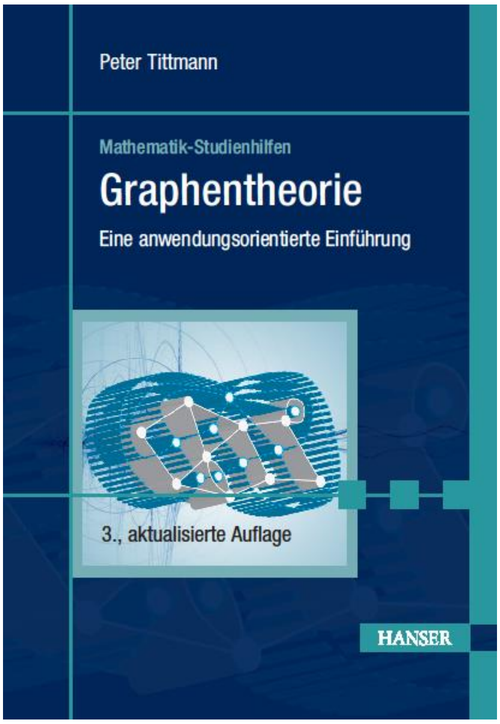
HANSER



Leseprobe

zu

Graphentheorie
eine anwendungsorientierte Einführung

von Peter Tittmann

Print-ISBN: 978-3-446-46052-2
Ebook-ISBN: 978-3-446-46503-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-fachbuch.de/buch/Graphentheorie/9783446460522

sowie im Buchhandel

Vorwort

Mit der Entwicklung und dem massenhaften Einsatz des Computers hat die Mathematik einen tiefgreifenden Wandel erfahren. Diese Veränderungen zeichnen sich durch eine stärkere Betonung diskreter und algebraischer Methoden der Mathematik aus. Gleichzeitig erfordern moderne technische Entwicklungen wie Computer- und Kommunikationsnetze, Mobilfunksysteme, automatische Systeme im Logistikbereich und in der Gentechnologie zunehmend Methoden aus der Diskreten Mathematik. Dazu zählen insbesondere Graphentheorie, Kombinatorik, Kombinatorische Optimierung, Kodierungstheorie, Algorithmenanalyse und Computeralgebra.

Dieses Buch liefert eine Einführung in die Graphentheorie – ein Lehrgebiet, das heute nicht nur in der Mathematikausbildung eine große Rolle spielt. Die vielfältigen Anwendungen der Graphentheorie erlangten auch für Informatiker, Wirtschaftler, Chemiker und Ingenieure eine große Bedeutung. Graphen finden überall dort Anwendung, wo netzartige Strukturen zu analysieren sind. Das können Computernetze, Energieleitungssysteme, elektronische Schaltungen, chemische Verbindungen, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen, Programmablaufpläne oder soziale Netze sein. Das Gemeinsame an all diesen Erscheinungsformen von Netzen ist die abstrakte Grundstruktur, die mathematisch durch einen Graphen dargestellt werden kann.

Für den Lernenden besitzt die Graphentheorie einen Vorteil gegenüber anderen Lehrgebieten: Für das Verständnis der Graphentheorie sind nur geringe Vorkenntnisse aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich. Im Wesentlichen genügen mathematische Schulkenntnisse. Lediglich im zweiten und neunten Kapitel werden die Grundbegriffe der linearen Algebra vorausgesetzt. Dafür wird aber vom Leser die Bereitschaft zum Mitdenken erwartet.

Um selbst Kenntnisse der Graphentheorie für die Analyse von Netzwerken oder für die Entwicklung von Algorithmen einsetzen zu können, ist das Verstehen der Denkweise der Graphentheorie wichtig. Eine große Zahl von Übungsaufgaben und zahlreiche Abbildungen sollen dem Leser helfen, dieses Verständnis zu erlangen. Zunächst muss jedoch das umfangreiche Vokabular der Graphentheorie erlernt werden. Aus diesem Grunde hat dieses Buch einen etwas stärkeren Lehrbuchcharakter als die anderen Bände dieser Reihe. Ein umfangreiches Sachwortverzeichnis und ein Symbolverzeichnis am Ende des Buches erleichtern das schnelle Wiederfinden der Definitionen.

Die hier vorliegende Einführung in die Graphentheorie entstand aus einer Vorlesungsreihe zur Graphentheorie für Studenten der Angewandten Mathematik und der Computertechnologie an der Hochschule Mittweida.

Die ersten acht Kapitel dieses Buches behandeln die Grundlagen der Theorie ungerichteter Graphen. Nach einer Einführung in den Sprachgebrauch der Graphentheorie im ersten Kapitel sind planare Graphen, Unabhängigkeit, Färbungsprobleme, der Zusammenhang von Graphen sowie Bäume und Kreise weitere Schwerpunkte. Das letzte Kapitel liefert eine kurze Einführung zum Thema gerichtete Graphen.

Für die Aufnahme dieses Textes in die *Mathematik-Studienhilfen* danke ich dem Herausgeber dieser Reihe, Herrn Prof. Dr. Bernd Engelmann. Besonders herzlich möchte ich mich bei Frau Christine Fritzsch vom Carl Hanser Verlag für viele wertvolle Hinweise und Ratschläge zur Gestaltung des Werkes bedanken. Mein Dank gilt auch meinem Kollegen André Pönitz für die Unterstützung im Umgang mit dem Satzsystem LaTeX.

Die zweite Auflage des Buches konnte ich für einige Korrekturen nutzen. Ich bedanke mich insbesondere bei PD Dr. Peter John und bei Manja Reinwardt für zahlreiche Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

Ich bedanke mich bei jenen aufmerksamen Lesern des Buches, die mir Hinweise, Kommentare und Anfragen schickten. Diese halfen mir, viele kleine Verbesserungen und Korrekturen in der nun vorliegenden dritten Auflage zu realisieren. Ebenso danke ich auch Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag für die freundliche Unterstützung bei der Buchproduktion.

Mittweida, Januar 2019 Peter Tittmann

Inhaltsverzeichnis

3 Planare Graphen – die Eulersche Polyederformel

Planare Graphen sind solche Graphen, die sich ohne Überkreuzungen von Kanten in eine Ebene zeichnen lassen. Wir nehmen hierbei an, dass die Knoten als Punkte in der Ebene dargestellt werden. Eine Kante entspricht dann einer Kurve, die zwei solche Knotenpunkte verbindet. Diese Definition ist jedoch immer noch unexakt. Was ist eine Kurve? Was heißt Überkreuzung? Wir werden diese Begriffe in den folgenden Abschnitten genauer klären. Hierbei gelangen wir in ein Teilgebiet der Mathematik, das eng mit der Graphentheorie verwandt ist – die **Topologie**. Das ist eine Art verallgemeinerte Geometrie, die ohne solche Begriffe wie Länge, Volumen oder Winkel auskommt. In der Topologie werden Eigenschaften von Figuren untersucht, die bei beliebigen bijektiven stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Dazu gehören zum Beispiel Zusammenhang und Dimension, jedoch nicht Form und Größe.

Zunächst müssen wir jedoch mit der hier gegebenen anschaulichen Definition eines planaren Graphen auskommen. Planare Graphen haben unter anderem für das Schaltkreis-Layout große Bedeutung. Hierbei geht es darum, elektronische Bauelemente so durch elektrische Leiterbahnen zu verbinden, dass keine (oder möglichst wenige) Überkreuzungen der Leitungen auftreten. Sicher kann man nicht durch Probieren aller möglichen ebenen Darstellungen von Graphen feststellen, ob ein Graph planar ist. Deshalb ist ein (möglichst einfach überprüfbares) Kriterium für die Planarität von Graphen gesucht.

Dieses Kapitel liefert eine erste Einführung in die Theorie der planaren Graphen. Leser, die mehr zu diesem Thema wissen möchten, sollten zum Beispiel die Bücher von Sachs [25] oder von Nishizeki und Chiba [21] lesen. Das letztgenannte Buch liefert speziell auch eine schöne Übersicht zu Algorithmen für planare Graphen.

3.1 Planare Einbettungen

3.1.1 Ebene Kurven und Einbettungen

Wie zeichnet man einen Graphen in eine Ebene? Zunächst ordnen wir den Knoten des Graphen Punkte der Ebene zu, sodass verschiedene Knoten stets auf verschiedene Punkte der Ebene abgebildet werden. Die Ebene identifizieren wir mit der Punktmenge $\mathbb{R}^2$. Damit kann die Darstellung der Knoten als Punkte in der Ebene durch eine injektive Abbildung $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ beschrieben werden. Hierbei heißt eine Abbildung ϕ **injektiv**, wenn aus $x \neq y$ stets $\phi(x) \neq \phi(y)$ folgt. Um die Darstellung der Kanten exakt zu beschreiben, müssen wir zunächst einige Grundbegriffe klären. Eine **einfache** (doppelpunktfreie) ebene **Kurve** ist eine stetige injektive Abbildung des Intervalls $[0, 1]$ in die Ebene. Die Stetigkeit ist eine Voraussetzung dafür, dass die Kurve zusammenhängend ist. Die Injektivität der Abbildung sichert die Vermeidung von Doppelpunkten (Selbstüberschneidungen) der Kurve.

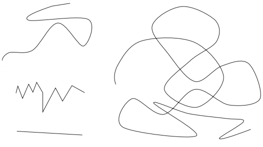


Bild 3.1: Einfache und nichteinfache Kurven

Das Bild 3.1 zeigt links einfache Kurven und rechts eine Kurve mit Doppelpunkten. Eine Kante zwischen den Knoten $u \in V$ und $v \in V$ ist eine einfache Kurve mit den Endpunkten $\phi(u)$ und $\phi(v)$. Damit kann eine Kante insbesondere keine Selbstüberschneidungen besitzen. Verschiedene Kanten können sich jedoch sehr wohl schneiden.

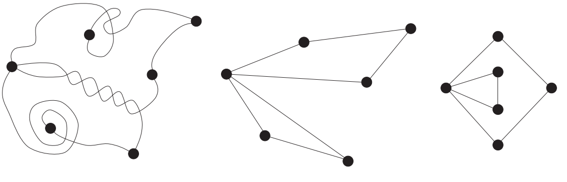


Bild 3.2: Drei Darstellungen eines Graphen in der Ebene

Das Bild 3.2 zeigt drei verschiedene Darstellungen eines Graphen in der Ebene. Nur die erste Darstellung besitzt Kantenüberschneidungen, die beiden anderen jedoch nicht. Die Knoten sind hierbei durch kleine schwarze Kreise dargestellt, um sie besser sichtbar zu machen. Eine Darstellung eines Graphen G in der Ebene ohne Kantenüberkreuzungen nennen wir eine **planare Einbettung** von G.

Wir werden bald sehen, dass nicht jeder Graph eine planare Einbettung besitzt. Damit ergibt sich das Problem, zu entscheiden, welche Graphen planare Einbettungen besitzen und welche nicht. Wir nennen einen Graphen, der eine planare Einbettung besitzt, einen **planaren Graphen**.

3.1.2 Flächen eines planaren Graphen

Eine Punktmenge G der Ebene $\mathbb{R}^2$ heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte aus G durch eine ganz innerhalb von G verlaufende Kurve verbunden werden können. Es sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. Wir betrachten eine Einbettung von G in die Ebene. Wenn wir alle Kanten und Knoten von G (genauer: alle Kurven und Punkte, die den Kanten und Knoten entsprechen) aus der Ebene entfernen, so zerfällt die Ebene in zusammenhängende Gebiete. Diese Gebiete nennen wir die **Flächen** der Einbettung.

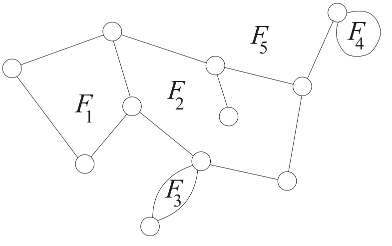


Bild 3.3: Flächen einer Einbettung

Das Bild 3.3 zeigt die Flächen einer Einbettung eines planaren Graphen. Die dargestellte Fläche F_5 ist hierbei die **unendliche** (***äußere***) **Fläche**. Ein Graph ist offensichtlich genau dann planar, wenn alle seine Komponenten planar sind.

3.1.3 Einbettungen auf der Kugel

Jeder Einbettung eines Graphen G in der Ebene kann auch eine Einbettung von G auf der Kugeloberfläche zugeordnet werden. Um die Einbettung in die Kugeloberfläche zu konstruieren, betrachten wir eine **stereographische Projektion**. Dazu denken wir uns eine Kugel $\mathcal{K}$, die auf der Einbettungsebene $\mathcal{E}$ von G liegt. Den Berührungspunkt von $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{E}$ nennen wir auch den Südpol der Kugel. Bild 3.4 verdeutlicht diese Situation. Die vom Nordpol N der Kugel ausgehenden Strahlen zu den Knoten und Kanten der Einbettung von G in $\mathcal{E}$ schneiden die Kugeloberfläche in genau einem Punkt. Die Menge aller dieser Schnittpunkte liefert die gesuchte Einbettung von G in $\mathcal{K}$. Aus dieser Konstruktion folgt auch, dass jede Fläche einer Einbettung eines Graphen in eine Ebene als äußere Fläche einer Einbettung gewählt werden kann. Wir müssen dazu nur die Kugel in der Ebene weiterrollen, bis der Nordpol in der gewünschten Fläche F_i liegt und anschließend die stereographische Projektion in der umgekehrten Richtung ausführen. Dabei erhalten wir eine neue Einbettung des Graphen in die Ebene, die nun F_i als äußere Fläche besitzt. Zwei Einbettungen eines Graphen in die Ebene, die durch diese Konstruktion auseinander hervorgehen, heißen **äquivalent**. Man kann zeigen, dass für dreifach zusammenhängende (siehe Abschnitt 6.1) planare Graphen die Einbettung bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

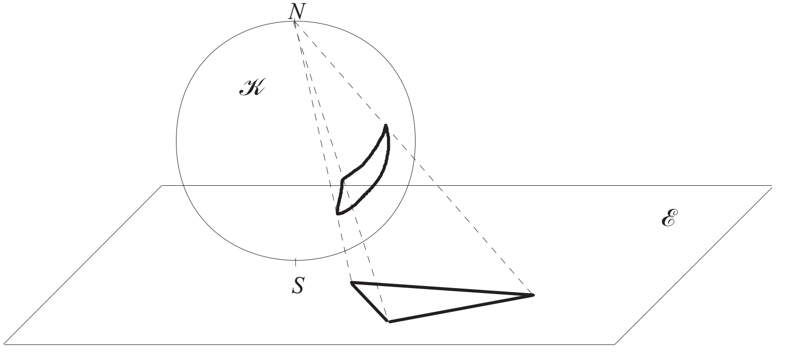


Bild 3.4: Stereographische Projektion

Wir haben gesehen, dass jeder Graph, der in die Ebene eingebettet werden kann, auch eine Einbettung auf der Kugeloberfläche besitzt. Für andere Flächen trifft dies nicht in jedem Falle zu. Auf einem Torus (eine Fläche in Form eines Fahrradschlauches) kann man einen vollständigen Graphen K_7 einbetten. In der Ebene gelingt dies bereits für den K_5 nicht mehr. Die Einbettbarkeit von Graphen bietet damit auch eine Möglichkeit zur Klassifikation von Flächen. Dieser Sachverhalt findet in der Topologie Anwendung. Eine elementare Einführung in die kombinatorische Topologie liefert das Buch von Armstrong [2].

3.1.4 Kreuzungszahl und Dicke

Wenn ein Graph nichtplanar ist, so interessiert man sich manchmal für die „Stärke der Abweichung von der Planarität". Um diesen Begriff etwas genauer zu fassen, führen wir einige Maße für diese Abweichung ein. Die **Kreuzungszahl** (**crossing number**) $\nu(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kantenüberkreuzungen, die bei einer Darstellung des Graphen in der Ebene auftritt. Es erweist sich jedoch als recht schwierig, diese Zahl für einen gegebenen Graphen zu bestimmen.

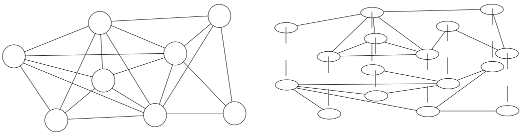


Bild 3.5: Zerlegung eines nichtplanaren Graphen

Ein anderes Maß ist die **Dicke** (**thickness**) $\theta(G)$ eines Graphen G. Das ist die minimale Anzahl planarer Untergraphen von G, deren Vereinigung G ist. Wir können uns diese Untergraphen als Schichten vorstellen, die übereinander gelegt sind. Das Bild 3.5 zeigt einen nichtplanaren Graphen der Dicke 2 und eine Darstellung der beiden planaren Untergraphen als übereinander gelegte Schichten. Solche Darstellungen sind für das Layout elektrischer Schaltungen von Interesse. Die exakte Bestimmung der Dicke eines Graphen ist ebenfalls ein recht schwieriges Thema. Für vollständige Graphen kennt man zumindest das Ergebnis.

Satz 3.1 (Beineke und Harary)
Die Dicke eines vollständigen Graphen mit n $(n \neq 9,\ n \neq 10)$ ist

$$\theta(K_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor .$$

Es gilt $\theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3$.

Hierbei sei für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl gleich oder kleiner x. Den Beweis dieses Satzes findet man in dem Buch von Harary [15].

3.2 Die Eulersche Polyederformel

3.2.1 Polyeder

Ein **Polyeder** ist ein durch ebene Flächenstücke berandeter Körper (ein **Vielflächner**). Wir wollen hier ausschließlich **konvexe Polyeder** betrachten. Das sind solche Polyeder, in denen zwei Punkte des Polyeders stets durch eine ganz im Polyeder verlaufende Strecke verbunden werden können. Ein konvexes Polyeder kann folglich weder Dellen noch Löcher besitzen. Würfel und Tetraeder sind Beispiele für konvexe Polyeder. Wir wollen uns im Folgenden nur für die kombinatorischen Eigenschaften konvexer Polyeder, nicht jedoch für die geometrischen Eigenschaften interessieren. Kombinatorische Eigenschaften sind die Anzahl der Seitenflächen, der Ecken und Kanten oder die Anzahl der Randkanten einer Seitenfläche. Geometrische Eigenschaften sind Kantenlängen, Winkel zwischen Kanten oder das Volumen eines Körpers.

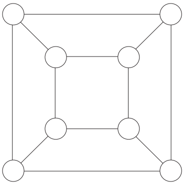


Bild 3.6: Das Kantengerüst eines Würfels als planarer Graph

Was haben Polyeder mit planaren Graphen zu tun? Für die Untersuchung der kombinatorischen Eigenschaften eines Polyeders genügt die Betrachtung des Kantengerüstes, das sich auf folgende Weise auf einen planaren Graphen abbilden lässt. Wir führen zunächst eine Zentralprojektion mit dem Kantengerüst so aus, dass das Bild als Graph auf einer Kugeloberfläche sichtbar wird. Anschaulich kann man sich diesen Prozess wie folgt vorstellen. Wir platzieren zunächst das Kantengerüst des Polyeders (zum Beispiel eines Würfels) im Inneren einer Hohlkugel. Nun stellen wir uns wiederum im Inneren des Polyederkantengerüstes eine punktförmige Lichtquelle vor. Dann fällt der Schatten der Kanten des Polyeders auf die Kugelinnenfläche. Dieser Schatten bildet dort einen Graphen, der keine Kantenüberkreuzungen aufweist. Schließlich können wir den auf der Kugeloberfläche eingebetteten Graphen mittels stereographischer Projektion in die Ebene abbilden. Auf diese Weise können wir die kombinatorischen Eigenschaften eines Polyeders mit einem planaren Graphen darstellen. Das Bild 3.6 zeigt einen planaren Graphen, der das Kantengerüst eines Würfels repräsentiert.

3.2.2 Die Polyederformel für zusammenhängende Graphen

Es sein nun $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph, für den uns eine Einbettung in der Ebene vorliegt. Die Anzahl der Knoten von G sei n, die Anzahl der Kanten m. Die Anzahl der Flächen der Einbettung bezeichnen wir mit f. Diese drei Zahlen erfüllen eine bemerkenswert einfache Beziehung, die Leonhard Euler (1707 – 1783) entdeckte.

Satz 3.2 (Euler)
Für jeden zusammenhängenden planaren Graphen gilt

$$n + f = m + 2. \tag{3.1}$$

Insbesondere ist die Anzahl der Flächen eines planaren Graphen unabhängig von der konkreten Einbettung in die Ebene.

Wir bezeichnen die Gleichung (3.1) im Folgenden als **Eulersche Polyederformel**.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Knoten und Kanten. Für einen Graphen mit nur einem Knoten und keiner Kante gilt die Formel offensichtlich. In diesem Falle ist $n = 1$, $f = 1$ und $m = 0$. Es sei nun G ein Graph mit n Knoten und m Kanten, welcher die Eulersche Polyederformel (3.1) erfüllt. Wir werden zeigen, dass dann auch jeder Graph, der einen Knoten oder eine Kante mehr besitzt, diese Formel erfüllt.

Nehmen wir zunächst einen Knoten hinzu. Damit der neue Graph wieder zusammenhängend ist, müssen wir gleichzeitig eine neue Kante erzeugen. Entweder wir platzieren den Knoten auf einer der vorhandenen Kanten, wobei diese Kante in zwei neue Kanten unterteilt wird oder wir setzen den Knoten in irgendeine Fläche und verbinden ihn durch eine neue Kante mit einem bereits vorhandenen Knoten. In beiden Fällen nimmt die Anzahl der Knoten und Kanten um je 1 zu und die Anzahl der Flächen bleibt konstant. Damit addieren wir je 1 zu beiden Seiten der Gleichung (3.1), sodass diese Gleichung gültig bleibt.

Eine neue, in G eingefügte Kante verläuft ganz im Inneren einer Fläche der Einbettung. Diese Fläche wird folglich in zwei neue Flächen zerlegt. Damit nimmt bei dieser Operation die Anzahl der Kanten und Flächen um je 1 zu, sodass wiederum die Eulersche Polyederformel erhalten bleibt. Folglich gilt sie für alle zusammenhängenden planaren Graphen. □

Die Eulersche Polyederformel lässt sich für den Würfel nach Bild 3.6 leicht überprüfen. Dieser Graph (ebenso wie der Würfel als Körper) besitzt 8 Knoten (Ecken), 12 Kanten und 6 Flächen. Tatsächlich ist $8 + 6 = 12 + 2$. Die oben beschriebene Projektion des Kantengerüstes eines konvexen Polyeders begründet auch den Namen **Polyeder**formel, obwohl wir zunächst eine Beziehung über planare Graphen bewiesen haben.

3.2.3 Die Polyederformel für nicht zusammenhängende Graphen

Die Eulersche Polyederformel lässt sich auch für nicht zusammenhängende Graphen verallgemeinern. Es sei G ein planarer Graph mit c Komponenten. Für jede Komponente gilt die Beziehung (3.1). Wir müssen jedoch beachten, dass sich alle Komponenten die äußere Fläche teilen. Damit haben wir insgesamt $c - 1$ Flächen weniger. Es folgt $n + f - (c - 1) = m + 2$ oder

$$n + f - c - m = 1.$$

Die relativ einfache Polyederformel besitzt erstaunlich weitreichende Konsequenzen für die gesamte Theorie planarer Graphen sowie zahlreiche Anwendungen in der Topologie. Sie lässt sich noch allgemeiner fassen, sodass sie auch für Flächen beliebigen Geschlechts (was immer das ist) und für höherdimensionale Räume gilt. Eine elementare Einführung zu diesen Fragen liefert das Buch von Boltjanskij und Efremovic [8].

3.3 Anwendungen der Polyederformel

3.3.1 Nichtplanare Graphen

Die Eulersche Polyederformel gestattet uns auf einfache Weise zu zeigen, dass es tatsächlich nichtplanare Graphen gibt. Unser Ziel ist es zunächst, möglichst kleine nichtplanare Graphen zu finden. Dabei können wir uns auf schlichte Graphen beschränken, da für jede planare Einbettung eines Graphen beliebig viele parallele Kanten und Schlingen ergänzt werden können, ohne die Planarität zu stören.

Folgerung 3.3
Der vollständige Graph K_5 ist nichtplanar.

Beweis: Wir zeigen diese Aussage indirekt mit der Eulerschen Polyederformel. Angenommen K_5 ist ein planarer Graph. Eine Einbettung müsste dann

$$f = m + 2 - n = 10 + 2 - 5 = 7$$

Flächen besitzen. Jede Fläche wird von mindestens drei Kanten berandet. Andererseits berandet jede Kante gleichzeitig zwei Flächen. Damit folgt

$$3f \leq 2m.$$

Sachwortverzeichnis