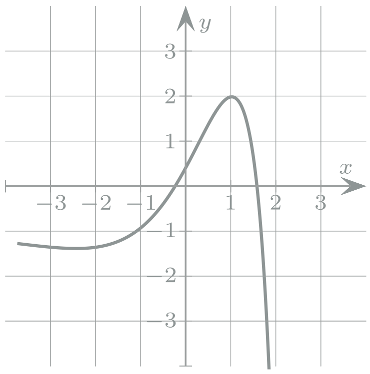
Florian Timmermann

Intensivkurs Mathematik

Analysis

$\int e^x \, dx$



$f'(x) = x^2 - 4$

$W\left(3 \mid \frac{1}{2}\right)$

$\cos(2x) = 0$

Die optimale Vorbereitung
auf das Abitur:

- Erklärung des gesamten Stoffes
- Aufgaben auf allen Niveaustufen
- mit allen Lösungswegen

Abitur

Intensivkurs
Mathematik

www.intensivkurs-mathematik.de

2. Auflage, 1. Druck 2017

Druck: Karmášek s.r.o., České Budějovice (CZ)

ISBN: 978-3-9817902-4-5

Inhaltsverzeichnis

Arbeiten mit dem Buch

Liebe Schüler/innen,

Dieses Buch soll Ihnen die Vorbereitung auf die anstehenden Abiturprüfungen erleichtern, egal aus welchem Bundesland Sie kommen. Jeder Abschnitt besteht aus einem kurzen Theorieteil mit Beispielen und dazugehörigen Aufgaben.

- **Schwierigkeitsgrade**: • leicht, •• mittel, ••• schwer, ★ Bonusaufgaben (über dem Schulniveau).
  Wählen Sie individuell ihr gewünschtes Niveau aus und versuchen Sie, sich mit der Zeit zu steigern.
- Alle Aufgaben, die per Hand gerechnet werden müssen, haben einfache Zahlenwerte als Lösung.
- 🖩 Ein wissenschaftlicher Taschenrechner darf zum Lösen verwendet werden.
- *: Dieses Kapitel wird im Unterricht nur selten behandelt
- **179.**: Diese rot markierten Aufgaben sind Schwerpunkt der Abiturvorbereitung
- **Lösungen**: Ich stelle Ihnen alle Lösungen inklusive der Lösungswege zur Verfügung. Gelegentlich kann es auch alternative Lösungswege geben. Versuchen Sie bitte stets, die Aufgaben zu lösen, ohne einen Blick auf die Lösungen zu werfen. Erst wenn Sie nach zwei Versuchen nicht auf die Lösung kommen, sollten Sie sich diese ansehen.

Auf der Internetseite

http://www.intensivkurs-mathematik.de

erhalten Sie zusätzliche Informationen sowie eine Übersicht über die weiteren Bücher dieser Reihe.
Nun wünsche ich Ihnen eine erfolgreiche Vorbereitung auf die Abiturprüfungen in Mathematik!

Trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-1;\ 1]$
- punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
- periodisch (Ausschnitte wiederholen sich) mit Periodenlänge 2π
- Nullstellen $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$

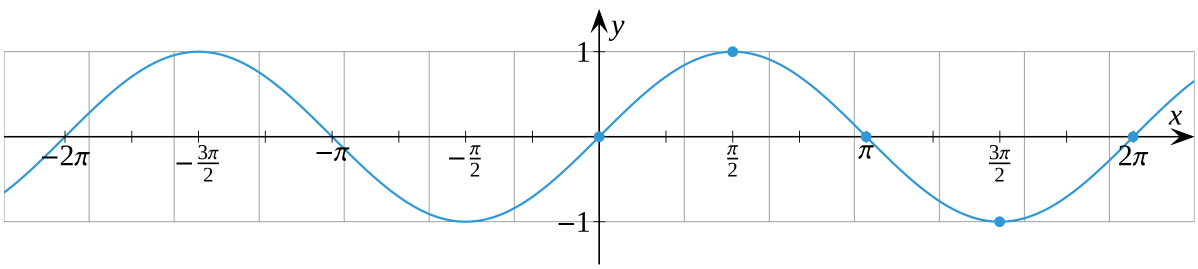


Abb. 0.4.: Schaubild der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Kosinusfunktion

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-1;\ 1]$
- symmetrisch zur y-Achse
- periodisch (Ausschnitte wiederholen sich) mit Periodenlänge 2π
- Nullstellen $\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

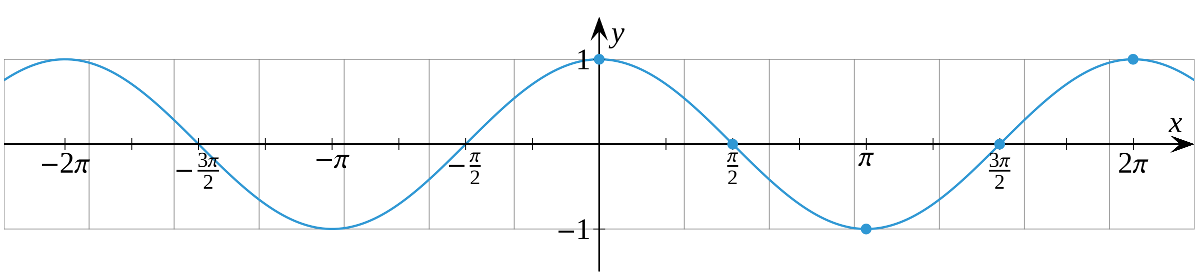


Abb. 0.5.: Schaubild der Kosinusfunktion $f(x) = \cos x$

Grundlegende Gleichungstypen

1. Diese Gleichungstypen müssen Sie bis zum Abitur beherrschen. Lösen Sie die Gleichungen für x rechnerisch.

(a) $4 - \frac{x}{2} = 1$ (*lineare Gleichung*)

(b) $3x^2 - 16 = 32$ (*quadratische Gleichung mit Wurzelziehen*)

(c) $3x^2 = -x$ (*quadratische Gleichung mit Ausklammern*)

(d) $2x^2 - x = 10$ (*quadratische Gleichung mit Mitternachtsformel*)

(e) $x^2 = 2ax$ (*Gleichung in Abhängigkeit eines Parameters*)

(f) $x^2 + a = 2x$ (*nur Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit des Parameters bestimmen*)

(g) $\sqrt{3x+1} = x - 1$ (*Wurzelgleichung*)

(h) $x = \frac{3}{x+2}$ (*Bruchgleichung*)

(i) $1 - \frac{1}{4}x^3 = 3$ (*höhere Gleichung mit Wurzelziehen*)

(j) $x^3 + 4x^2 = 5x$ (*höhere Gleichung mit Ausklammern I*)

(k) $4x^2 = x^4$ (*höhere Gleichung mit Ausklammern II*)

(l) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ (*biquadratische Gleichung mit Substitution*)

(m) $\mathrm{e}^{1-x} = 8$ (*Exponentialgleichung*)

(n) $x^2\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x = 0$ (*gemischte Gleichung I*)

(o) $\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = 0$ (*gemischte Gleichung II*)

(p) $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4 = 0$ (*gemischte Gleichung III*)

(q) $\sin x = \frac{1}{2},\ x \in [0;\ 2\pi)$ (*trigonometrische Gleichung I*)

(r) $\cos x = -\frac{1}{2},\ x \in [0;\ 2\pi)$ (*trigonometrische Gleichung II*)

(s) $\sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ x \in [0;\ 4\pi)$ (*trigonometrische Gleichung III*)

(t) $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 5 & = & -y \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}$ (*LGS mit Gleichsetzungsverfahren*)

(u) $\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ & & 7y & = & 4-2x \end{array}$ (*LGS mit Einsetzungsverfahren*)

(v) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$ (*LGS mit Additionsverfahren*)

Grundlagen

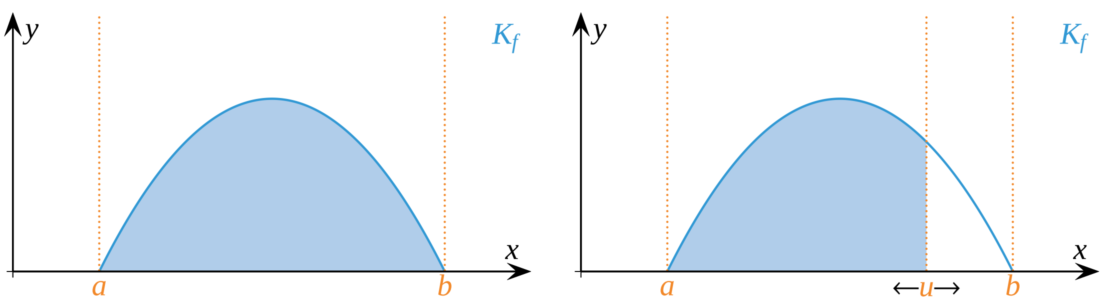
2.2. Berechnung von Flächeninhalten oberhalb der x-Achse

Mit Hilfe jeder Mathematik-Formelsammlung lassen sich Inhalte von Flächen wie dem Rechteck, Dreieck, Trapez und einigen anderen berechnen. Doch die Formelvielfalt ist begrenzt. Die Integralrechnung ermöglicht uns, diese Palette großzügig zu erweitern. Genauer gesagt lassen sich alle Flächen berechnen, die von Schaubildern von Funktionen begrenzt sind. Um dieses Ziel zu erreichen, führen wir zunächst behutsam zwei neue Begriffe ein.

Das bestimmte Integral
Für eine integrierbare nichtnegative Funktion $f\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet das *bestimmte Integral*

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt, wobei wir a und b als *Integrationsgrenzen* bezeichnen (→ Abb. 2.11a).



(a) Fläche A mit Grenzen a und b (b) Fläche $A(u)$ mit Grenzen a und u

Abb. 2.11.: Bestimmtes Integral und Integralfunktion

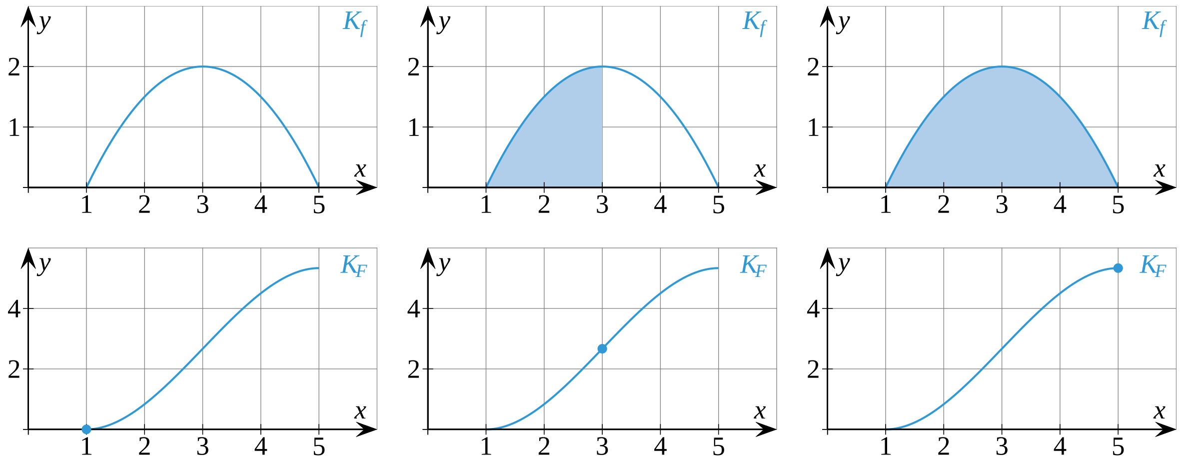
Wir merken an, dass das in Abschnitt 2.1 eingeführte unbestimmte Integral eine Schar von Funktionen bezeichnet und das bestimmte Integral nur einen Zahlenwert. Wollen wir den Flächeninhalt angeben, den das Schaubild K_f von f mit der x-Achse innerhalb der festen unteren Grenze a und der veränderbaren oberen Grenze u einschließt, so erhalten wir eine Funktion, die von dem Wert von u abhängig ist (→ Abb. 2.11b).

Integralfunktion
Für eine integrierbare nichtnegative Funktion $f\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$ heißt die Funktion $A\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$A(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integralfunktion von f zur unteren Grenze a.

Im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt sich heraus, dass A eine Stammfunktion von f ist.



(a) $A(1)$ (b) $A(3)$ (c) $A(5)$

Abb. 2.12.: Verlauf des Flächeninhaltes – 1. Teil des HDI

Im Beispiel ist der Flächeninhalt zu Beginn 0. Zudem liegt in $x = 1$ ein lokaler Tiefpunkt vor, da f in $x = 1$ eine Nullstelle hat (→ Abb. 2.12a). In $x = 3$ liegt ein Wendepunkt vor, denn der Flächenzuwachs ist maximal, da K_f in $x = 3$ einen lokalen Hochpunkt hat (→ Abb. 2.12b). In $x = 5$ liegt ein lokaler Hochpunkt vor, da f in $x = 5$ eine Nullstelle hat (→ Abb. 2.12c).

Aus diesen Überlegungen sehen wir bereits, dass die Ableitung A' der Integralfunktion genau die Funktion f selbst liefert. Dies führt uns zum sogenannten *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, der in Anhang A rechnerisch bewiesen wird.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es ist $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, integrierbare Funktion, A eine Integralfunktion von f und F eine Stammfunktion von F. Dann gilt:

(a) $A'(x) = f(x)$

(b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

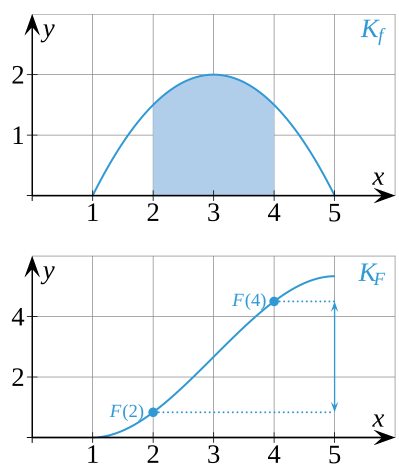


Abb. 2.13.: Berechnung des Flächeninhaltes – 2. Teil des HDI

In diesem Abschnitt geht es uns lediglich darum, uns mit dem Begriff und der Berechnung des bestimmten Integrals vertraut zu machen. Dabei sind einige Rechenregeln hilfreich.

Rechenregeln für bestimmte Integrale

Für alle nichtnegativen integrierbaren Funktionen f und g, sowie $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(Summenregel)*

(b) $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Faktorregel)*

(c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Additivität des Integrals)*

(d) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Vertauschen der Integrationsgrenzen)*

(e) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *(gleiche Grenzen)*

In Abb. 2.13 stellen wir durch das Abzählen von Kästchen fest, dass der gesuchte Flächeninhalt einen Wert zwischen 3 und 4 annimmt. Bessere Verfahren zur Bestimmung solcher Schätzwerte werden in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Das folgende Beispiel liefert uns jedoch das exakte Ergebnis. Die Berechnung des Flächeninhaltes erfolgt dabei direkt über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Beispiel

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild K_f von $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$ für $x \in [2; 4]$ mit der x-Achse einschließt (Abb. 2.13).

Lösung

1. Wir bestimmen eine Stammfunktion F von f. $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$.
2. Wir setzen die obere und untere Grenze in das bestimmte Integral ein und berechnen den konkreten Zahlenwert. $a = 2$, $b = 4$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right]_2^4 \\ &= \left(-\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \frac{5}{2}\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3 + \frac{3}{2}\cdot 2^2 - \frac{5}{2}\cdot 2\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} \approx 3{,}67\,. \end{aligned}$$

252. Das Schaubild K der Funktion f und die x-Achse schließen im angegebenen Intervall ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Zeichnen Sie zunächst K und markieren Sie die angegebene Fläche. Berechnen Sie dann ihren Inhalt.

(a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $x \in [1; 3]$

(b) $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^4$, $x \in [-2; 2]$

(c) $f(x) = -x^3 + x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$, $x \in [1; 2]$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$, $x \in [-1; 2]$

(e) $f(x) = 6x(\frac{3}{2} - x)$, $x \in [0; 1]$

(f) $f(x) = -3x^2(x - 2)$, $x \in [0; 2]$

Theorie & Aufgaben

• **253.** Das Schaubild K der Funktion f und die x-Achse schließen im angegebenen Intervall ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Zeichnen Sie zunächst K und markieren Sie die angegebene Fläche. Berechnen Sie dann ihren Inhalt.

(a) $f(x) = 3\cos x,\ x \in [0;\ \frac{\pi}{2}]$

(b) $f(x) = e^x,\ x \in [0;\ 1]$

(c) $f(x) = 4\sin x,\ x \in [0;\ \pi]$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}e^x,\ x \in [1;\ 2]$

(e) $f(x) = 2 + 2\cos x,\ x \in [-\pi;\ \pi]$

(f) $f(x) = 2 - e^x,\ x \in [-2;\ 0]$

•• **254.** Das Schaubild K der Funktion f und die x-Achse schließen im angegebenen Intervall ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Berechnen Sie dessen Inhalt.

(a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}),\ x \in [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$

(b) $f(x) = 3 - 2e^{x+1},\ x \in [-3;\ -2]$

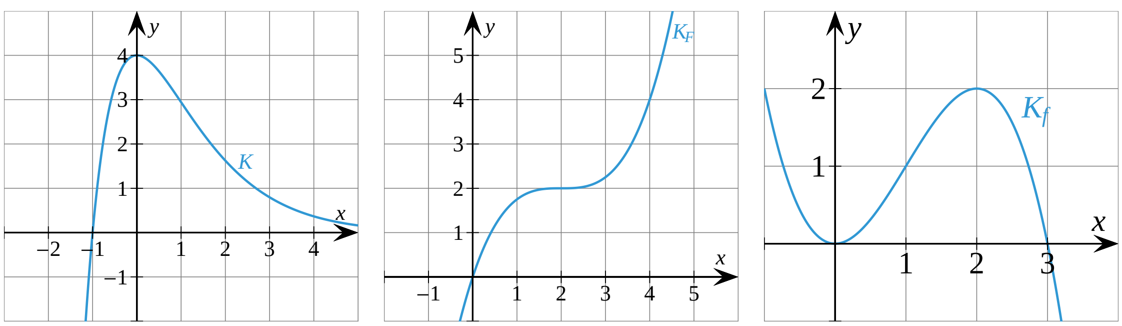
(c) $f(x) = 4e^{-2x},\ x \in [0;\ 2]$

(d) $f(x) = -3\cos(\pi x),\ x \in [-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}]$

•• **255.** In Abb. 2.14a ist das Schaubild K einer Funktion f eingezeichnet. Überprüfen Sie durch Schätzen des Flächeninhalts, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx > 4$

(b) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx > 6$



(a) Schaubild zu Aufgabe 255 (b) Schaubild zu Aufgabe 256 (c) Schaubild zu Aufgabe 257

Abb. 2.14.: Schaubilder

•• **256.** F ist eine Stammfunktion von f. In Abb. 2.14b ist das Schaubild von K_F von F eingezeichnet. Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\int_{1}^{3} f(x)\,dx > 1$

(b) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{2}^{4} f(x)\,dx$

•• **257.** In Abb. 2.14c ist das Schaubild K_f einer Funktion f eingezeichnet. Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, welche dieser Aussagen über die Stammfunktion F von f richtig bzw. falsch sind.

(a) $F(2) - F(1) > 0$

(b) $F(3) - F(0) > 2$

(c) $F(3) - F(0) > 4$

•• **258.** Es ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$ gegeben. Ihr Schaubild K schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = b\ (b > 0)$ ein Flächenstück mit parameterabhängigem Inhalt $A(b)$ ein. Für welchen Wert von b gilt: $A(b) = 72$?

●● **259.** Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$ schließt mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = u$ $(u > 0)$ eine Fläche ein.

(a) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von u.

(b) Gegen welchen Wert strebt der Flächeninhalt für $u \to \infty$?

●● **260.** Im Jahr 1986 wurde durch die Reaktorkatastrophe von Tschernobyl ein Waldstück mit dem Caesium-Isotop ^{137}Cs kontaminiert. Die radioaktive Belastung in Abhängigkeit des Jahres wird durch die spezifische Aktivität A von ^{137}Cs in Becquerel pro kg Frischmasse angegeben:

$$A(t) = 4\,000\mathrm{e}^{-0{,}023t},$$

wobei $t = 0$ dem Jahr 1986 entspricht.

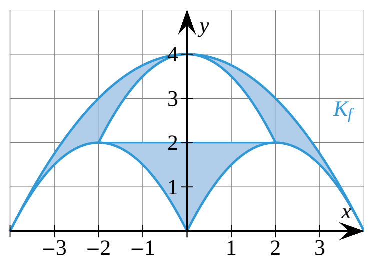
(a) Interpretieren Sie die Zahl 4 000 im Sachzusammenhang.

(b) Zeigen Sie, dass die Halbwertszeit des Isotops ^{137}Cs etwa 30 Jahre beträgt.

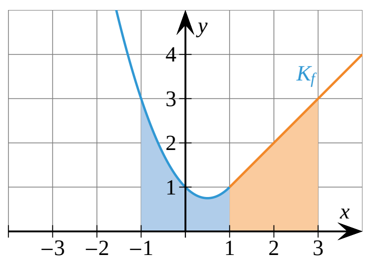
(c) Pilze, die in den Handel gelangen, dürfen eine spezifische Aktivität von 600 Becquerel pro kg Frischmasse nicht überschreiten. Ab welchem Jahr wird das nach diesem Ansatz der Fall sein? Begründen Sie rechnerisch.

(d) Eine 1986 geborene Person hat seit ihrer Geburt ca. 500 g Waldpilze pro Jahr konsumiert. Berechnen Sie die von ihr insgesamt aufgenommene Becquerel-Menge bis zu ihrem 40. Geburtstag.

●●● **261.** Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der schraffierten Fläche aus Abb. 2.15a.



(a) Schaubild zu Aufgabe 261



(b) Schaubild zu Aufgabe 262

Abb. 2.15.: Schaubilder

●●● **262.** Das in Abb. 2.15b gegebene Schaubild der abschnittsweise definierten Funktion schließt eine farbig markierte Fläche mit Inhalt A ein. Berechnen Sie A exakt.

●●● **263.** Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ sowie den y-Achsenabschnitt 3. Zudem schließt es mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt $A = 8{,}25$ ein. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

★ **264.** Beweisen Sie die Flächenformel $A = \frac{1}{2}gh$ für ein Dreieck mit Hilfe der Integralrechnung und geeignet gewählter Funktionen (Skizze!).

Teil II.

Lösungen

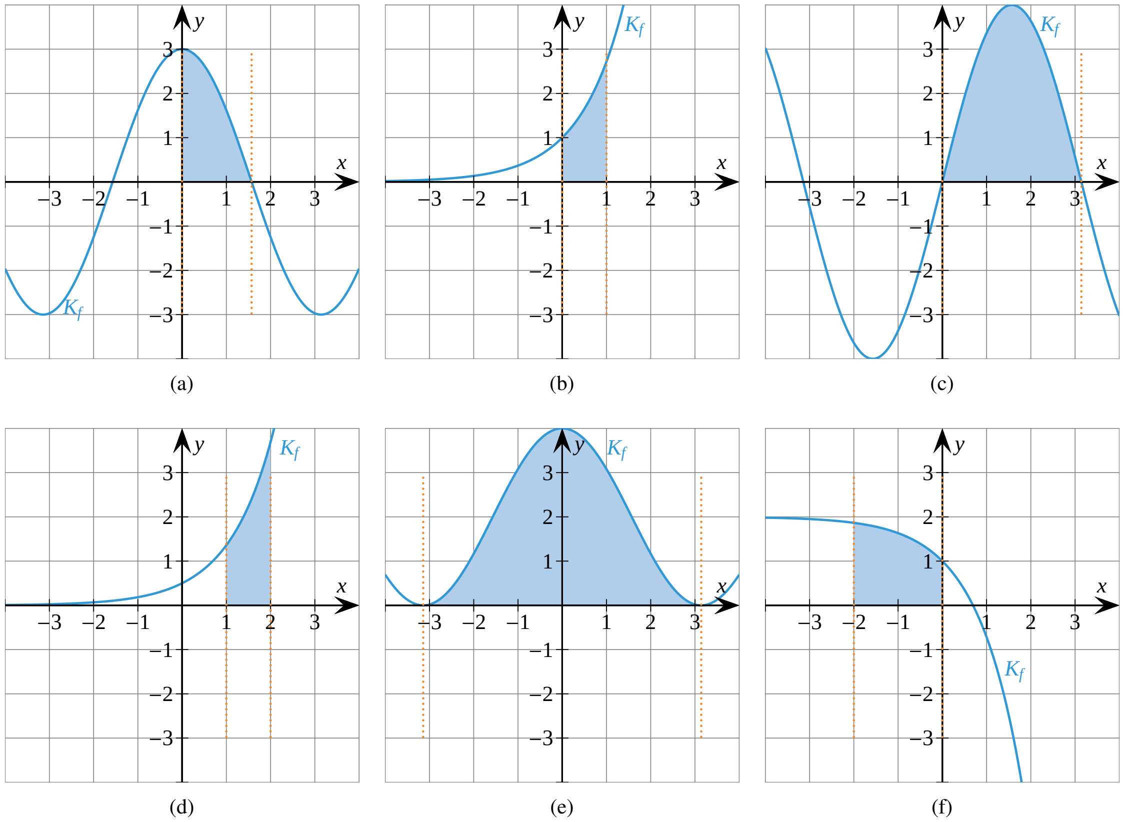


Abb. 3.53.: Schaubilder zu Aufgabe 253

255. (a) Diese Aussage ist falsch, da die Fläche komplett von einem Rechteck mit den Eckpunkten P(−1 | 0), Q(−1 | 4), R(0 | 4) und S(0 | 0) und dem Flächeninhalt 4 umschlossen ist.

(b) Diese Aussage ist richtig, da in der Fläche ein Dreieck mit den Eckpunkten P(0 | 0), Q(0 | 4) und R(3 | 0) mit Flächeninhalt 6 enthalten ist.

256. (a) Falsch, denn $F(3) \approx 2{,}25$ und $F(1) \approx 1{,}75 \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) \approx 0{,}5 < 1$.

(b) Richtig, denn $F(4) = 4$, $F(2) = 2$, $F(0) = 0$, $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = 2$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = 2$.

257. Der Ausdruck $F(b) - F(a)$ gibt den Flächeninhalt an, den das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. Die Flächeninhalte können wir durch das Abzählen von Kästchen leicht schätzen.

(a) richtig, denn es wird eine Fläche mit positivem Inhalt eingeschlossen

(b) richtig, denn in der Fläche sind mindestens zwei Einheitsquadrate enthalten

(c) falsch, denn in der Fläche sind weniger als vier Einheitsquadrate enthalten

258. $A(b) = \int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3]_0^b = \frac{1}{3}b^3 = 72 \Rightarrow b = 6$

259. (a)

$$A(u) = \int_0^u \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\,\mathrm{d}x = \left[-3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^u = -3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}u} - (-3) = 3 - 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}u}$$

(b) $A(u) \to 3$ für $u \to \infty$

260. (a) Dies ist die spezifische Aktivität im Jahr 1986.

(b) $2\,000 = 4\,000\mathrm{e}^{-0{,}023t}$ für $t = 30{,}13$.

(c) $600 = 4\,000\mathrm{e}^{-0{,}023t}$ für $t = 82{,}48 \Rightarrow$ ab dem Jahr 2069.

(d)

$$\frac{500}{1\,000} \cdot \int_0^{40} 4\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}023t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \left[-173\,913\,\mathrm{e}^{-0{,}023t}\right]_0^{40} = \frac{1}{2} \cdot (-69\,308 - (-173\,913)) = 52\,303$$

Bei einer einzigen Röntgenaufnahme des Kopfes ist die Belastung übrigens höher.

261. Für die äußere Parabel gilt: $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$. Die Fläche, die K_f mit der x-Achse einschließt, hat den Inhalt $A_1 = \int_{-4}^{4} 4 - \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x = [4x - \frac{1}{12}x^3]_{-4}^{4} = \frac{32}{3} - (-\frac{32}{3}) = \frac{64}{3}$. Für die Parabel unten rechts gilt: $g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$. Die Fläche, die K_g mit der x-Achse einschließt, hat den Inhalt $A_2 = \int_0^4 -\frac{1}{2}x^2 + 2x\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{6}x^3 + x^2]_0^4 = \frac{16}{3}$. Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt somit $A = A_1 - 3A_2 = \frac{16}{3}$.

262. Es gilt $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in [-1;\ 1] \\ x, & x \in [1;\ 3] \end{cases}$.
Wir berechnen $A = A_1 + A_2$ mit $A_1 = \int_{-1}^{1} x^2 - x + 1\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x]_{-1}^{1} = \frac{5}{6} - (-\frac{11}{6}) = \frac{8}{3}$, $A_2 = \int_1^3 x\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}x^2]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. Somit gilt $A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$.

263. Wir schreiben $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und berechnen: I: $f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$. Außerdem gilt II: $f(3) = 0 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + 3 = 0$, sowie III: $f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + 3 = 0$. Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir $18b + 6 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$. Lösen wir II nach c auf, so erhalten wir $c = -9a$ und somit $f(x) = ax^3 - \frac{1}{3}x^2 - 9ax + 3$. Die letzte Bedingung liefert

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 ax^3 - \frac{1}{3}x^2 - 9ax + 3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{9}{2}ax^2 + 3x\right]_0^3 \\ &= \left(\frac{81}{4}a - 3 - \frac{81}{2}a + 9\right) - 0 = -\frac{81}{4}a + 6 = 8{,}25 \Rightarrow a = -\frac{1}{9} \Rightarrow c = 1\,.\end{aligned}$$

Somit gilt: $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x + 3$.

264. Wie in Abb. 3.54 dargestellt wählen wir

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{h}{u}x + h, & x \in [u;\ 0] \\ -\frac{h}{g+u}x + h, & x \in [0;\ g+u] \end{cases}$$

für $u < 0$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_u^{g+u} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_u^0 -\frac{h}{u}x + h\,\mathrm{d}x + \int_0^{g+u} -\frac{h}{g+u} + h\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\frac{h}{u}x^2 + hx\right]_u^0 + \left[-\frac{1}{2}\frac{h}{g+u}x^2 + hx\right]_0^{g+u} \\ &= \frac{1}{2}hu - hu - \frac{1}{2}h(g+u) + h(g+u) = \frac{1}{2}gh.\end{aligned}$$

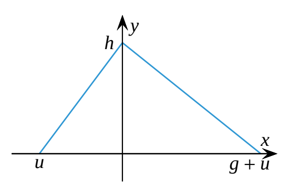


Abb. 3.54.: Lösungsskizze zu Aufgabe 264

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

265. (a) $\int_{-1}^{2} x^2 - 3x\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{2} = (-\frac{10}{3}) - (-\frac{11}{6}) = -\frac{3}{2}$

(b) $\int_{2}^{4} -\frac{1}{6}x^3 + 2x\,dx = [-\frac{1}{24}x^4 + x^2]_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{10}{3} = 2$

(c) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^2\,dx = [\frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{30}x^3]_{-2}^{0} = 0 - (-\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$

(d) $\int_{1}^{4} 3\sqrt{x}\,dx = [2x^{\frac{3}{2}}]_1^4 = 16 - 2 = 14$

(e) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx = [-x^{-1}]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = -2 - (-3) = 1$

(f) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{4}{9}} -x^{-\frac{3}{2}}\,dx = [2x^{-\frac{1}{2}}]_{\frac{1}{4}}^{\frac{4}{9}} = 3 - 4 = -1$

266. Schaubilder siehe Abb. 3.55.

(a) $f(x) = x(x+1)(x-2)$, Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$, $A_1 = |F(0) - F(-1)| = |0 - (-\frac{5}{12})| = \frac{5}{12}$, $A_2 = |F(2) - F(0)| = |-\frac{8}{3} - 0| = \frac{8}{3}$, $A = A_1 + A_2 = \frac{37}{12}$

(b) Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$, $A_1 = |F(-1) - F(-3)| = |\frac{7}{4} - (-\frac{9}{4})| = 4$, $A_2 = |F(1) - F(-1)| = |-\frac{9}{4} - \frac{7}{4}| = 4$, $A = A_1 + A_2 = 8$

(c) $f(x) = -\frac{1}{6}x(x+1)(x-4)$, Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $F(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + c$, $A_1 = |F(0) - F(-1)| = |0 - \frac{1}{8}| = \frac{1}{8}$, $A_2 = |F(4) - F(0)| = |\frac{16}{3} - 0| = \frac{16}{3}$, $A = A_1 + A_2 = \frac{131}{24} \approx 5{,}46$

(d) Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$, $A_1 = |F(0) - F(-2)| = |0 - \frac{44}{15}| = \frac{44}{15}$, $A_2 = |F(1) - F(0)| = |-\frac{13}{60} - 0| = \frac{13}{60}$, $A = A_1 + A_2 = \frac{63}{20}$

(e) Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $F(x) = -x^6 + 3x^2 + c$, $A_1 = |F(0) - F(-1)| = |0 - 2| = 2$, $A_2 = |F(1) - F(0)| = |2 - 0| = 2$, $A = A_1 + A_2 = 4$

(f) Nullstellen $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$, $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + c$, $A_1 = |F(0) - F(-\sqrt{2})| = |0 - (-\frac{8}{15}\sqrt{2})| = \frac{8}{15}\sqrt{2}$, $A_2 = |F(\sqrt{2}) - F(0)| = |\frac{8}{15}\sqrt{2} - 0| = \frac{8}{15}\sqrt{2}$, $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{15}\sqrt{2} \approx 1{,}51$

267. (a) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$

(b) $\int_{-1}^{0} e^x\,dx = [e^x]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$

(c) lineare Substitution notwendig. $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{3x}\,dx = [\frac{1}{3}e^{3x}]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3} \approx 0{,}57$

(d) lineare Substitution notwendig. $\int_1^2 \cos(\pi x)\,dx = [\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)]_1^2 = 0 - 0 = 0$

(e) lineare Substitution notwendig. $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-2x}\,dx = [-\frac{1}{2}e^{-2x}]_{-\frac{1}{2}}^{0} = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}e) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \approx 0{,}86$

(f) lineare Substitution notwendig. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2x)\,dx = [-\frac{1}{2}\cos(2x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

268. Schaubilder siehe Abb. 3.56.

(a) Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$. $F(x) = -\frac{3}{\pi}\cos(\pi x)$. $A_3 = |F(1) - F(0)| = |\frac{3}{\pi} - (-\frac{3}{\pi})| = \frac{6}{\pi}$. $A = 4A_3 = \frac{24}{\pi} \approx 7{,}64$

(b) Nullstellen $x_1 = -\frac{3}{4}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{4}\pi$, $x_3 = \frac{1}{4}\pi$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$. $F(x) = 2\sin(2x)$. $A_2 = |F(\frac{1}{4}\pi) - F(-\frac{1}{4}\pi)| = |2 - (-2)| = 4$. $A = 3A_2 = 12$.

Lösungen

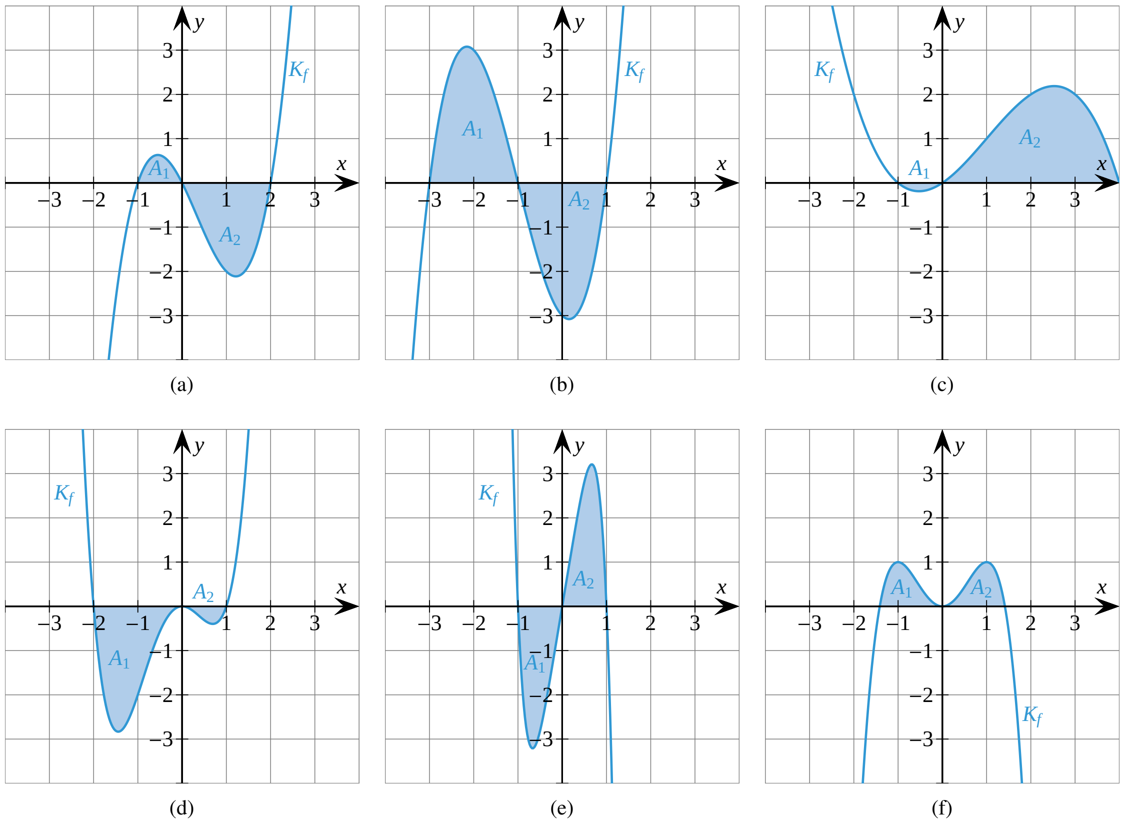


Abb. 3.55.: Schaubilder zu Aufgabe 266

(c) Um die Nullstellen zu erhalten, substituieren wir $u = e^x$. Wir erhalten die Gleichung $-u^2 + 5u - 4 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = 1$ bzw. $u_2 = 4$. Somit berechnen wir die Nullstellen $x_1 = \ln 1 = 0$ und $x_2 = \ln 4$. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 5e^x - 4x$. $A = |F(\ln 4) - F(0)| = |12 - 4\ln 4 - \frac{9}{2}| = \frac{15}{2} - 4\ln 4 \approx 1{,}95$.

(d) Um die Nullstellen zu erhalten, substituieren wir $u = e^x$. Wir erhalten die Gleichung $u + \frac{3}{u} - 4 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = 1$ bzw. $u_2 = 3$. Mit Rücksubstitution erhalten wir die Nullstellen $x_1 = \ln 1 = 0$ und $x_2 = \ln 3$. $F(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$. $A = |F(\ln 3) - F(0)| = |2 - 4\ln 3 - (-2)| = 4\ln 3 - 4 \approx 0{,}39$.

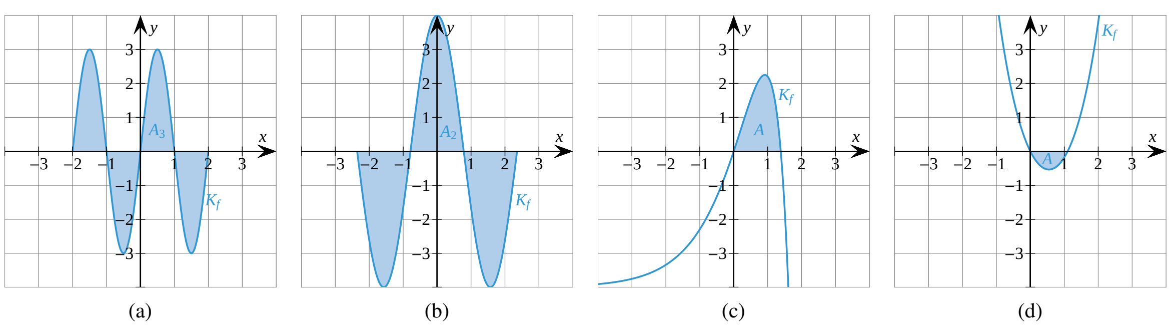


Abb. 3.56.: Schaubilder zu Aufgabe 268

B. Aufgabenübersicht

Ableitungsfunktion

	•	••	•••
Rechnen	9, 10, 11, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 44	12, 14, 15, 16, 28, 37, 41, 42, 45	32, 43, 46
Strategisch lösen		30	18, 48
Argumentieren	17, 29, 38, 47	3, 4, 8, 13, 15, 23, 31, 39	
Darstellungen verwenden		3, 4, 6, 8	5, 7
Anwenden		17	
Modellieren			48

Gegenseitige Lage zweier Kurven

	•	••	•••
Rechnen	50, 51, 52, 53, 54	56, 58, 59, 60, 61	62, 63
Strategisch lösen		57	62, 64
Argumentieren	51, 53	55	
Darstellungen verwenden	51, 53		
Anwenden			63
Modellieren		56, 58, 59, 60	62

Tangenten und Normalen

	•	••	•••
Rechnen	66, 67	68, 69, 70, 71, 77, 80	81
Strategisch lösen		75, 76	80, 81, 82, 83, 84, 85
Argumentieren		72	84
Darstellungen verwenden	66	73	84, 85
Anwenden		74	83, 84, 85
Modellieren		76, 78, 79	82

Mit diesem Übungsbuch können Sie sich langfristig und gezielt auf die Mathematik-Abiturprüfung in Ihrem Bundesland vorbereiten.

Alle Grundlagen und die neuen Unterrichtsinhalte werden anschaulich und mit vielen Bildern sowie Grafiken erklärt.

Für alle Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad angegeben. Alle Lösungswege stehen zur Verfügung und ermöglichen so eine individuelle und selbstständige Vorbereitung.

ISBN 978-3-9817902-4-5

9 783981 790245

Intensivkurs
Mathematik