte adaptée à l'état physiologique global d'une cellule à chaque instant. Il semble que, chez les organismes complexes comme les mammifères, la régulation de la transcription fasse intervenir l'état dynamique des chromosomes ainsi que leur organisation spatiale dans le noyau. En d'autres termes, un état transcriptionnel donné dépend de l'ensemble de la physiologie de la cellule, de son comportement dynamique et de son organisation topologique, et donc de beaucoup plus de facteurs que d'un seul signal ou d'une seule molécule. Il existe bien sur des macromolécules spécifiques impliquées dans la régulation de l'expression génétique, mais leur activité semble largement dépendre de l'ensemble du contexte cellulaire, et même extracellulaire.

Pour savoir comment les différents espaces dont il a été question plus haut sont-ils reliés, c'est-à-dire s'il sont simplement «emboîtés» ou si c'est le même espace qui acquière de nouvelles structures et propriétés selon le niveau d'organisation des phénomènes observés, il importe tout d'abord de comprendre qu'un même espace peut admettre plusieurs géométries, c'est-à-dire plusieurs modes de se structurer. Ce fut une grande révolution de la pensée mathématique du XIX^e siècle que d'avoir compris que non seulement il existe une pluralité d'espaces, mais qu'en plus chacun de ces espaces peut «accueillir» différentes structures géométriques et topologiques, souvent équivalentes et parfois incompatibles. Par exemple, sur une sphère, un petit triangle est euclidien (c'est-à-dire que la géométrie locale de l'espace sphérique ressemble à la géométrie euclidienne), tandis qu'un grand triangle est riemannien (globalement, la somme des angles est supérieure à 180°). Or, on

parle toujours de la même sphère, mais dans laquelle les êtres qui l'habitent peuvent percevoir les corps qu'y sont situés, soit localement comme s'ils disposaient d'un appareil spécial leur permettant de voir ce qui se passe dans «l'infiniment petit», soit globalement, c'est-à-dire dans «l'infiniment grand».

Un des plus grands défis de la science d'aujourd'hui, souligné par plusieurs auteurs dans cet ouvrage, consiste à inventer des modèles théoriques et expérimentaux qui nous permettent de voir ce qui se passe dans les phénomènes aux échelles microscopique, nanoscopique et macroscopique à la fois, et à essayer de comprendre la manière dont elles interagissent, en sachant qu'aucun de ces niveaux d'organisation ne peut être pleinement décrit et expliqué en le réduisant à l'autre.

On a vu comment un espace peut être caractérisé de plusieurs façons, en fonction du type de phénomènes et du niveau d'organisation que l'on veut étudier. Cependant, il se peut très bien qu'il y ait des propriétés qui demeurent invariantes. Et de même que d'un espace à un autre, il y a des propriétés essentielles qui se conservent lors d'une transition d'un niveau d'organisation à un autre. Mais il peut y avoir des propriétés nouvelles qui émergent, par exemple à l'occasion d'une brisure de symétrie. On dit d'une symétrie qu'elle est *brisée* (ou *rompue*), lorsqu'un système physique, invariant vis-à-vis d'un groupe de symétries donné, cesse de l'être par le même groupe après qu'il a subi une transformation ou un changement brutaux d'état. Quand une symétrie est brisée, lors d'un changement de phase par exemple, il y a apparition de nouvelles structures spatiales et temporelles, ce qui veut dire, en un certain sens, qu'on passe à une symétrie *réduite*, puisque le système n'est plus invariant par quelques-unes de ses symétries précédentes. Mais, d'un autre point de vue, on est autorisé à dire dans beaucoup de cas que le nouveau groupe de symétries est en quelque sorte un groupe plus général qui, à un niveau plus fin, englobe le groupe antérieur. Afin de préciser cette notion, on peut considérer l'exemple des bifurcations qui ont comme effet, dans beaucoup de situations, de briser la symétrie de rotation, sans que pour autant elles brisent toutes les symétries du système. En général, les symétries d'un état bifurqué peuvent former un sous-groupe relativement gros, c'est-à-dire un nouveau groupe comportant beaucoup de symétries: certaines des symétries antérieures et de nouvelles symétries invariantes. (A ce sujet, voir en particulier les contributions au présent ouvrage de Bailly, Boi, Bouligand et Chossat).

On peut donc travailler avec le même espace, mais qualifié de plus en plus finement sur le plan mathématique et enrichi de nouvelles propriétés

physiques. Considérons brièvement l'exemple de la physique des particules: on a besoin d'un groupe de symétries très riche, pour englober des interactions et des phénomènes qui n'ont pas le même comportement physique. Plus ce groupe est large, et devient une *supersymétrie*, plus il peut englober toutes les autres symétries particulières, et plus on peut espérer capturer un nombre maximal de propriétés physiques. La supersymétrie postule qu'à chaque particule ordinaire est associé un super-partenaire dont les propriétés diffèrent seulement par le spin. Parmi les particules élémentaires, les fermions sont les constituants de la matière et ont un spin, un moment cinétique intrinsèque, demi-entier ($1/2, 3/2, 6/4$, etc.); les bosons sont les particules qui transmettent les interactions entre ces constituants, et leur spin est entier ($0, 1, 2$, etc.). D'après la supersymétrie, chaque fermion possède un super-partenaire qui est un boson, tandis que chaque boson ordinaire possède un super-partenaire qui est un fermion.

La recherche d'une supersymétrie se justifie par la tentative d'unifier de forces (pour le moment incompatibles) dans un espace géométriquement et topologiquement plus riche en invariants, où ces forces ne nous apparaîtront plus comme ayant des comportements tout à fait contradictoires, mais bien plutôt comme étant l'une le *duale* de l'autre. C'est la raison pour laquelle le modèle standard de Ward-Salam-Weinberg, qui unifie la force «électrofaible» (électromagnétisme plus force nucléaire faible) avec la force nucléaire forte, et sui, en termes mathématiques, correspond au groupe de symétries $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$, c'est l'une des constructions intellectuelles fondamentales de la physique du XIX^e siècle.

De manière générale, il faut insister sur le fait que la signification de la symétrie ne doit pas être limitée aux objets qui occupent un certain espace. Comme il a été montré dans plusieurs contributions au présent ouvrage, elle indique beaucoup plus une sorte d'harmonie profonde entre les diverses parties grâce à quoi elles s'intègrent dans un tout, et où en plus les symétries du tout (ou d'un système physique) sont plus riches que les symétries des parties (ou des constituants du système). En physique, il arrive souvent que la solution de tel ou tel problème ne doit rien à la «nature» du système, mais dépend complètement de ses symétries et des dynamiques des formes qu'elles sont à même d'engendrer.

Le principe de dualité, dont le rôle important en mathématiques est bien connu au moins depuis le début du XIX^e siècle, est très vraisemblablement l'une des clefs de beaucoup de mystères de la physique actuelle, comme la théorie des supercordes le montre bien. Il est clair que la dualité entre

algèbre et géométrie, qui apparaît clairement lorsqu'on introduit les transformations abstraites de groupe associées à un certain espace topologique (ce qui n'a pas été fait avant le début du siècle dernier avec, notamment, H. Poincaré, E. Cartan et H. Weyl), permet de repousser plus loin les limites de nos concepts géométriques, et d'élargir considérablement le cadre euclidien par les généralisation de l'espace mathématique et des objets que l'on peut y définir rendues possibles grâce aux géométries non euclidiennes. La découverte de la mécanique quantique et de la non-commutativité des coordonnées sur l'espace des phases d'un système atomique a engendré dans les vingt dernières années un changement tout aussi radical des concepts géométriques, libérant la notion d'espace de la commutativité des coordonnées.

Le pouvoir à la fois descriptif, explicatif et constitutif de la géométrie et de la topologie modernes est exploré par quelques auteurs également dans une autre direction, en montrant que la pensée géométrique (ses concepts, modèles et méthodes) peut aussi être fructueuse dans l'étude des systèmes complexes et des êtres vivants. C'est là une perspective fondamentalement nouvelle qui s'ouvre, confortée d'ailleurs par un très grand nombre de recherches théoriques et d'observations expérimentales particulièrement significatives (voir, pour des considérations à ce sujet, notamment les études de Bouligand, Bailly, Chossat et Boi dans cet ouvrage). En particulier, dans le monde du vivant aussi on peut réfléchir en termes de propriétés structurelles qui permettent d'établir des classes d'équivalences topologiques (invariants de noeuds, retournement de la sphère, nombre d'Euler pour le genre de la surface) souvent directement associées à des processus et fonctions biologiques aussi varié que les mécanismes de réPLICATION de l'ADN et son surenroulement autour du nucléosome, la compaction de la chromatine dans le noyau, la gastrulation du jeune embryon lors des premiers stades du développement, le dépliement des ARN et des protéines dans l'espace de la cellule.

Vu en tant que système dynamique complexe, l'organisme vivant tend à acquérir un état de stabilité déterminé, rendu possible grâce au bon fonctionnement d'un ensemble coordonné de réactions biochimiques catalytiques et de mécanismes de régulation physiologiques. La propriété de la stabilité permet en effet de définir des familles de phénomènes ou de situation plus ou moins régulières ou plus ou moins critiques: métastables, stables, quasi-stables, instables, très instables, en fonction de la sensibilité à différents types de fluctuations aléatoires et à des perturbations endogènes

aussi bien qu'exogènes (mouvement brownien, dissipation d'énergie, inhomogénéités ioniques, instabilités métaboliques, chiralité structurale, etc.), toutes les deux très présentes chez le vivant.

Ajoutons à cela encore trois remarques. Dans les systèmes complexes les plus stables, la structure globale l'emporte généralement sur les constituants individuels. Ils présentent aussi des invariances d'échelle, c'est-à-dire que des propriétés fondamentales sont conservées d'un niveau d'organisation à un autre. Dans un organisme vivant, par exemple, deux mécanismes fondamentaux comme la régulation et la régénération se retrouvent à plusieurs niveaux, que ce soit moléculaire, cellulaire, ou de l'organisme entier, et ils sont essentiels au contrôle du métabolisme et du développement. Pour résumer l'idée de fond, on peut affirmer que les propriétés de la matière vivante, bien qu'obéissant à un certain nombre de réactions biochimiques et de conditions énergétiques de base, ne sauraient néanmoins se réaliser et se manifester que comme le résultat du maintien et de l'auto-entretien de processus topologiques bien déterminés, qui interviennent pour assurer le cycle vital de la cellule.

Limitons-nous à citer un exemple, sans doute l'un des plus fondamentaux. Les opérations du surenroulement de la molécule de l'ADN autour des histones pour former les nucléosomes puis de la compaction de la chromatine dans le chromosome lors de la métaphase sont essentiels non seulement afin que les systèmes enzymatiques transcrivent et dupliquent le matériel génétique et les protéines qui le condensent, mais aussi pour permettre l'expression génétique, la communication intracellulaire et extracellulaire, et le bon fonctionnement global de l'organisme.

Il est raisonnable de penser que seul un ensemble de nouvelles méthodes et idées mathématiques, formant ce qu'on pourrait appeler topobiologie ou la morphomatique, rigoureusement fondée sur les données et les processus biologiques eux-mêmes, peut permettre d'avancer dans la compréhension de certains problèmes fondamentaux de la biologie actuelle. Aussi subversif que cela puisse paraître aux praticiens des sciences notamment expérimentales, si nous voulons vraiment comprendre comment se produit l'apparition de telle et telle forme dans la nature organique et inorganique, il nous faut inventer un nouveau type d'approche, reposant plus sur des objets de nature géométrique et topologique, qui puisse être utilisé en parallèle et de façon complémentaire avec les méthodes «classiques» qui mettent l'accent sur le développement analytique des équations et les lois statistiques. Le but de cette autre approche est de développer des méthodes

et des techniques qualitatives qui ont comme objet la description et la modélisation des structures nouvelles que l'on observe dans la nature, au lieu de les traiter comme des conséquences accidentielles d'interactions à petite échelle, ou des épiphénomènes d'une prétendue réalité plus fondamentale et irréductible.

De la lecture attentive de plusieurs études réunies dans ce livre, il devrait ressortir clairement que la géométrie et la topologie possèdent une valeur heuristique certes, mais aussi génératrice et créative. Valeur heuristique parce que si les phénomènes que l'on observe dans la réalité à plusieurs échelles sont déterminés par des structures mathématiques fondamentales, alors les modèles que nous pouvons construire en plus d'être des outils pour la simulation des phénomènes, permettront de comprendre de l'intérieur leurs principes d'auto-organisation et certaines de leurs propriétés caractéristiques. Et valeur génératrice, car c'est de façon géométrique et/ou topologique que la nature crée en permanence, et sur un mode inépuisable. A ce propos, il est intéressant à noter que la richesse d'un système formel, ou de toute autre théorie mathématique ou même empirique, est liée à son incomplétude, c'est-à-dire à l'impossibilité d'épuiser la connaissance et la signification du système en se servant de ses axiomes. Il restera toujours de nouvelles propriétés à découvrir, qui n'étaient pas contenues ni pensables à l'intérieur du système d'axiomes. C'est là que s'enracine le caractère pour ainsi dire «magique» de la nature, dans le fait précisément qu'elle peut toujours donner naissance à des situations et à des propriétés qui ne nous paraissent pas contenues dans ce que nous connaissons déjà, et auxquelles on ne s'y attendait pas.

Dans ce livre, le lecteur attentif trouvera maints exemples qui illustrent comment la géométrie et la topologie nous offrent une conception dynamique de la nature qui ne sépare plus à la hache et de manière absolue le vivant de la matière dite inerte, l'ordre du désordre, le certain de l'aléatoire. La grande variété des phénomènes et des formes apparentes que l'on rencontre dans la nature correspond vraisemblablement aux différents modes selon lesquels les corps physiques et les êtres vivants sont sujets à une transformation permanente sous l'action de quelques grands principes spatiaux et temporels: brisures de symétries, transitions de phases, déformations topologiques, et finalement auto-organisation et complexité. Il existe très probablement des processus communs qui sous-tendent l'émergence de ces phénomènes, bien que leurs manifestations et significations puissent être infinies.