Alexander Grüneis

Rechenförderung – konkret
Übungsformate im Dialog

Hilfestellung für die Unterstützung von Kindern
mit oder ohne Rechenschwierigkeiten

Eigenverlag

„Es gibt nichts Ungerechteres als die gleiche Behandlung von Ungleichen.“

Paul F. Brandwein

1.Auflage 2018

www.rechenschwaeche.co.at

Autor: Mag. Alexander Grüneis, akademischer Therapeut für Rechenschwäche
Vorwort: MMag[a]. Silvia Schubhart, DI Katharina Lohr MEd, Mag[a]. Birgit Oosthuizen-Noczil
Fotos: Mag. Peter Giovannini und Mag. Alexander Grüneis
Lektorat: Mag[a]. Lisbeth Grüneis und Silvia Tersch

Druck: digiDruck.at, Österreich
ISBN: 978-3-200-05724-1

Inhaltsverzeichnis

Die rot markierten Teile können in diesem Auszug angesehen werden

Inhaltsverzeichnis 3
Vorwort einer Psychologin 9
Vorwort einer Lehrerin 10
Vorwort einer Mutter 10
Einleitung 12
Grundlegende, kritische Gedanken 14
Das Delta 14
Orientierung an den Fortschritten 15
Optimierung des Unterrichts 15
Zentraler Anspruch: Streben nach inhaltlichem Verständnis 15
Individualisierende Unterrichtselemente 17
Individualbetreuung und Therapie 19
Aspekte des Gruppenunterrichts 20
Aktiv entdeckendes Lernen 21
Unterrichtsplanung 23
Eltern-Lehrerinnen-Gespräche 24
Umgang mit Fehlern 25
Realistische Möglichkeiten 27
Anschauungs- bzw. Übungsmaterial 29
Über die Bedeutung des Dialogs und diese Übungssammlung 30
Lehrinhalte von Vorschule und Volksschule 34
Zeichenerklärung 37
Übungsteil 38
Cuisenairestäbe 38
„Gefühlte“ Längenabschätzung und Längenvergleich 39
Doppelt so lang 39
Halb so lang 39
Ergänzen auf 40
Zerlegen in zwei Teile 40
Zerlegen in Teile 40
Zusammenhang von Stäbchenlänge und Kardinalität 41
Zehner und Einer 42
„Wer schafft es mit weniger?“ 43
Bündelung 43
Entbündelung 44
Gleich lange Linien 44
Wie oft passt es hinein? 44
Geschätzt wie lang? 45
Flächen bestimmen 45
Volumen bestimmen - Nachbauen 46
Fingerbilder 47
Abzählübungen 48
Zerlegungen mit Fingerbildern und Stift 49
„Fingerbildblinken“ 49
Fokussierung auf die Zahlbeziehungen zu 5 und 10 50
Eins mehr, eins weniger 51
Verdoppeln mit Hilfe der Fingerbilder 51
Überschreiten in den zweiten Zehner mit Hilfe der Fingerbilder 52
Verknüpfung von Zehnerfeldern und Fingerbildern 52

Wendeplättchen 53
Plättchenwürfeln (Zahlenzerlegungen ZR 10) 53
Zerlegungen – gegensinnige Veränderung 54
Zehnerfeld und Wendeplättchen 55
Anzahl: Schätzen mit Zählkontrolle 56
Muster mit Wendeplättchen 56
Anzahlen auf einen Blick (Simultan-/Quasisimultanerfassung) 57
Zerlegungen und Rechnungen 57
Anzahldarstellung mit Hilfe der Kraft der Fünf 60
Anzahldarstellung in Anlehnung an Verdopplungen 61
Übungen mit dem beschrifteten (Zehner-) Zwanzigerfeld 61
Materialhinweise für alternative Zehner- und Zwanzigerdarstellungen: 63
Eierkartons mit Plastikeiern für die Stellenwertarbeit 64
Dienesmaterial – Stellenwertmaterial aus Holz 65
Zusätzliche Fördermaterialien zur Kombination mit dem Dienesmaterial 67
Gedanken zur Methodik beim Einsatz von Dienesmaterial 69
Zerlegungsübungen mit Einerwürfeln 71
Zählübungen mit Dienesmaterial 71
Gerade und ungerade Zahlen 72
Unterschied und „Zehnerfreunde“ 72
Bündeln und Entbündeln durch Tauschhandlungen 73
Stellenwert-„Übersetzungsdreieck“ 73
Fehler beim Schreiben oder Sprechen von Zahlen im Deutschen 74
Strukturierung von Anzahlen 75
Quasisimultanerfassung bei kurzer Stellenwertmaterialvorgabe 76
(An-)Zahlen auf Anweisung verändern 76
Tausender- oder Hunderter-Würfelspiel 77
Tausender auf- und abbauen 78
Ordnen von Zahlen, Größenvergleiche 78
Unterschied zweier Anzahlen 79
Halbieren und Verdoppeln 80
Vorgänger und Nachfolger, Zahlennachbarn 81
Analogien 82
Schnelles Erkennen von Anzahlen mit Hunderter(feld) und Abdeckwinkel 83
Übergang vom Dienesmaterial auf den Zahlenstrahl 84
Übung zur Betonung der Wertigkeit der Positionen von Ziffern in Zahlen 86
Begleitung von Strichrechnungen mit Dienesmaterial 87
Begleitung überschreitender Additionen mit Dienesmaterial 88
Begleitung unterschreitender Subtraktionen mit Dienesmaterial 91
Ergänzen auf volle Zehner 93
Abziehen von ganzen Zehnern 95
Einfache Rechnungen 96
Neuer Zehner oder nicht / Zehner angebrochen oder nicht 96
Grundlagen des Einmaleins, Malnehmen, Malrechnung 97
„Zauberrechnung“ 10 · 100
Einmaleinsfelder am Dienes-Hunderter 101
Großes Einmaleins mit Dienesmaterial 103
Divisionen mit Dienesmaterial: Teilen, Verteilen 104
Divisionen mit Dienesmaterial: Messen, Enthaltensein, Aufteilen 105
Begleitung schriftlicher Rechenverfahren mit Dienesmaterial 107
Begleitung schriftlicher Additionen mit Dienesmaterial 107
Begleitung schriftlicher Subtraktionen mit Dienesmaterial 110
Begleitung schriftlicher Multiplikationen mit Dienesmaterial 115
Begleitung schriftlicher Divisionen mit Dienesmaterial 117

Kleiner Zahlenraum **120**
Einführung des Gleichheitszeichens 121
Zeichensetzung beim Größenvergleich von Zahlen 122
Zahlenzerlegungen mit Punktmustern 122
Doppelt und halb in kleinem Zahlenraum 123
Kraft der Fünf, gebündelte Fünf 123
Null muss nicht warten 124
Dekadisches Stellenwertsystem **125**
Nachbarzahlen, Stellenwertnachbarn 125
Zahlenstrahl, Zahlenstrich, Rechenstrich 127
Zählübungen in größeren Zahlenräumen 129
Stellenwerttafel, -tabelle 130
Ergänzen auf volle Stellenwerte 131
Stolperstein Deutsche Sprache 131
Größenvergleich von Zahlen 132
Schätzübungen mit größeren Anzahlen 132
Schnelles Erkennen von Anzahlen 133
Zahlenraum 100 134
Große Zahlen 135
Strichrechnungen **137**
Kleiner Zahlenraum **139**
Zahlenzerlegungen 139
Zahlentreppe 140
Rechenkartei für Strichrechnungen im Zahlenraum 10 140
Strategiekarten im Zahlenraum 10 141
Zahlenraum Hundert und mehr **143**
Subtraktion: Wegnehmen oder Ergänzen 143
Fragen über Fragen 143
Stellenwertübergänge **145**
Stellenwertübergang oder nicht? 145
Additive Überschreitung von 10 146
Überschreitungen in beliebigen Zahlenräumen 147
Subtraktionen mit Unterschreitungen im Zahlenraum 100 148
Subtraktionen mit Unterschreitungen in beliebigen Zahlenräumen 149
Halbschriftliches Rechnen **150**
Schriftliche Rechenverfahren **152**
Schriftliche Verfahren der Addition 152
Schriftliche Verfahren der Subtraktion 153
Strichrechenformate **155**
Rechnungen aus einigen der zehn Ziffern 0 – 9 nach Vorgaben 155
Selbstkontrollformat: Ergebniszahl wird Ausgangszahl 155
Schöne Päckchen 156
Punktrechnungen **157**
Multiplikation **157**
Aufbau des Einmaleins 157
Zusammenhänge, Strategien 160
Leichte Aufgaben 161
Ableitung aus den Verdopplungen 161
Zusammenhänge bei mehreren Multiplikatoren 162
Schöne Einmaleins-Päckchen 163
Malaufgaben würfeln 164
Gerade oder ungerade 164

Einmaleinsergebnisse über 50 165
„Forschungsfragen“ und kleine Einmaleins-Spiele 165
Schwarzer Peter Einmaleins 166
Produktsumme 166
Großes Einmaleins und Kopfrechnungen darüber hinaus 167
Aufgabenfamilien 169
Quadratzahlen 170
Halbschriftliche Multiplikation 171
Malkreuz, Multiplikationstafel 171
Teilprodukte 172
Schriftliche Multiplikation 172

Division ....

Aufbau des Dividierens, Teilen und Messen 175
Handelnde Startübungen 175
Teilen und Messen im gleichen Kontext 176
Auswirkungen veränderter Operatoren 177
Divisionsstrategien 177
Wie oft mal? 178
Punktfelder 178
Aufgabenfamilien 179
Gleicher Rest 180
Rolle der Null bei Divisionen: 180
Schöne Einsineins-Päckchen, Kopfrechnen 181
Halbschriftliches Dividieren 181
Zerlegung in Teilaufgaben 182
Schriftliches Dividieren 184
Übungsformate 185

Runden, Schätzen, Überschlagsrechnungen 186

Schätzen mit vorgegebenen Zielbereichen 187
Was kommt heraus? 188
Guter Überschlag 188
Überschläge sparen Arbeit 189
Rechnung gesucht 189
Wie lautet das Rechenzeichen? 189

Kopfrechnen, halbschriftliches und schriftliches Rechnen, Taschenrechner 190

Rechnen, aber wie? 191
Rechenwettkampf *Mensch gegen Maschine* 191
Forschungsfragen für den Taschenrechner 191

Maße, Einheiten, Umwandlungen 193

Zu einem vorgegebenen Gegenstand Schätzungen abgeben 195
Gegenstand nach vorgegebenem Kriterium suchen 197
Vorgegebene(s) Intervall(e) 197
Herstellen einer vorgegebenen Länge, Masse etc. 197

Länge 198
Masse 201
Fläche 204
Volumen 207
Flüssigkeit 210
Währung 212
Zeit 214

Grundlegende Gedanken und Übungen zu Brüchen 218

Ein Teil vom Ganzen: Stammbruch bei kontinuierlichen Mengen 218
Das Ganze als X-faches des Teils einer kontinuierlichen Menge 218
Vielfaches eines Stammbruchs mit kontinuierlicher Menge 219

Brüche bei diskreten Mengen 219
Größenvergleich von Brüchen 220
Sachaufgaben, Textaufgaben 221
Begriffe, Aufgabenarten 221
Aufgabenauswahl und -gestaltung 222
Bearbeitungsaspekte 224
Kritische Betrachtungen 226
Jahrgangsübergreifende Aufgabenformate 228
Zahlenmauern 228
Unterschiedsmauern 230
Rechen-, Zauberdreiecke 231
Magische Quadrate, Zauberquadrate 232
Streichquadrate 234
Herstellung von Streichquadraten 234
Fortlaufendes Verdoppeln Halbieren 235
Gleicher Abstand 235
Zahlen-Rechenmuster 235
Zahlenkette 236
Zahlen abbauen 236
Zahlen zusammensetzen 237
Drehwurm 238
Rechnung gesucht 238
Nahe an 100, an 1 000 oder an 0 gelangen 238
Kleine Selbstkontrollformate 239
Zahl und Umkehrzahl 239
Rechenauftragsfolge 239
Summe minus Differenz 239
Kaprekar-Konstante 6174 und 495 239
Ergebnis 222 oder 22 240
Vielfache von 99 240
Immer 1089 240
Halbieren verboten - Zerlegungsübung 240
Schätz- und Überschlagsübungen 241
Zahlenfelder abdecken 242
Mittelwerte 243
Spielformen 243
Würfelspiele 243
Ergebnis zählt 244
Zielzahl 244
Unterschied zählt 244
Zahlenzerlegungen 244
Eins unerwünscht 244
Würfel-Blackjack 244
Zeile und Spalte 245
Runden im Tausender 245
Einmaleinswürfeln 245
Reihen streichen 245
Zehn Würfe 246
Elfmal Mal 246
Rate mal 246
Mehr oder weniger 246
Zehn Runden 246
Mal, mal, mal und durch, durch, durch 247

Nicht über Tausend, nicht unter Null 247

Zahlenkarten 247
Drunter oder drüber 247
Ordnungsmemory 247
Zehnmal eine Zahl 248
Fünfzehn 248
Weitere Spielformen 248
Ligretto-Zehnerfreunde 248
Zahlenraten 249
Kegelzahlen - Zehnerfreunde 249
Zahlwort und Ziffernschreibweise 250
Bingoidee 250
Spielempfehlungen 251
Lehrmittelanbieter 251
Schlusswort 252
Literaturempfehlungen 255
Kopiervorlagen 256
Zahlwörter und Ziffernschreibweise im Zahlenraum 100 256
3D-Darstellungen der Stellenwerte: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender 257
3D-Darstellungen der Stellenwerte vom Einer bis zur Million 259
Ziffernblätter mit Zeigern 260

Vorwort einer Psychologin

Während das Thema Rechenschwäche vor vielen Jahren oft nur als Nebenkommentar zur seit langer Zeit „etablierten" Lese-Rechtschreibschwäche genannt wurde, ist in den letzten Jahren eine zunehmende Bewusstwerdung im öffentlichen und insbesondere im pädagogischen und psychologischen Raum festzustellen. Dieser Prozess ist mit Zuversicht und Hoffnung in Hinblick auf die Förder- und Entwicklungschancen betroffener Kinder zu sehen. Je nach Berufsgruppe differieren die dabei verwendeten Begrifflichkeiten wie Dyskalkulie, Rechenstörung, Rechenschwäche, Lernstörung im Bereich Mathematik usw. Für alle jene, die sich in der Praxis intensiv mit Kindern mit Schwierigkeiten im Rechenerwerb beschäftigen, zählt jedoch nicht die genaue Titulierung oder „Diagnose", sondern im Grunde genommen nur eines: Das Kind in seinen individuellen Denkmustern und Rechenstrategien zu verstehen und dieses Verständnis und das fachliche Wissen für eine auf das Kind abgestimmte Therapie und Förderung zu nutzen. Dabei sind der diagnostische Blickwinkel einerseits und die therapeutische Förderarbeit andererseits als integrativer, sich ergänzender Prozess zu verstehen, welcher es ermöglicht, die Begleitung adaptiv an das Kind anzupassen. Erst dann können die Ressourcen und Entwicklungspotenziale des Kindes optimal ausgeschöpft und Lernfortschritte erlebbar werden.

Der Titel des vorliegenden Buches „Übungsformate im Dialog" spricht damit eine wesentliche Voraussetzung gelingender Förderung an. Diese meint nämlich explizit keine einseitige „Wissensvermittlung" von mathematischen Inhalten eines „Experten[1]" (Therapeuten, Pädagogen/Lehrers, Psychologen), sondern ein lebendiges, kommunikatives Miteinander zwischen Kind und Betreuer. Mit diesem Verständnis von Förderung bzw. Therapiearbeit wird evident, dass dazu ein besonderes Setting bzw. spezielle Rahmenbedingungen notwendig sind, welche es dem Kind ermöglichen, sich zu öffnen und Einblick in seine eigenen mathematischen Denkweisen zu geben. Oft ist dies für Kinder anfangs ein überraschender Zugang, da im schulischen und häuslichen Kontext das Interesse sehr häufig lediglich dem „Rechenergebnis" (welches richtig oder falsch sein kann) gilt. Die Bereitschaft, sich auf jedes Kind individuell einzulassen und gemeinsam mit diesem dessen „mathematische Welt" zu erkunden, lohnt sich aus therapeutisch-didaktischer und emotional-psychologischer Sicht in hohem Maße. Dies gilt sowohl für den Betreuer/Therapeuten als auch für die Eltern und den unterrichtenden Lehrer des Kindes. Erst dann wird klar, wo und wie inhaltlich mit der Förderarbeit zu beginnen ist. Des Weiteren wird deutlich, welch enormer „Kraftakt" bzw. Mehraufwand es für ein Kind bedeutet, ein „richtiges Ergebnis zu produzieren". Häufig muss es nämlich beim Rechnen auf sehr gedächtnis- und konzentrationsintensive Kompensationsstrategien ausweichen. Dem von Rechenschwäche betroffenen Kind muss daher großer Respekt gezollt werden, dass es angesichts dieser gedanklichen Anstrengungen überhaupt noch bereit ist, sich mit dem Rechnen bzw. mit Zahlen auseinander zu setzen. Ist dieses Bemühen einem als Betreuer, Eltern und Lehrer bewusst, wird dies gewürdigt und dem Kind auch entsprechend positiv rückgemeldet, ist damit ein emotional stärkendes Lernklima und eine vertrauensvolle (therapeutische) Beziehung geschaffen.

Alexander Grüneis wird beiden Aspekten – dem fachlich-inhaltlichen sowie emotional-therapeutischen – mit dem vorliegenden Werk in besonderer Weise gerecht. So bietet dieses Buch zum einen eine wertvolle Sammlung von in der Praxis bewährten Übungsideen, welche in ihrer gezielten Auswahl und konkreten Beschreibung eine enorme Bereicherung für all jene darstellen, die Kinder in ihrer rechnerischen Entwicklung unterstützen wollen. Zum anderen lässt Alexander Grüneis seine Leser an seinem reichen Erfahrungsschatz im therapeutischen Umgang mit Kindern, Eltern und Lehrkräften teilhaben, da nur eine gemeinsame, konstruktive Kooperation eine langfristige emotionale Entlastung des Kindes und häufig des gesamten Lernumfelds bewirken kann. Und Alexander Grüneis gibt Hoffnung – Hoffnung, dass durch das individuelle Lernen im Dialog eine hochqualitative und damit noch wirksamere und nachhaltigere Förderung von Kindern mit Rechenschwäche gewährleistet wird.

Silvia Schubhart — Linz, im Juni 2018

1 Zugunsten der leichteren Lesbarkeit werden Personenbezeichnungen hier in der männlichen Form gewählt, wobei dabei stets auch alle weiblichen Personen in der Bedeutung eingeschlossen sind.

Vorwort einer Lehrerin

Aus Sicht einer Lehrperson nimmt das Erkennen und Diagnostizieren von Rechenschwäche im Allgemeinen in den letzten Jahren, vor allem auch im Hinblick auf die 2017 herausgegebenen „Richtlinien für den Umgang mit Kindern mit besonderen Schwierigkeiten im Erlernen des Rechnens“, einen immer wichtigeren Stellenwert ein. Für Volksschullehrer/innen ist es daher ein Grundanliegen Schüler/innen frühestmöglich zu entlasten, und so negative Auswirkungen auf die weitere schulische Laufbahn und die individuelle Persönlichkeitsentwicklung zu verhindern.

Dabei steht für mich in erster Linie nicht die reine Diagnose einer Rechenschwäche, Dyskalkulie oder Rechenstörung im Vordergrund, sondern vielmehr zu erkennen „wie denkt denn der/die Schüler/in“ eigentlich und wie werden infolgedessen ungeeignete Lösungsmuster für die ersten mathematischen Grundlagen wie den Zahlenaufbau und die Grundrechenarten entwickelt.

Obwohl man sich als Lehrer/in der Erkennungsmerkmale einer Rechenschwäche (z.B.: fehlender Zahlaspekt, mangelnde Größenvorstellung, zählende Rechenstrategien, fehlende Einsicht in das Stellenwertsystem, etc.) bewusst ist, ist es aus meiner Sicht gerade in der Grundstufe 1 oftmals sehr schwierig, rasch zu erkennen, ob ein Kind gewisse Probleme beim Rechnen entwickelt bzw. unbewusst eintrainiert. Denn betroffene Mädchen oder Buben schaffen es oft, häufig sogar über einen sehr langen Zeitraum, sich mit wesentlich komplizierteren bzw. gedanklich aufwändigeren Denkmustern durch den Stoff der ersten beiden Klassen durchzukämpfen. Dieses spezifische Denken und Rechnen von Kindern mit einer Rechenschwäche erfordert ein erhöhtes Maß an Konzentration und wirkt sich in immenser Anstrengung selbst bei „einfachsten“ Aufgabenstellungen aus. Trotz der Unterstützung durch zahlreiche Hilfsmittel (Legesteine, Perlenmaterial, etc.), welche im heutigen Mathematikunterricht allgegenwärtig sind, ist es oft schwierig den richtigen mathematischen Zugang für jedes einzelne Kind individuell zu finden. Verpasst man den Zeitpunkt um noch rechtzeitig das mathematische Denken in die richtige Richtung zu steuern, folgen oft Frustration und Misserfolg, und das, obwohl das Kind doch schon viel mehr leistet, als seine Mitschüler.

In dieser Situation fällt auch oft der Einwand „Spätestens mit dem Erlernen der schriftlichen Grundrechnungsarten wird dann alles leichter“, doch dem ist aus meiner Sicht nicht so zuzustimmen. Natürlich stellen die schriftlichen Rechenverfahren im ersten Moment eine große Erleichterung dar, doch die Einsicht in die mathematischen Abläufe dahinter, wie z.B. das Ergänzen beim schriftlichen Subtrahieren, stellen oftmals nach wie vor Stolpersteine dar.

So sehr man als Lehrperson jedem Kind gerecht werden möchte, so ist es doch eine große Unterstützung, auf fachspezifisch noch differenzierter ausgebildete Hilfe zurückgreifen zu können und so den Prozess des Erkennens der unterschiedlichen Denkmuster zu beschleunigen bzw. dem Kind individuell passende Strategien anbieten zu können. Das vorliegende Buch bietet aus meiner Sicht in Verbindung mit einer individuellen Lernbetreuung eine optimale Basis, um Schüler/innen mit einer Rechenschwäche optimal zu unterstützen und zu fördern, und somit Angst und Frustration im Hinblick auf die Mathematik und das Rechnen abzubauen.

Katharina Lohr — Wien, im Juni 2018

Vorwort einer Mutter

Als Mutter einer 9-jährigen Tochter erstmals mit dem Begriff Dyskalkulie konfrontiert zu werden, hat Schuldgefühle entstehen lassen, die sich erst nach eingehender sachlicher Auseinandersetzung mit dieser Thematik aufzulösen begannen. Mögliche Ursachen und Antworten zu finden, mit Intelligenz in Verbindung zu bringen und sogar Vererbbarkeit in Betracht zu ziehen, kann ich aus eigener Erfahrung sagen, hilft niemandem, am wenigsten dem Betroffenen, der dadurch noch mehr verunsichert wird.

Während dieser Zeit habe ich gemerkt, dass mehr Kinder als angenommen mögliche Teilleistungsschwächen haben, über Defizite seiner Sprösslinge nicht gerne geredet wird und man schon gar nicht davon betroffen sein möchte. Fast schon stigmatisiert fühlt man sich. Vor allem wenn der Lehrer durch wiederholte Gespräche auf Probleme des Kindes, das sich in einer „rechenstarken“ Klasse befand, aufmerksam machte, und aus pädagogischer Sicht während des Unterrichts wenig auf die Psyche von betroffenen Schülern und Schülerinnen Rücksicht nahm.

Anzeichen für eine mögliche Rechenschwäche habe ich zwar wahrgenommen, aber erst spät richtig deuten können, da ich bis zu diesem Zeitpunkt wenig darüber wusste und meine Tochter durch angelernte, aber langfristig ungeeignete Rechenmethoden ihre Schwäche verbergen konnte. Mit größtem Energieaufwand versuchte sie ihr Bestes zu geben, um nicht aufzufallen. Erschöpfungsanzeichen, Frustration und Versagensängste, die sich zunehmend verstärkten, waren die Folge. Erst dann begriff ich, dass ihre von Anfang an vorhandenen Verständnisschwierigkeiten für Mathematik sich nicht durch intensives Üben verbessern würden, sondern professionelle Unterstützung notwendig war und dass rechenschwache Kinder trotz größter Anstrengung nie die gleichen Leistungen erbringen können wie Kinder ohne.

Neben dem Förderunterricht in der Schule begann ich mir auch außerhalb dieses Umfelds Unterstützung und Beratung zu suchen, da zunehmend das Selbstwertgefühl und die Lernfreudigkeit meiner Tochter unter dem unsensiblen Umgang seitens der Schule, aber auch seitens meiner Ratlosigkeit litt.

Ich bin überzeugt, dass der Lernerfolg und die Schulzeit die spätere Einstellung als Erwachsener zum Leben prägen und für das seelische Wohlbefinden in allen Lebensphasen erheblich verantwortlich ist. Deshalb war es für mich so wichtig, meiner Tochter rechtzeitig die bestmögliche Unterstützung und die Chance zu geben, gestärkt und selbstbewusst ins Leben treten und auf eine positive Schulzeit zurückblicken zu können.

Durch Zufall erfuhr ich vom Schmunzelclub Döbling unter der Leitung von Herrn Alexander Grüneis, der rechenschwache Kinder in Zusammenarbeit mit Eltern individuell unterstützt.

Die vielen Frustrationen ließen meine Tochter oft an ihren Fähigkeiten als ausgesprochen kreative und phantasievolle Persönlichkeit zweifeln. Herr Grüneis hat in einer wertschätzenden Atmosphäre meinem Kind nicht nur mathematisches Wissen vermittelt, sondern die Gesamtheit meiner Tochter und ihre besonderen Talente gesehen.

Er schaffte es immer wieder, meine Tochter durch seine einfühlsame heiter-mitreißende und spielerische Art zu motivieren, ohne dabei von seinem mathematischen Programm abzuweichen. Ihrem Bewegungsdrang konnte er durch sportliche Pausen mit Jonglieren oder anderen Geschicklichkeitsspielen abhelfen.

Herr Grüneis bewies Ausdauer und Konsequenz, wenn es um Erklärungen und Verständnisvermittlung ging und arbeitete sehr erfinderisch mit seiner umfangreichen Materialsammlung, die er regelrecht aus seinem Kästchen zauberte und damit meine Tochter begeisterte.

Eine Mutter macht es glücklich, wenn sie nach der Therapiestunde mit einem emotional gestärkten und motivierten Kind nach Hause gehen kann. Diese positiven Erfahrungen haben meiner Tochter beim Umgang mit frustrierenden Erlebnissen im schulischen Alltag sowie bei der Mehrfachbelastung, indem die Basis aus der 1. Klasse gefestigt und zusätzlich der aktuelle Schulstoff des 3. Jahrgangs gelernt werden musste, sehr geholfen.

Auch ich wurde von Herrn Grüneis stets ermutigt und gekonnt überzeugt, regelmäßig und konsequent das Übungsprogramm zu Hause mit meiner Tochter durchzuführen, auch wenn von ihrer Seite teils großer Widerstand zu spüren war und mich an der Sinnhaftigkeit zweifeln ließ. Er hat mir geholfen, mein Kind besser zu verstehen, und ich lernte mit Geduld, ebenso die kleinen Fortschritte zu erkennen, die letztendlich zum Erfolg führten.

Die gemeinsame Zeit und Zusammenarbeit war für uns eine Bereicherung, was bei unserer Schulentscheidung richtungs- und somit zukunftsweisend war. Heute besucht meine Tochter erfolgreich die 2. Klasse AHS und hat teils ein besseres mathematisches Verständnis als einige andere Schüler und Schülerinnen in der Klasse.

Ich möchte mich bei Herrn Grüneis für seine professionelle Unterstützung bedanken, der seinen Beruf, oder besser gesagt, seine Berufung aus Überzeugung und mit Leidenschaft ausübt und meiner Tochter durch wertschätzende Zuwendung und pädagogischem Feingefühl neben mathematischen Fähigkeiten auch ein angstfreies Denken vermittelt und ihr Selbstwertgefühl gestärkt hat.

Birgit Oosthuizen-Noczil Wien, im Juni 2018

Einleitung

Fest steht, dass es sie gibt,

die rechenschwachen Kinder. Ungeachtet dessen, welche Definitionen für Rechenschwäche (Dyskalkulie, Rechenstörung) dieser Beurteilung zugrunde liegen und welche diagnostischen Mittel eingesetzt werden, ist mittlerweile unumstritten, dass es Kinder gibt, die trotz guten Unterrichts und entsprechender Unterstützung im Elternhaus nicht in der Lage sind, grundlegende mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten im gleichen Zeitraum wie andere Kinder in erforderlichem Ausmaß zu erwerben oder zu entwickeln und daraus resultierend besonderer unterstützender Maßnahmen abseits des Regelunterrichts bedürfen.

Das Interesse ist groß, der Bedarf nicht minder

Viele positive Rückmeldungen zum Buch „Rechenschwäche – konkret" und das große Interesse an Vorträgen und Fortbildungen zu diesem Thema an Schulen, pädagogischen Hochschulen und anderen Bildungseinrichtungen zeigen mir dies deutlich auf. Der Bedarf an nützlichen Informationen und Übungsideen zeigt sich sowohl auf Seite betroffener Eltern, als auch auf jener von Lehrerinnen* mit rechenschwachen Kindern in deren Klassen.

Es ist nicht einfach

Vielfach ist nach wie vor eine große Verunsicherung wahrzunehmen, oft auch Ratlosigkeit, wie Kindern geholfen werden kann, die offensichtlich bereits den Anschluss in ihrem Denken über Zahlen und Rechnen an die anderen Kinder der Klasse verloren haben.

Was notwendig ist, ist bekannt

Einigkeit besteht weitgehend darüber, dass die **stärkste Maßnahme** in der **Früherkennung** liegt und in der daraus resultierend **frühen Intervention**. Leider finden hier nach wie vor Versäumnisse statt, weil so manche auf das sprichwörtliche „Aufgehen des Knopfes" warten, was sich nicht selten als unterlassene Hilfestellung entpuppt und den notwendigen Förderprozess unnötig verzögert und somit oft deutlich erschwert. In jedem Fall gestaltet sich eine erfolgreiche Förderung umso schwerer, je später deren Notwendigkeit wahrgenommen wird.

Außerdem sind Risikofaktoren, die bereits im Kindergartenalter klare Hinweise auf eine hohe Wahrscheinlichkeit für die Entstehung von Problemen in der Entwicklung mathematischen Denkens geben können, durchaus bekannt.

Rechenschwache Kinder benötigen keinen anderen Mathematikunterricht als andere Kinder, sondern einfach nur einen guten, zumeist in einem anderen Tempo des Voranschreitens

Darüber hinaus steht für mich fest, dass der Förderprozess bei einem Kind mit massiven Problemen (Rückständen) nur dann erfolgreich sein kann, wenn er (zumindest auch begleitend) in Form einer an das Kind angepassten **Einzelförderung** erfolgt, und selbst dann ist es oft nicht einfach und schon gar nicht immer *so nebenbei* möglich, denn

gute Rahmenbedingungen stellen einen entscheidenden Erfolgsfaktor dar

Zusammenfassend können folgende **Faktoren als wichtigste Puzzlesteine einer erfolgsversprechenden Förderung** betroffener Kinder genannt werden: Eine möglichst frühzeitige Erkennung förderwürdiger Probleme, eine verständnisvolle, inhaltlich kompetente Lehrerin, kooperative Eltern, die auch selbst die Förderung aktiv unterstützen, eine gute Förderdiagnostik, die basale Probleme im Dialog mit dem Kind offenlegt, eine qualifizierte Therapie (nicht klassische Nachhilfe!) und letztlich die konstruktive Kommunikation und Kooperation aller beteiligten Personen (*ohne Vorwürfe und Schuldzuweisungen*!) und damit der bestmögliche Umgang mit dem Kind besonders auch in Hinblick auf die häufig ohnehin stark belastete emotionale Situation.

** Um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten und weil die deutliche Mehrzahl der Lehrkräfte an Volksschulen und auch die in der therapeutischen Arbeit involvierten Elternteile zumeist weiblich sind, wird ausschließlich die weibliche Form verwendet, selbstverständlich sind jeweils auch männliche Lehrkräfte, Schüler und Väter gemeint. Auch die von mir betreuten Kinder sind schon seit Jahren, entgegen vieler Untersuchungen, an die 90% Mädchen.*

Nach zwanzigjähriger Unterrichtstätigkeit (Mathematik und Sport) beschäftige ich mich seit vielen Jahren besonders mit den Nöten von Kindern mit Lernschwächen und im Besonderen mit dem Themenbereich Rechenschwäche. Konsequenter Weise habe ich in Hall in Tirol die Ausbildung zum akademischen Therapeuten für Rechenschwäche absolviert. Aus dieser intensiven Auseinandersetzung und der therapeutischen Arbeit mit betroffenen Kindern sind vier Seminarteile (Grundlagen, Diagnostik, praktische Förderung, Rechenspiele) entstanden und parallel dazu das Buch „Rechenschwäche – konkret“. (Darin finden sich viele grundlegende Betrachtungen zu möglichen Definitionen einer Rechenschwäche, zu beobachtbarer Symptomatik, zu kindlichen Denkmustern bzw. Missverständnissen, zu Aspekten der Diagnostik und grundlegenden Förderaspekten, wie der möglichst guten Zusammenarbeit von Lehrerinnen, Eltern und außerschulischen Förderpersonen und den guten Umgang mit den Emotionen des Kindes. Außerdem enthält es zahlreiche Übungsideen mit dem Fokus auf eine gute Durchführungsanleitung.)

Entgegen manch anderen Ansätzen bin ich davon überzeugt, dass ein **wichtiger Faktor für den möglichen Erfolg** eines Förderprozesses in der **intensiven Einbeziehung *und* Unterstützung der Eltern** liegt. Mir ist natürlich bewusst, dass die Arbeit mit dem eigenen Kind insbesondere in einem derart schwierigen Bereich spannungsgeladen ist und Eltern fallweise aus unterschiedlichen Gründen kaum oder gar nicht in die Förderung eingebunden werden können. Trotzdem stellen für mich die Beratung und das Coaching der Eltern auch in Form von genauen Instruktionen, vorgezeigten Übungen und Thematisierung des Umgangs mit Fehlern sowie mit eigenen Emotionen und jenen des Kindes wesentliche Säulen der therapeutischen Arbeit mit dem Kind dar. **Eltern sind zumeist ohnehin ständig mit der Situation konfrontiert und derart kann ihr Umgang mit und ihr Handeln in dieser verbessert werden. Gleichzeitig wird so dem Umstand entsprochen, dass auch sie Hilfe dabei benötigen, wie einer Rechenschwäche zu begegnen ist.**

Aus den oben genannten Gründen ist bereits bei der Diagnose zumindest ein **Elternteil anwesend** und **muss** auch **in den einzelnen Therapieeinheiten** im Raum mit **dabei sein**, um passiv durch Beobachtung (Modelllernen) und aktiv durch die Möglichkeit des Fragens im Anschluss für die häuslichen Einheiten profitieren zu können. Neben einer geeigneten Material- und Übungsauswahl soll den Eltern derart vermittelt werden, wie stark durch unbewusste Kommunikation in Form von Worten, Mimik und Gestik unterstützt oder verunsichert wird, wie man konstruktiv mit Fehlern umgehen kann, dass negative Rückmeldungen zu vermeiden sind, Geduld nie ausgehen sollte und Kinder durch geeignete zurückhaltende verbale Begleitung immer wieder zu Einsichten geführt werden müssen, damit diese Schritt für Schritt auch dauerhaft behalten werden. Nur in begründeten Einzelfällen wähle ich eine andere Vorgehensweise (ohne Anwesenheit der Eltern).

Eltern sind also mitunter nicht die optimalen Trainer, allerdings zumeist die bestmöglichen, weil im Regelfall nur sie imstande sind, tägliche Übungseinheiten mit den Kindern zu gestalten. Besonders diese regelmäßige Arbeit mit dem Kind ist essentiell, weil Kinder ja fast täglich in der Schule mit Rechnen befasst sind und so gut wie immer ***verfestigte* inadäquate Strategien** durch verstandene effiziente zu ersetzen sind. Und *verfestigt* bedeutet nun einmal nichts anderes als **schwer und nur mit einigem Aufwand veränderbar**.

Über die letzten Jahre sind viele neue Ideen hinzugekommen und manches hat sich für mich im Laufe der Zeit relativiert. Diese Übungssammlung soll möglichst praxisnahe Übungen mit von mir bevorzugten Materialien anbieten, wobei wieder besonderer Wert auf eine bestmögliche Beschreibung gelegt wurde. Eine Übung ist nicht für sich alleine nützlich, vielmehr ist von entscheidender Bedeutung, dass Übungen auf eine Art angeleitet und begleitet werden, dass Kinder über ihr Tun und Denken auch sprechen und derart Informationen über die Qualität der Therapie zeitnahe rückgemeldet werden. Letztlich entscheidet das, was Kinder während einer Übung denken über die Qualität der Arbeit und einen möglichen Fortschritt in ihrem Verständnis von Zahlen und mathematischen Inhalten. Mir ist sehr wohl bewusst, dass es nicht einfach ist, Kinder mit Verständnisschwierigkeiten dazu zu bewegen über ihr mathematisches Tun zu sprechen, es lohnt sich aber sehr und ist sogar von enormer Wichtigkeit.

Grundlegende, kritische Gedanken

Rechenschwäche ist für betroffene Kinder und deren Familien ein ernstzunehmendes und schwerwiegendes Problem. Dies ist nicht deshalb so, weil es sich um ein Krankheitsbild handeln würde (obwohl dies vielfach so gesehen wird) oder weil es unumkehrbar schicksalshaft wäre, sondern vor allem oder fallweise sogar einzig deshalb, weil das Ausmaß bestehender **Probleme oft erst mit Verzögerung wahr- bzw. ernstgenommen** wird, wenn der Abstand zu Gleichaltrigen bereits ein erhebliches Ausmaß angenommen hat. Dadurch kommt es zu einem **„Kampf an zwei Fronten“, an der des aktuellen Stoffes und an jener, die weiter zurückliegende noch nicht verstandene Inhalte betrifft**:

Das Delta

In vielen Gesprächen mit Lehrerinnen und Eltern ist für mich immer wieder deutlich eine empfundene Ohnmacht spürbar, die sich aus dem Delta zwischen den Ansprüchen des aktuellen Unterrichts und dem individuellen Könnens- und Wissensstand des Kindes ableitet.

Reale Situation (oft) Reale Situation (fallweise) Tolle Leistung Hoffnung (oft Anspruch)

Klassenniveau: ———————— Niveau des Kindes: ------------------

Es ist einleuchtend, dass zwischen dem Klassenniveau und jenem eines rechenschwachen Kindes bereits eine **Schere aufgegangen** ist, wobei im schlimmsten Fall letzteres sogar rückläufig sein kann, wenn sich Missverständnisse verstärken und Fehlstrategien durch unreflektiertes Üben und unqualifizierte Nachhilfe noch verfestigen. Unter diesem Blickwinkel liegt bereits eine tolle Leistung des Kindes vor, wenn es den bestehenden Rückstand zur Klasse halten kann. verständlicherweise ist die Erwartungshaltung der Eltern und mitunter auch der Lehrerin auf ein Aufholen des Kindes und das Anschließen an das Klassenniveau ausgerichtet. Dies würde aber erforderlich machen, dass das betreffende Kind **mehr leisten** würde **als die besten Kinder der Klasse**, da es ja **Rückstände aufholen und aktuelle Inhalte** (deren Basis noch unzureichend ausgebildet bzw. verstanden ist) **mitlernen** müsste.

An dieser Stelle möchte ich nicht Hoffnungen schmälern oder eine negative Erwartungshaltung erzeugen, allerdings muss man die **Ausgangssituation einer Förderung ungeschönt betrachten**, damit **erreichbare Ziele** formuliert werden und **realistische Erwartungshaltungen** entstehen können. Daraus folgt, dass das Bewusstsein dafür gefördert werden muss, dass jeder Aufholprozess ein **deutliches Mehr an Anstrengung und konsequente Förderarbeit notwendig** macht. In meiner Wahrnehmung unterschätzen besonders Eltern häufig den Zeitaufwand, den das Nachbearbeiten von unverstandenen Inhalten auf ganz einfach scheinendem Niveau in Anspruch nimmt.

Betroffene Kinder zeigen zum Beispiel immer wieder verfestigte, mechanische Zähl- an Stelle von verständnisbasierenden Rechenstrategien, sie kommen also bei Strichrechnungen auch in kleinem Zahlenraum ungewöhnlich lange (manchmal sogar über die Volksschule hinaus) vorwiegend nur mit Hilfe von einschrittigen Zählprozessen zu Ergebnissen. Je später hier eingegriffen wird, desto komplizierter erweist sich ein Gegensteuern. Nun wird oft erwartet, dass man diese „wenigen“ Rechnungen bestimmt schnell einlernen könnte – oft im Sinne von Auswendiglernen durch zahlreiche Wiederholungen –, doch genau das führt ja immer wieder zu nur sehr kurzfristigen Erfolgen und zu anschließenden Rückschlägen. Nach eineinhalb bis zwei Schuljahren hätte sich ja schon lange der Erfolg eingestellt, wenn es so einfach wäre. Somit ist hier z.B. ein gut durchdachter und vernetzter Aufbau von Zahlenzerlegungen und in Folge von Strichrechnungen erforderlich, der mitunter erheblich mehr Geduld abverlangt als eingangs erwartet.

Über die Bedeutung des Dialogs und diese Übungssammlung

Vorweg sei an dieser Stelle angemerkt, dass ein Dialog im Einzelsetting natürlich weit einfacher zu gestalten ist als dies im Klassenverband möglich ist. **Geht man jedoch von keinem bis max. drei rechenschwachen Kindern in einer Klasse aus, sollte es auch dort regelmäßig machbar sein, kurze Dialoge mit diesen Kindern zu führen. Wesentliche Voraussetzung** in diesem Rahmen **ist eine gute Gesprächskultur innerhalb der Klasse**, die auch immer wieder thematisiert und konsequent eingefordert wird. Grundlegende Regeln des Respektes wie das Ausredenlassen oder die Forderung nach Höflichkeit in der Wortwahl stellen die Basis dar. Tiefergehende Aspekte der Kommunikation, die jedenfalls von Lehrerinnen angestrebt und Schülerinnen nach Möglichkeit auch immer wieder vermittelt werden sollten, sind Fragen wie „Habe ich die anderen richtig verstanden?“, „Haben die anderen mich so verstanden, wie ich es gemeint habe?“, „Wie könnte man das noch verstehen?“

In mathematischen „Fachdiskussionen“ sind in der Moderation der Lehrerin klare Formulierungen, Zeit geben, gezieltes Nachfragen, zurückhaltendes Agieren und immer wieder das Zurückführen zum Kern des Themas sowie das Aufzeigen von Abschweifungen wichtig.

Unterricht, der möglichst vielen Kindern mathematisches Verständnis ermöglichen soll, kann nicht ausschließlich durch Vortragen des Stoffes von Lehrerseite her und Bereitstellung bzw. Anleitung von Übungen mit oder ohne Material erfolgreich sein. **Es bedarf immer wieder der Anregung von nützlichen Gedankengängen und Betrachtungsweisen**. Ohne Dialog kann oft nicht beurteilt werden, ob angestrebte Sicht- und Denkweisen durch die gewählten Erklärungen auch erfolgreich vermittelt bzw. gefördert wurden. Das Sprechen über Denkprozesse und das eigene mathematische Tun sollen nicht auf sprachliches Vorantreiben nach vorbestimmten Abläufen reduziert werden. **Kinder sollen möglichst viel selbst formulieren und dazu stets erneut ermutigt werden**. Es dürfen dabei nicht sprachlich korrekte und inhaltlich fundierte Formulierungen erwartet werden, vielmehr ist es wichtig, die Substanz von Äußerungen zu erkunden – geduldig, fordernd und ermutigend.

Auch die mittlerweile intensiv in den Unterricht hineingeforderte **Kompetenzorientierung erfordert mehr Sprache der Kinder**: Wissen, Erkennen, Beschreiben, Operieren und Berechnen, Verwenden von Werkzeugen und Instrumenten, Darstellen und Formulieren, Mathematisieren und Modellieren, Argumentieren und Begründen, Kommunizieren, Interpretieren, Reflektieren von Ergebnissen, Erforschen, Explorieren, Probleme lösen, Formalisieren, … all das erfordert ein Mehr an Sprache und Verständnis.

Problematisch ist die häufig noch immer **vorherrschende Orientierung der Erwachsenen an richtigen Ergebnissen statt an vorhandenem Verständnis**. Viel zu oft werden diese als Hauptindiz dafür wahrgenommen, dass Kinder Lernprozesse erfolgreich bestritten hätten. Dies ist bei rechenschwachen Kindern nicht selten bloß eine willkommene jedoch vorübergehende (Selbst-) Täuschung. Wie froh wäre man, wenn ein Kind nun endlich doch Fortschritte gemacht hätte. Allerdings drücken Aussagen wie „Ich weiß, dass sie es versteht.“, „Sie hatte nur ein Blackout.“, oder „Aber sie kann es doch, es fehlt nur etwas Übung.“ über betroffene Kinder nur die Hoffnung der Erwachsenen aus, nicht die Realität.

Nur wenn man immer wieder mit Kindern über ihr Handeln und Denken spricht, kann man verlässliche Informationen über den tatsächlichen Wissensstand und das bereits erreichte Verständnis in Mathematik erhalten. Vernachlässigt man dies, sind unliebsame Überraschungen vorprogrammiert. Diese Sichtweise stellt nicht nur eine Falle für Eltern, sondern auch für Lehrerinnen dar. **Produkt- an Stelle von Prozessorientierung vernachlässigt den Blick auf das Vorgehen im Lösungsprozess.**

Wenn Fehlerfreiheit das oberste Ziel wäre, könnte man ja am besten den Taschenrechner verwenden, ist es jedoch das Verständnis, spricht dies für Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen.

Regelmäßig arbeite ich mit Kindern, bei denen schwerere Aufgabestellungen mit Hilfe mechanischer Kompensationsstrategien über einige Zeit recht gut funktioniert haben (Im Sinne des Lieferns richtiger Ergebnisse), wobei auf der anderen Seite weit einfachere Beispiele klar überfordern.

Ein Mädchen (1.Klasse einer NMS), das in der Schule aktuell sechsstellige Zahlen schriftlich addiert und subtrahiert hatte, wobei kaum Rechenfehler aufgetreten waren, war mit der Kopfrechnung 300 – 3 völlig überfordert. Auch mit Hilfe des in der Therapie bereits häufig verwendeten Dienes-Stellenwertmaterials konnte diese Rechnung nicht „im Kopf“ gelöst werden, sie wollte die Rechnung untereinanderschreiben um sie lösen zu können.

Besonders **mit kurzfristigen Erfolgen unter Zuhilfenahme der schriftlichen Rechenverfahren beruhigen sich Erwachsene, die mit rechenschwachen Kindern arbeiten, oft selbst**. Natürlich ist es auch für diese Kinder schön, wenn sie auf richtige Ergebnisse kommen können, allerdings sollte der Schwerpunkt jeder zusätzlichen Förderung am Nachmittag so basal wie notwendig angesetzt werden. Eine Rechnung wie 300 – 3 im Kopf rechnen zu können, und zwar ohne Anstrengung, ist bei weitem wichtiger als die Durchführung eines auswendig gelernten, prozeduralen Ablaufes von schriftlichen Subtraktionen. Diese machen erst in Folge Sinn. Solche massiven Rückstände könnte man viel früher aufdecken, wenn man regelmäßig Aufgaben auch im Dialog bearbeitet.

Kinder können immer wieder auch ohne Verständnis richtige Ergebnisse liefern, erklären können sie das Durchgeführte allerdings nur, wenn sie es wirklich verstanden haben.

Mittlerweile ist für mich die **Rolle der Sprache in der Therapie – und auch im Unterricht – zu einem immer bedeutsameren Faktor geworden**. Insbesondere bei Kindern, denen angebotene Anschauungsmaterialien sowie schriftliche und mündliche Unterrichtselemente nicht ausreichen, stellen Handlungselemente und durch die Kinder im Dialog selbst formulierte Aussagen zu ihrem mathematischen Denken und Tun unverzichtbare Teile der Förderung dar. Das Gewicht der sprachlichen Fähigkeiten in der Mathematik ist mit der Kompetenzorientierung im Unterricht bis hin zur Zentralmatura massiv angestiegen.

Kinder können auch ohne Beherrschen der Unterrichtssprache dem Mathematikunterricht mit Ausnahme von textbasierenden Aufgaben oft ausreichend folgen, sofern sie inhaltliches Verständnis mit Hilfe der mathematischen Symbolsprache erreichen können. Umgekehrt ist es **für Kinder mit massiven mathematischen Verständnisproblemen fast unmöglich, mit dem Klassenniveau Schritt zu halten oder gar aufzuholen, wenn sie die Unterrichtssprache nicht ausreichend zur Verfügung haben**. Dieser Umstand zeigt sich regelmäßig in meiner therapeutischen Arbeit.

Natürlich sind Sprach- und Leseverständnis wie auch der vorhandene Wortschatz mögliche hemmende Faktoren beim Einfordern von Dialogen. Auch die Sorge, etwas Falsches zu sagen oder kritisiert zu werden, kann die Bereitschaft der Kinder in Mathematik hemmen, mit uns über ihre Gedanken beim Handeln oder Rechnen zu sprechen. In Einzelfällen kann es den Dialog mit einzelnen Kindern sogar verunmöglichen, dennoch ist dieser extrem wichtig und wertvoll.

Nicht unerwähnt soll noch bleiben, dass Kinder vieler Sprachen - z.B. im Türkischen - im Deutschen verdreht gesprochene Zahlen bei Rechnungen in ihre Sprache „umdrehen“ müssen, in ihrer Sprache rechnen und die Ergebniszahlen wieder „zurückdrehen“. Dies erschwert das Rechnen noch zusätzlich, sofern diese Kinder Zahlen noch in ihrer ursprünglichen Sprache gelernt haben und mögliche Fehlerquellen sind noch um eine erhöht.

Diese Sammlung soll einen Beitrag dazu leisten, dass Menschen, die die Möglichkeit haben, betroffene Kinder in einer Einzelbetreuungssituation zu unterstützen, viele Ideen für diese Arbeit erhalten. Neben der Vorstellung nützlicher Fördermaterialien und deren Einsatzmöglichkeiten liegt der Schwerpunkt in der Beschreibung einer guten verbalen Begleitung von Übungen in Form von konstruktiven Fragestellungen und Dialogen, die dem Kind jeweils helfen sollen, mathematische Inhalte und deren Zusammenhänge schrittweise verstehen zu können.

Lernen mit allen Sinnen – ein lernpsychologisch sinnvoller Ansatz – reicht in der Mathematik leider nicht aus. Zahlen kann man nicht sehen, hören, riechen, spüren oder schmecken – man kann sie nur denken. Zahlen werden gedanklich „erzeugt“ oder, anders formuliert, in Gegebenheiten auf der Welt hineininterpretiert. Es handelt sich um sogenannte „mentale Objekte“. Unterstützende, anregende und gerichtete Aktivitäten stellen notwendige Schlüssel dar, sie erfordern immer auch einen entsprechenden Einsatz von Sprache.

Zeichenerklärung

🖹 Titel der Übung

✎ Übungsbeschreibung im Überblick

??? Geeignete, mögliche Fragestellungen zur Aufgabenbegleitung

abc Übungsvarianten und Anmerkungen

☺ Spielformen

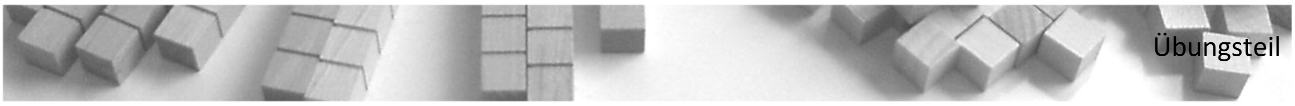
Alle Übungen eignen sich für den Einsatz in der Individualbetreuung von Kindern.

Besonders viele Übungen eignen sich insbesondere für die **Partnerarbeit** zweier Sitznachbarn, wenn diese jeweils das einige Seiten zuvor vorgeschlagene **Materialpaket** zur Verfügung haben.

Vorgestellte Übungen können für den Einsatz im Unterricht oft ebenso für die **Einzelarbeit** wie für die **Gruppenarbeit** adaptiert werden.

Alle direkten Reden und Dialoge sind kursiv geschrieben. Dabei wurde bewusst auf Anführungszeichen verzichtet. Darüber hinaus ist die Schrift nur bei ***Namen von Autoren*** kursiv formatiert.

Es kommen zwei Schriftfarben zum Einsatz, die dazu dienen, Einzelpassagen in den Vordergrund zu setzen, andere hingegen etwas in den Hintergrund.



abc Die Übung kann über zehn fortgesetzt werden, indem jeweils bei Erreichen eines Zehners dieser als 10 oder mit einem Strich auf einem Blatt notiert wird. (speziell für Kinder, die bereits über zehn hinaus zurechtkommen). *Wenn du mit beiden Händen durch bist, sind es schon wie viele? Dann notiere diese 10 in deinem Heft und zähle wieder von 1 weg weiter. Am Ende überlege, wie viele es dann mit den im Heft notierten zusammen sind.* Man kann vorweg eine Schätzung abverlangen, die am Ende mit dem Zählergebnis verglichen werden soll. (Auch gegeneinander möglich: wer liegt näher an der tatsächlichen Anzahl?)

abc Anstelle von realen Zählobjekten kann man eine gedruckte Abbildung von Zählobjekten verwenden. Statt Objekte zur Seite zu schieben, kann man diese entweder durchstreichen oder während des Zählens z.B. jeweils einen Spielstein darauf abstellen.

Zerlegungen mit Fingerbildern und Stift

Das Kind soll 5 oder 10 mit den Fingern zeigen, indem es beide Hände mit den Handrücken nach oben auf dem Tisch ablegt. Dann wird an beliebiger Stelle ein Stift zwischen zwei Finger des Fingerbildes hineingeschoben und das Kind soll jeweils die beiden entstandenen Teile der (Zahlen-) Zerlegungen angeben.

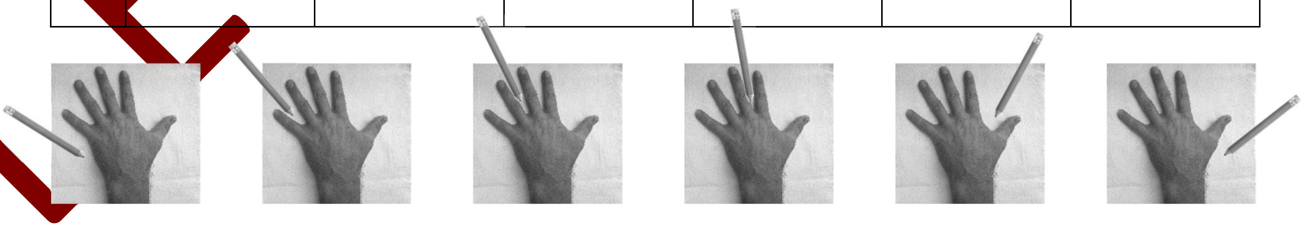
??? *Lege bitte eine/beide Hand/Hände mit ausgestreckten Fingern auf den Tisch. Wie viele Finger sind also ausgestreckt? Genau 5/10. Wenn ich jetzt diesen Stift zwischen diese beiden Finger schiebe, teile ich ja die 5/10 Finger sozusagen in zwei Teile, einen auf der Seite, einen auf dieser. Bitte sage immer, in welche beiden Teile ich 5 (10) gerade „aufgeteilt" habe, z.B. so: hier sind die 5 Finger in zwei und drei aufgeteilt worden.* In der Darstellung oben ist noch 10 in 4 und 6 geteilt.

abc Es kann auch mit Fingerbildern anderer Zahlen (2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) gearbeitet werden.

abc Gut als Partnerübung durchzuführen. Diejenige, die den Stift platziert, notiert auch die angesagten Zerlegungszahlen. Dabei kann man im Sinne einer Automatisierungsübung bewusst das Tempo verschärfen (sofern das Feststellen der Teile bereits auf einem Blick gelingt und kein Zählen mehr erfordert).

abc *Jetzt lege das Fingerbild der Zahl 5/10 in Bezug zum Stift in allen möglichen Varianten* (sodass der Stift an allen möglichen Stellen des Fingerbildes einmal liegt) *und notiere alle herausgefundenen Zerlegungen (in einer kleinen Tabelle).*

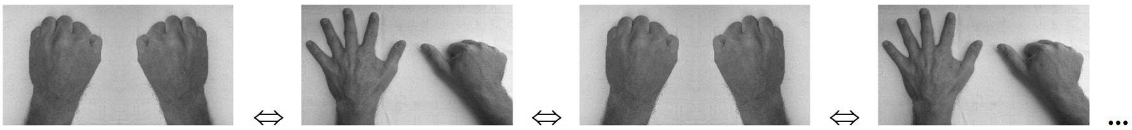
5	0	1	2	3	4	5
	5	4	3	2	1	0



„Fingerbildblinken"

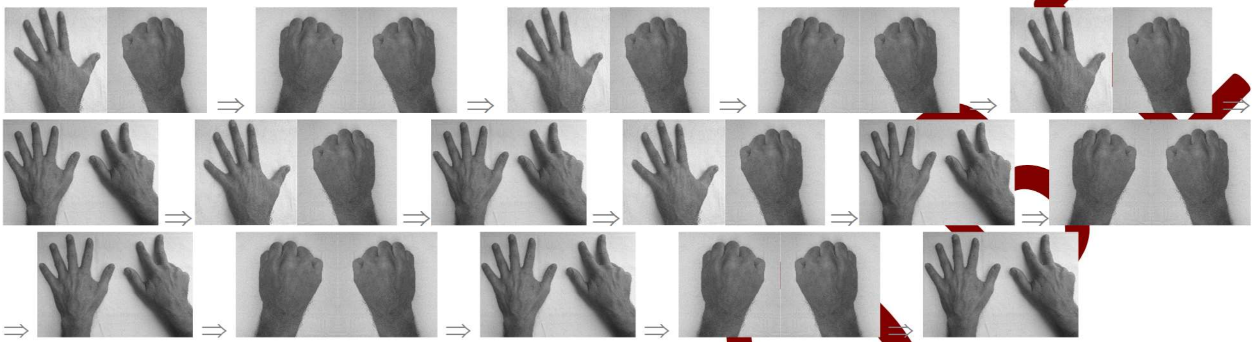
Das Kind soll jeweils alle zu einem Fingerbild gehörenden Finger gemeinsam mehrmals hintereinander ausstrecken und wieder einziehen, also mit der Zahl "blinken".

??? *Zeige das Fingerbild zu 6 und konzentriere dich bitte darauf, alle benötigten Finger gleichzeitig auszustrecken und dann sofort wieder gemeinsam einzuziehen. Mach das bitte mehrmals, dass es aussieht wie beim Blinken einer Ampel.*



abc Die Kinder können sich gegenseitig das jeweils zu zeigende Fingerbild ansagen.

abc Dann kann man die Teile der Zahlen über 5 betonen, indem man z.B. bei 8 zuerst mit 5 dreimal „blinkt", die 5 Finger dann ausgestreckt lässt und dann dreimal mit den restlichen 3 Fingern „blinkt", um sie zuletzt alle ausgestreckt zu lassen. *Jetzt geht es fast gleich wie vorher, aber in 2 Teilen. Ich zeige dir das mit 8: 5, 5, 5, jetzt ausgestreckt lassen und hier 3, 3, 3 und ausgestreckt lassen und zuletzt mit allen 8 noch dreimal „blinken".*



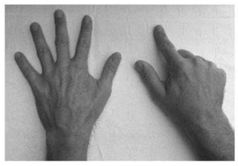
Wenn das gut klappt, sprich bitte genauso dazu wie ich: 5, 5, 5, 3, 3, 3, 8, 8, 8.

abc Motorisch besonders anspruchsvoll ist es, wenn man zuletzt noch anleitet, NUR die bislang nicht ausgestreckten Finger (im Beispiel zwei) gleichzeitig „blinken" zu lassen. *Also 8 und diese zwei sind dann zusammen 10.* Am Ende sind dann alle 10 Finger ausgestreckt.

<u>Fokussierung auf die Zahlbeziehungen zu 5 und 10</u>

Zu einem Fingerbild soll jeweils die Aufmerksamkeit auf die Beziehungen der gezeigten Zahl zu 5 und 10 gelenkt werden. Dazu ist das Zeigen aller Fingerbilder „auf einen Sitz" bereits Voraussetzung.

??? *Zeige bitte das Fingerbild zu 7.*
Nun können verschiedene Fragen zu den entsprechenden Fingeranzahlen gestellt werden:
Aus welchen beiden Fingeranzahlen besteht 7?
(Um) Wie viele Finger sind es mehr (weniger) als 5?
Wie viele Finger fehlen auf 5/10 (sind nicht ausgestreckt)?
Klappe bitte 5 auf einmal weg, wie viele bleiben übrig?
Klappe bitte 2 auf einmal weg, wie viele bleiben übrig?



Das Kind darf während dieser Übung auf das Fingerbild schauen.

abc Rechnungen zu den oben gestellten Fragen einfordern. *Es sind also 5 und 2 Finger. Welche Rechnung passt hier dazu? Genau 5+2 = 7. Wenn ich diese weggeklappt habe … ? Ja, 7–2 = 5.*

Für Kinder kann es einen enormen Unterschied machen, ob sie das Fingerbild einer Zahl sehen oder es beispielsweise unter dem Tisch „zeigen". Ob sie es mit den eigenen Fingern bilden oder bloß bei jemanden anderen sehen, macht mitunter auch einen Unterschied. Beide Auffälligkeiten deuten darauf hin, dass die beteiligten Anzahlen noch nicht wirklich bewusst geworden sind, sondern bloß durch häufige Wiederholung intermodal gemerkt wurden (Verknüpfung von gesprochener/geschriebener Zahl und dem motorisch herzustellenden Fingerbild).

abc Sich selbst vom Kind anleiten lassen, wie viele Finger jeder Hand auszustrecken seien, um ein vorgegebenes Fingerbild herzustellen. *Wie viele Finger soll ich also einmal von dieser Hand ausstrecken, wenn es insgesamt 9/4 Finger sein sollen.* (… es das Fingerbild von … ergeben soll) *Also mit dieser Hand 5/4, bitte sehr. Und mit der anderen? Noch 4/keiner mehr dazu, in Ordnung. Und zeige ich jetzt 9/4? Passt das so? Könnte man 9 auch anders zeigen? Richtig, mit 4 an der anderen Hand.* Wenn es einem Kind nicht oder nur schwer gelingt, kann man ihm als Hilfe erlauben, vor der Ansage selbst das Fingerbild zu zeigen. Gelingt es dem Kind hingegen gut, kann man die Formulierung der Aufgabe auf ein Minimum reduzieren: *Und bei 6?*

Das untenstehende Zehnerfeld kann kopiert und foliert werden. Um ein Zwanzigerfeld zu erhalten, kann ein zweites Zehnerfeld an der Breitseite (dicke Rahmenlinie) angefügt werden. Mit Tixo verbunden kann es dann auch fallweise vor- oder zurückgeklappt werden (10⇔20). Bei Bedarf kann das Feld mit Zahlen beschriftet werden - zum Beispiel für ordinale Übungen.

Zehnerfeld und Wendeplättchen

Es gibt die Möglichkeit, ein Zehnerfeld in einer Zeile mit einer deutlich sichtbaren Fünfer-Trennlinie zu gestalten:

oder in zwei übereinanderliegenden Fünferzeilen:

Oft wird mir die Frage gestellt, welche der beiden Zehneranordnungen zu bevorzugen sei. Allerdings hat jede der beiden Varianten bereits von Beginn an ihre Vorteile.

Die obere Anordnung entspricht in Grundzügen schon dem (kardinalen) Zahlenstrahl und ist von ihrer Struktur her zu Beginn für manche Kinder (räumlich) einfacher.

Die untere bietet sich anfangs insbesondere für die Betonung der Verdopplung und aller Ableitungen daraus sowie für das Halbieren an. Ebenso kann man gut den Begriff der „geraden und ungeraden“ Zahlen damit einführen/bearbeiten.

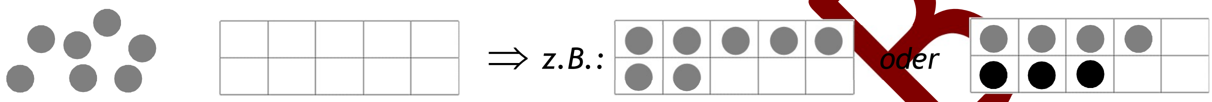
Ideal ist, meiner Ansicht nach, Material, das diesbezüglich in seiner Verwendung beide Varianten ermöglicht, wie etwa die Rechenschiffchen aus Holz (4 Fünferschiffchen), die man sowohl neben- als auch übereinander anordnen kann.

Die oben vorgeschlagene Variante der beiden mit Tixo zu einem Zwanzigerfeld verbundenen Zehnerfelder lässt ebenso beides zu. Ist das zweite Zehnerfeld allerdings vorgeklappt, sind durchgehend zwei übereinanderliegende waagrechte Zehnerfelder sichtbar. Dies empfinde ich nicht als Nachteil. Selbst wenn man eine Zeit lang nur das obere verwendet, ist es Kindern durchaus einsichtig, dass es in weiterer Folge auch einen zweiten (weitere) Zehner geben wird.

Anzahl: Schätzen mit Zählkontrolle

Ein Kind legt dem anderen ungeordnet eine Anzahl von maximal 10 (später 20) Wendeplättchen auf den Tisch. Das zweite soll /die anderen sollen schnell eine Schätzung abgeben, wie viele es wohl sind, und diese notieren. Dann legt ein Kind die Plättchen unter lautem Mitzählen auf die Felder des Zehnerfeldes. Es kann auch leise aufgelegt und im Anschluss die Anzahl auf einem Blick abgelesen werden. Jede soll dann die Differenz der tatsächlichen Anzahl zur Schätzung ausrechnen. Wer am besten geschätzt hat, darf die nächste Anzahl auswählen.

??? *Nimm bitte eine Handvoll Wendeplättchen (höchstens 10/20) und lege sie hier her. Jetzt schätzt bitte ganz schnell – jeder für sich – wie viele es wohl sind und schreibt es auf.* Wenn beide/alle ihre Schätzungen notiert haben: *Zähle die Plättchen jetzt ab, indem du sie auf das Zehner-/Zwanzigerfeld legst.* Wenn sich Kinder zu lange Zeit nehmen, sollten die Plättchen (evtl. ein Teil davon) dann früh genug abgedeckt werden, dass kein Zählen möglich ist. *Jetzt rechnet bitte aus, wie weit ihr mit eurer Schätzung danebengelegen seid.*



abc Alternativ: Schätzung, ob es mehr oder weniger als 10 Plättchen sind. *Wirf einen kurzen Blick auf die Plättchen und entscheide schnell, ob es mehr oder weniger als 10 (20) sind.*

Muster mit Wendeplättchen

Eine vorgegebene Anzahl an Wendeplättchen (2-10) soll auf beliebige Felder des Zehnerfeldes gelegt werden. Dabei sollen durch die gezielte Auswahl von Feldern und den bewussten Einsatz beider Farben Muster gestaltet werden. Es können anschließend die Anzahlen an roten und blauen Plättchen sowie jene der Summen notiert werden.

??? *Nimm diese Wendeplättchen (höchstens 10) und lege mit ihnen Muster auf dem Zehnerfeld. Versuche möglichst viele Varianten zu finden, deine Plättchen auf die beiden 5er-Reihen aufzuteilen. Schreibe dann auf einem Blatt auf, wie viele Plättchen du in die obere und in die untere Reihe gelegt hast* (oder: wie viele rote und wie viele blaue Oberseiten du liegen hast), *und rechne zuletzt aus, wie viele es insgesamt sind.* (blaue und rote / jene in der oberen und jene in der unteren Zeile) Hier ein Beispiel mit 7 Plättchen ohne Farbeinsatz:

abc Alternative Aufforderung: *Lege bitte diese Plättchen so auf das Zehnerfeld, dass man ganz schnell erkennen kann, dass es … sind.* Nach dem Legen: *Wie (Woran) kann man hier nun schnell erkennen, dass es … sind?*

abc Ein Kind, das das Muster nicht gelegt hat, soll möglichst schnell die Gesamtzahl der verwendeten Plättchen angeben und dann seiner Partnerin erklären, wie es das schnell erkannt hat. Links oben könnte die Antwort „4 + 3“ und rechts oben „3 links, 3 rechts und eins in der Mitte“ lauten. Bei Einsatz der beiden Farben ergeben sich mehr Möglichkeiten.

abc Es können auch kleine kopierte Zehnerfelder ausgegeben werden, auf denen die Kinder dann mit den 2 Farben der Wendeplättchen Muster zu einer gewissen Anzahl an Wendeplättchen zeichnen sollen und evtl. auch aufgefordert werden, (mindestens) eine gewisse Anzahl an Kombinationen herauszufinden.

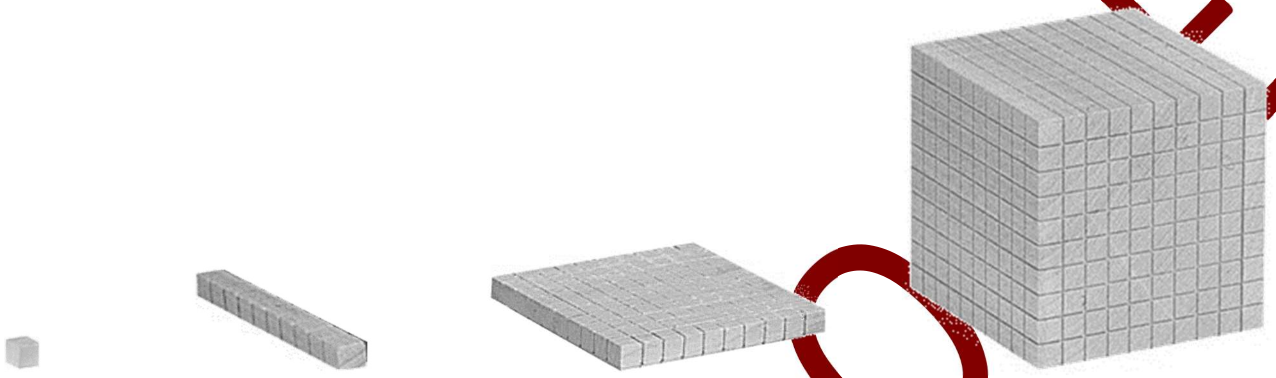
abc *Fülle jetzt bitte alle zehn Felder mit Plättchen und bilde dabei mit Hilfe der beiden Farben wieder verschiedene Muster.* Die Übung mit zehn Wendeplättchen hilft bei der Erarbeitung und Festigung der Zehnerzerlegungen. Die Kinder können dazu aufgefordert werden, die farblich vorliegenden Anzahlen auch mit Fingerbildern zu zeigen – welche Zusammenhänge werden sichtbar? Anzahlen bzw. sichtbar werdende Zerlegungen können auch bei dieser Übung am Ende notiert werden.

abc Bei dieser Übung kann auch der Begriff der „Symmetrie“ thematisiert werden. Mit einem Spiegel können die gelegten Muster auf Symmetrieeigenschaften überprüft werden. Optional kann auch verlangt werden, dass nur symmetrische Muster gelegt werden sollen. Oben sind alle Muster außer dem ersten achsensymmetrisch bezüglich einer Mittelsenkrechten.

Dienesmaterial – Stellenwertmaterial aus Holz

Ein Material, das für mich mittlerweile zu einem unverzichtbaren Bestandteil vieler Therapiestunden geworden ist, ist das nach dem ungarischeren Mathematiklehrer *Z.P. Dienes* benannte *Dienesmaterial*. Dieses ist auch bekannt als Holz-Stellenwertmaterial, Mehr-System-Blöcke, Zehnersystemsatz oder Goldenes Würfelmaterial im Montessoribereich.

Es handelt sich um strukturiertes Material aus Holz, dessen Grundeinheit ein Würfel mit 1cm Kantenlänge ist. Darauf aufbauend gibt es eine 10cm lange Zehnerstange, die durch Einkerbungen suggeriert, dass es sich um 10 Einerwürfel handeln würde. Darauf aufbauend gibt es jeweils mit Einkerbungen versehene Hunderterplatten und Tausenderwürfel (-blöcke).



Das Dienesmaterial gibt es auch in der sogenannten Re-Wood-Version, einer Kombination aus ca. 80% Holzabfällen sowie Kunststoffanteilen. Unterschiede ergeben sich bezüglich der Haptik, die Re-Wood-Teile sind etwas schwerer und liegen „satter" in der Hand (Ausnahme: Der Tausender ist hohl). Außerdem sind diese Teile geringfügig billiger und in unterschiedlichen Farben erhältlich, was methodisch zusätzliche Möglichkeiten und Risiken eröffnet.

Was den Einsatz von Farben betrifft, muss angemerkt werden, dass diese auch für Verwirrung sorgen können, wenn gleiche Farben mit unterschiedlichen Bedeutungen belegt werden. In der Montessoripädagogik werden Grundeinheiten (Einer, Tausender, Million, Milliarde, …) jeweils grün dargestellt, Zehner (Zehner, Zehntausender, Zehn-…) blau und Hunderter (Hunderter, Hunderttausender, Hundert-…) rot. Im Lehrmittelbereich gibt es hingegen auch Stellenwertmaterial aus Kunststoff, bei dem die Einer rot, die Zehner gelb, Hunderter grün und Tausender blau sind. Beim Re-Wood-Material wiederum kann man gleiche Stellenwerte in unterschiedlichen Farben kaufen. Dies sollte also bei der Unterrichtsplanung insofern berücksichtigt werden, dass man Farben immer nur mit der gleichen Bedeutung belegt einsetzt und Lehrbücher und Fördermaterialien diesbezüglich gleich gestaltet sind.

Grundsätzlich bieten Farben durchaus lerntechnische Möglichkeiten und Assoziationshilfen an, für sich alleine vermitteln sie jedoch nicht mathematisches Verständnis. Im schlechtesten Fall dienen sie als „Krücke" und Kinder können Prozesse nach Wegfall der Farben gar nicht mehr durchlaufen, weil sie zugrundeliegende Inhalte nicht verstanden haben.

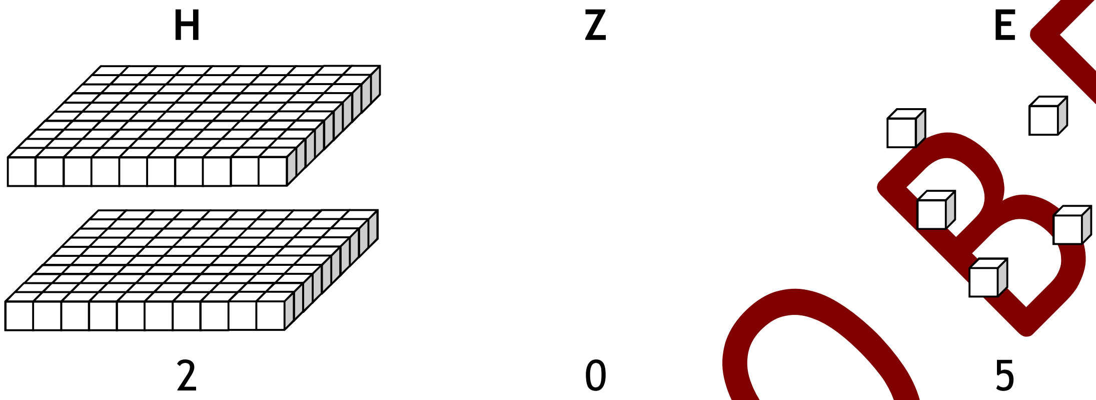
Dienesmaterial kann vielseitig eingesetzt werden, insbesondere bei der Erarbeitung des Bündelungsprinzips im dekadischen Zahlensystem sowie der Arbeit und dem Rechnen mit Stellenwerten. Aufgrund der gegebenen Struktur wird die quasisimultane Zahlenerfassung über 5 hinaus ermöglicht (wobei 5-9 Stück gleicher Teile jeweils strukturiert in Gruppen zu maximal vier angeboten werden sollen), tragfähige Zahlenvorstellungen können erzeugt und effektive Rechenstrategien vermittelt werden. Beziehungen zwischen Stellenwerten und zu ganzzahligen Zehnern, Hundertern etc. werden maßstabsgetreu sichtbar.

Wie grundsätzlich bei jedem Fördermaterial soll auch das Dienesmaterial für jedes einzelne Kind möglichst durchgehend zur Verfügung stehen und von Lehrerinnenseite aktiv so viel verwendet werden wie nötig und mit Fortdauer so wenig wie möglich. Andererseits sollten Kinder mit Problemen die Benutzung des Materials stets als Normalität und nicht als peinlich wahrnehmen.

Im Zusammenhang mit Dienesmaterial gibt es auch einige **Kritikpunkte**:

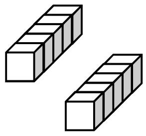
- Das Material kann entgegen der Intention lediglich als Hilfe bei der zählenden Bearbeitung von Rechenaufgaben verwendet werden. Um dies zu unterbinden ist speziell bei schwächeren Kindern eine häufigere Beobachtung wichtig. Abhilfe können das teilweise Verdecken von Material, geeignete Fragestellungen und geschickte sprachliche Begleitung schaffen.

- Ein weiterer Punkt betrifft die fehlende Darstellung der Null. Hier kann man durch Verwendung eines Stellewertrasters unterstützen, indem etwa bei 205 die Zahl in einem Stellenwertraster mit Material gelegt und in Folge in Ziffernschreibweise dargestellt wird.



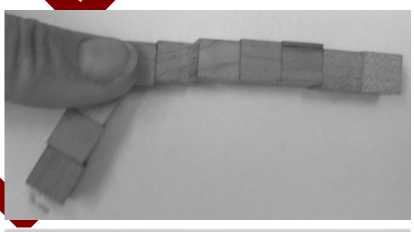
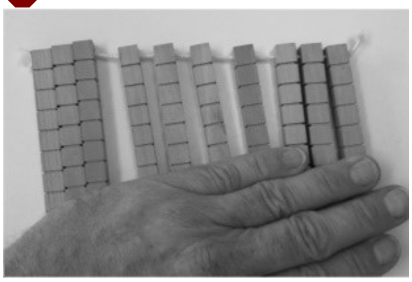
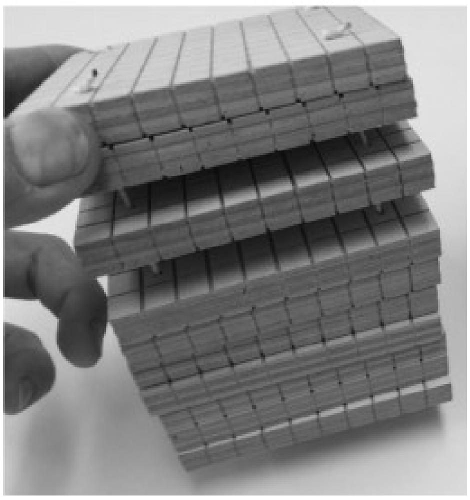
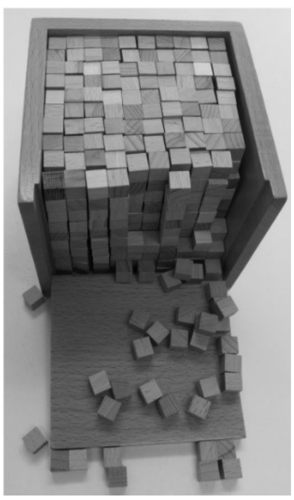
Alternativ kann man Zahlenkarten mit vorgefertigten Steckplätzen verwenden.

- Kritisiert wird fallweise auch die fehlende Visualisierung der Fünferbündelung, sodass die zuvor erarbeitete „Kraft der Fünf“ mit diesem Material nicht aufgegriffen werden könne. Es gibt zwar nur selten Dienes-Zehnerstangen mit einer Fünfer-Markierung, allerdings gibt es Re-Wood-Fünferstangen, die man zu diesem Zweck (auch farblich abgehoben) verwenden kann.



- Von der Seite der Montessori-Pädagoginnen kamen wiederholt kritische Anmerkungen jenen Umstand betreffend, dass es sich beim Dienesmaterial nicht um echte Bündelungen handelt. Ein Zehner ist de facto eine Holzstange mit Kerben, es sind jedoch nicht 10 einzelne Elemente, was bei aufgefädelten Perlen eben doch der Fall ist. Ein Zehner kann hier nur durch einen Tauschprozess in 10 Einer getauscht werden, ein Eierkarton mit 10 Plastikeiern hingegen kann z.B. einfach ausgeleert werden. Gleiches gilt sinngemäß für Hunderter und Tausender. Natürlich ist dies für Kinder, die Stellenwert verstehen, kein Problem, für jene, bei denen dies jedoch (noch) nicht der Fall ist, sollten diese Überlegungen durchaus beachtet werden.

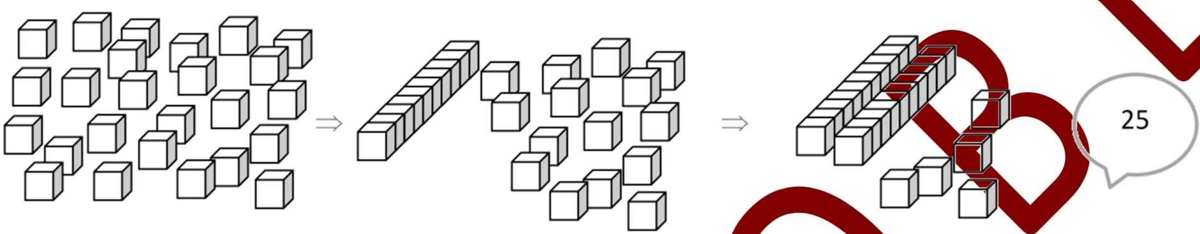
  Um Kindern die Bündelung auch bei diesem Material sicht- und spürbar zu machen, habe ich Dienesmaterialien mit Hilfe von Bohrungen und Einziehgummi tatsächlich aus 10 Stück der jeweils nächstkleineren Einheit gebündelt (Alternativ: Einsatz von Magneten mit der realen Möglichkeit des Entbündelns). Der für mich unverzichtbare Tausender aus 1000 einzelnen Würfeln (rechts unten) ist ohnehin im Handel erhältlich:

Bündeln und Entbündeln durch Tauschhandlungen

Vorgabe von beliebig vielen Dienes-Einern innerhalb des zu bearbeitenden Zahlenraumes. Es soll durch Bündelung auf möglichst wenige Teile reduziert werden. Dabei können sehr gut zwei Kinder zusammenarbeiten. Einer bearbeitet die Aufgabe, der andere hat die Funktion der Bank und muss jeweils Tauschhandlungen auf eine konkrete Aufforderung durchführen.

??? *Hier liegen einige Einer. Deine Aufgabe ist es, herauszufinden, welche Zahl hier dargestellt ist. Du kannst bei deiner Nachbarin Einer gegen Zehner tauschen. Dazu musst du aber immer genau sagen, was du möchtest, z.B.: Hier hast du zehn Einer, gib mir dafür bitte einen Zehner. Jedes Mal! Wenn kein Tausch mehr möglich ist, musst du die richtige Zahl nennen.* Zu Beginn kann man durchaus langsamere Zählprozesse zulassen, in Folge ist es sinnvoll, das Hunderterbrettchen oder eine Zehnerstange als Hilfe zum Anlegen anbieten.

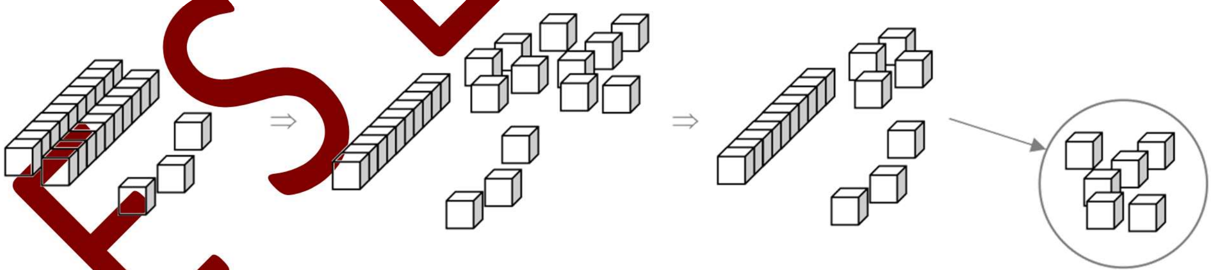


abc Später kann man diese Übung sinngemäß auf den Zahlenraum 100, 1000 und 10000 erweitern. Dabei werden dann Zehner, Hunderter und/oder Tausender vorgegeben.

abc Die gesprochene Zahl kann aufgeschrieben, in eine Stellenwerttafel eingetragen oder mit Zahlenkarten gelegt werden.

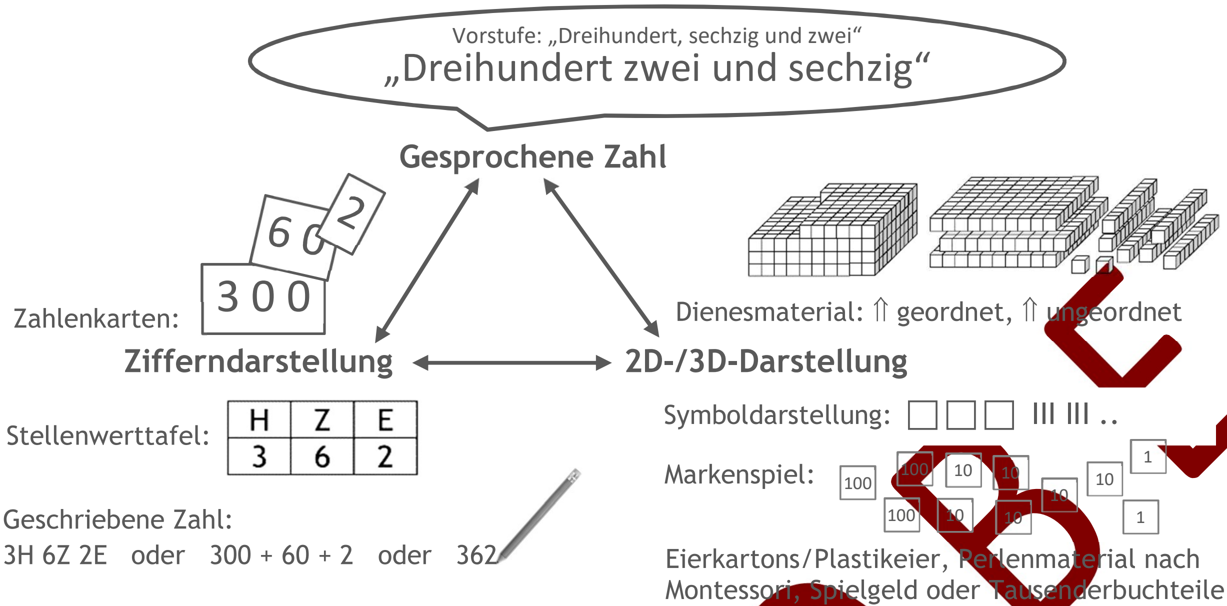
abc Umgekehrt kann man auch eine durch Zehner und Einer vorgegebene Zahl mittels Entbündelung (wieder genau sprachlich begleitet: *Gib mir für den Zehner bitte 10 Einer*) in Einer umtauschen lassen. (Zahlenraum 100)

abc Später werden Entbündelungen vorwiegend dann benötigt und eingesetzt, wenn Unterschreitungen bei Rechenprozessen (z.B. Retourgeld beim Zahlen) notwendig sind. Dies kann man in einfacher Form ohne Nennung des Ergebnisses handelnd einfordern. Es liegen 2 Zehner und 3 Einer vor: *Bitte gib mir 6 Einer. Das geht nicht? Aber da liegen doch Einer. Das stimmt, es sind zu wenige. Na wie könnten wir mehr Einer bekommen – genau, durch Tauschen wie bei den vorigen Übungen. Bitte sehr, hier sind die 10 Einer. Danke für die 6 Einer.* Die Frage nach der verbleibenden Anzahl ist möglich, jedoch vorerst nicht wesentlich.



Stellenwert-„Übersetzungsdreieck“

Es gibt wenige reine Stellenwertübungen. Diese beschränken sich im Wesentlichen auf Bündelung und Entbündelung bzw. Tauschaufgaben einerseits und Übersetzungen zwischen den verschiedenen Zahlendarstellungen andererseits. Darüber hinaus sind im Rahmen der Aufgabenstellung zumeist bereits Operationen enthalten. Man kann dabei drei grundlegende Darstellungsweisen unterscheiden: Die gesprochene Zahl, die mit Ziffern dargestellte Zahl und zuletzt die zwei- oder dreidimensional mit Material oder durch Skizzen, Zeichnungen oder Symbole dargestellte Zahl. Diese Übung fordert Kinder dazu auf, die verschiedenen Darstellungen ineinander zu übersetzen (überzuführen) und immer wieder auch sprachlich alle Vorgänge zu kommentieren bzw. zu begründen. Sie sollte regelmäßig in verschiedenen Zahlenräumen wiederholt werden.



??? *Ich sage dir jetzt eine Zahl, schreibe sie bitte auf und lege die Zahl auch mit dem Material. Bitte lies mir die geschriebene Zahl vor und lege sie mit den Plättchen (Markenspiel). Hier liegt eine Anzahl (Stellenwertmaterial). Bitte schreib die Zahl auf und sage sie mir.*

abc Es gibt also zwischen den Darstellungsformen „Gesprochene Zahl“, „Zifferndarstellung“ und „2D-/3D-Darstellung“ 6 Übersetzungsrichtungen, die es alle zu erarbeiten und zu festigen gilt. Jede Darstellungsform hat für sich wieder unterschiedliche Varianten, was ein vielfältiges Üben ermöglicht.

abc Zuordnungsübungen können auch mit den eingangs angeführten Spielen Zehner- und HunderterMauMau bzw. mit den Karteien mit Dienesdarstellungen durchgeführt werden.

abc Sinnvoll sind auch bei allen Darstellungsformen gezielte Stellenwertfragen: *Wie viele Hunderter liegen da/sind dabei? Wofür steht diese Null? Das sind 6 …?*

<u>Fehler beim Schreiben oder Sprechen von Zahlen im Deutschen</u>

Häufigste Fehlerquelle beim Schreiben von Zahlen bis 100 ist die im Deutschen umgekehrte Sprechreihenfolge von Zehnern und Einern. Insbesondere liefert der Zahlenraum von 10 bis 20 einige Fallen: 11 und 12 besitzen Eigennamen, die anschließenden, gesprochenen Zahlen provozieren ebenfalls Fehler: „dreizehn“ oder „siebzehn“ klingen eher nach 3 oder 7 Zehnern als „dreißig“ oder „siebzig“ – dies führt häufig zur Verwechslung von 13 und 30 etc. Doch es gibt im Zahlenraum 20 auch noch andere Abweichungen von darüber hinaus geltenden Regelmäßigkeiten wie „**sech**zehn“ in Gegensatz zu „**sechsund**zwanzig“, „**sechsund**dreißig“. Vor allem diese sprachlichen Besonderheiten erfordern eine gesonderte Behandlung dieses Zahlenraumes bevor man sich dem gesamten Hunderterraum zuwendet.

Bei zweistelligen Zahlen gibt es drei zu beobachtende Schreibreihenfolgen der Ziffern, bei 46:

- 4 dann 46 wie es im Unterricht in aller Regel auch vermittelt wird.
- 6 dann 46 konform zur Sprachreihenfolge und korrekt.
- 6 dann 64 falsch, zumeist durch die Sprechreihenfolge provoziert.

In welchem Fall sollte man bei den oben dargestellten Schreibweisen (re)agieren. Entscheidend ist bei richtiger, unüblich korrekter und falscher Schreibweise, dass die geschriebene Zahl, korrekt als Zusammensetzung zweier Stellenwerte verstanden wird. Wenn Zehner und Einer hingegen nicht ausreichend verstanden werden, muss erneut grundlegendend daran gearbeitet werden (Tausch-, Bündelungs- und Entbündelungsaufgaben) bevor die Schreibweise überhaupt in den Fokus rückt. Werden Stellenwerte hingegen gut verstanden und die Zahl wird unüblich (E vor Z) aber korrekt zu Papier gebracht, so kann man dies aus meiner Sicht belassen.

Begleitung unterschreitender Subtraktionen mit Dienesmaterial

Bei dieser Übung wird im Rahmen der Subtraktionen zweier maximal zweistelliger Zahlen nur die Unterschreitung von Zehnern innerhalb des ersten Hunderters behandelt. Sinngemäß kann die Übung auch in höheren Zahlenräumen Anwendung finden.

Anders als bei der Addition gibt es bei der Subtraktion ein zu bevorzugendes Vorgehen: Schrittweises Entfernen (Abziehen) der einzelnen Stellenwerte des Subtrahenden. Dabei wird zumeist mit den Zehnern begonnen, weil dabei zu Beginn im Zahlenraum 100 keine Unterschreitungen vorkommen können.

<table>
<tr><th>Angabe</th><th>Typ</th><th colspan="2">Teilschritt</th><th colspan="2">Typ</th><td colspan="4" rowspan="6">TYPEN VON TEILAUFGABEN BEI SUBTRAKTIONEN ZWEIER ZAHLEN IM ZAHLENRAUM 100</td></tr>
<tr><td>9-5</td><td>E-E</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">E-E</td></tr>
<tr><td>40-30</td><td>Z-Z</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">Z-Z</td></tr>
<tr><td>70-8</td><td>Z-E$_u$</td><td colspan="2">62</td><td colspan="2">Z-E$_u$</td></tr>
<tr><td>34-2 57-9</td><td>ZE-E ZE-E$_u$</td><td colspan="2">32 50, 48</td><td colspan="2">ZE-E ZE-E, Z-E$_u$</td></tr>
<tr><td>97-40</td><td>ZE-Z</td><td colspan="2">57</td><td colspan="2">ZE-Z</td></tr>
<tr><th colspan="2">Stellen nacheinander</th><th colspan="2">1.Teilschritt</th><th colspan="2">Typ</th><th colspan="2">2.Teilschritt</th><th colspan="2">Typ</th></tr>
<tr><td>43-21
56-28</td><td>ZE-ZE
ZE-ZE$_u$</td><td colspan="2">23 42
36 48</td><td colspan="2">ZE-Z ZE-E
ZE-Z ZE-E$_u$</td><td colspan="2">22
28</td><td colspan="2">ZE-E ZE-Z
ZE-E$_u$ ZE-Z</td></tr>
<tr><th colspan="2">Stellen einzeln</th><th>1.Teilschritt</th><th colspan="2">Typ</th><th>2.Teilschritt</th><th>Typ</th><th colspan="2">3.Teilschritt</th><th>Typ</th></tr>
<tr><td>48-21
56-28</td><td>ZE-ZE
ZE-ZE$_u$</td><td>20 7
30 -2</td><td colspan="2">Z-Z E-E
Z-Z E-E$_u$</td><td>7 20
-2 30</td><td>E-E Z-Z
E-E$_u$ Z-Z</td><td colspan="2">27
30-2=28</td><td>Z+E
Z-E$_u$</td></tr>
<tr><td colspan="10">Stellenweise Bearbeitung einer unterschreitenden Subtraktion: Die oben angeführte Schreibweise ist ungewohnt und wird so auch nicht unterrichtet. Das Minus vor 2 meint keine negative Zahl, sondern symbolisiert, dass noch 2 weggenommen werden müssten, die sich bei 6-8 „nicht ausgegangen“ sind.</td></tr>
</table>

Im Zahlenraum 100 ergeben sich deutlich weniger unterschiedliche Aufgabentypen, da es zu keiner Unterschreitung der Null kommen kann.

Im Unterricht wird zumeist das schrittweise Vorgehen als favorisierte Methode eingesetzt, nicht zuletzt deswegen, weil sie in jedem Zahlenraum für beide Strichrechnungen durchführbar bleibt. Auf der anderen Seite sollten auch bei der Subtraktion alternative Rechenweisen zugelassen bzw. sogar angeregt werden, wenn Zahlenkonstellationen es anbieten, z.B. Ergänzen bei 78-76 (kleine Differenz) oder Stellenwerte einzeln bei 76-61 (einfache Teilrechnungen).

Treten Probleme bereits beim nichtunterschreitenden Abziehen von Einern und/oder Zehnern auf, so sollte man mögliche Ursachen möglichst genau lokalisieren. Das könnten basale Zahlenzerlegungsprobleme, einfachere Subtraktionen der Art 90-50, 8-6 … oder das korrekte Verarbeiten von Stellenwerten betreffen. In diesen Fällen ist angeraten, entsprechende Bereiche zu wiederholen und zu festigen bevor unterschreitende Subtraktionen bearbeitet werden. Auch bei Subtraktionen ist beim Einsatz von Dienesmaterial wichtig, zählende Prozesse nicht zu fördern und im Idealfall (durch sprachliche Begleitung) komplett zu verhindern.

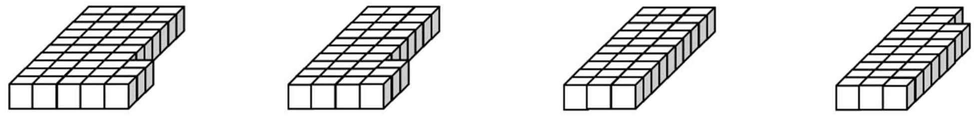
Wieder kann man die zuerst gelegte und sodann (mit Hand, Handtuch, …) verdeckte Ausgangszahl (Minuend) für den handelnden Rechenvorgang nützen. Alternativ kann man den Abziehvorgang verbal begleitet wieder ausschließlich in der Vorstellung durchführen und Rechenschritte optional erst danach handelnd durchgehen. Die Unterschreitung unter Verwendung des Dienesmaterials wird hier lediglich mit der schrittweisen Bearbeitung vorgestellt.

??? *Hier steht eine Rechnung, lege bitte die Anfangszahl mit dem Material.* (schriftlich vorgegeben) *Was sollst du jetzt wegnehmen/abziehen. Wie viele Zehner? Und Einer? Womit möchtest du beginnen? Wenn du willst, kannst du jederzeit ein Zwischenergebnis notieren.* Kinder sollten grundsätzlich ermutigt werden, halbschriftlich unterstütztes Kopfrechnen zu üben. *Sind genug Einer in der Anfangszahl? Wie viele Zehner bleiben übrig? Kannst du schon vorab sagen, wie viele Zehner die Ergebniszahl haben wird? Und jetzt noch …?*

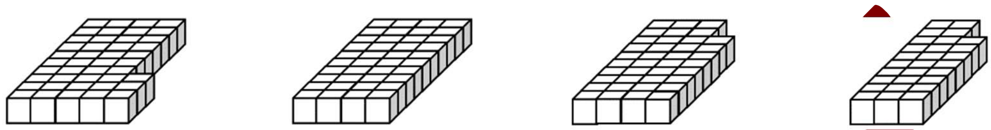
Hier wird beispielhaft eine Rechnung mit der Zehnerstoppmethode begleitet:

43 - 15

Stellen nacheinander: 43 - 10 ⇒ 33 - 3 ⇒ 30 - 2 ⇒ 28

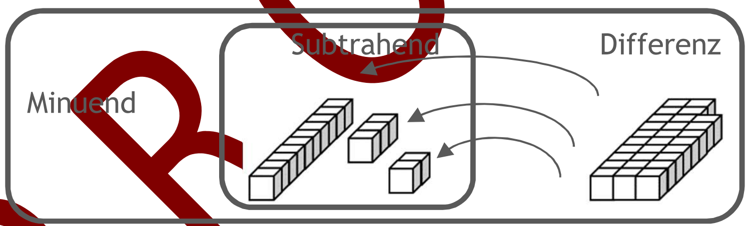


Stellen nacheinander: 43 – 3 ⇒ 40 – 2 ⇒ 38 – 10 ⇒ 28

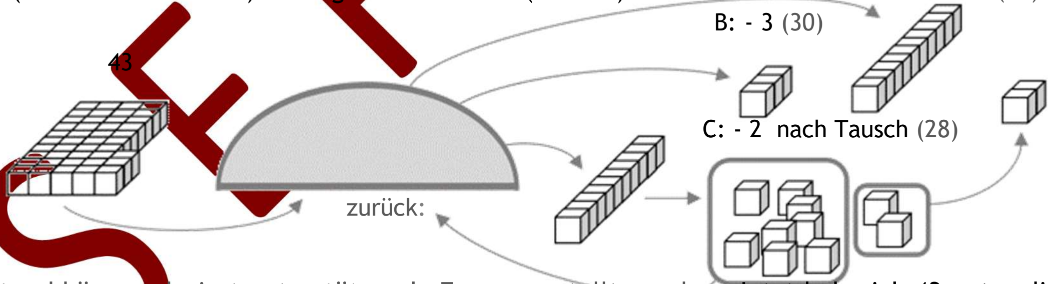


Vor dem jeweils unterschreitenden Rechenschritt ist beim Dienesmaterial ein Tauschvorgang notwendig (10 Einer an Stelle eines Zehners). Um den Fokus durch den Tauschprozess nicht zu stark vom Wesentlichen abzulenken, empfiehlt es sich, kleine Zehnerhäufchen für einen raschen Tausch vorzubereiten.

Hilfreich ist weiters, das dem Subtrahenden entsprechende und zur Seite geschobene Material in einem Abstand zum verbleibenden Rest (Differenz) am Tisch liegen zu lassen. So kann man im Anschluss an den Rechenprozess sowohl die Differenz als auch den Subtrahenden sichtbar verbleiben lassen:



Die verdeckte Begleitung kann statt mit Hilfe der Hände durch Einsatz einer undurchsichtigen Schale (z.B. aus Kunststoff) durchgeführt werden (43 – 15):



Begleitend können dosiert unterstützende Fragen gestellt werden. Jetzt habe ich 43 unter die Schale gegeben, was soll ich zuerst herausnehmen? Wie viel ist darunter verblieben? Schreib bitte das Zwischenergebnis auf. Und jetzt? Sind genug Einer da, um 5 wegzunehmen? Wie können wir aber dennoch 5 wegnehmen? Was soll ich dir also tauschen? …

Teilschritte der Unterschreitung: Die Unterschreitung von Zehnern erfolgt in einem oder zwei Teilschritten. Bei 33 – 5 werden zuerst die vorhandenen Einer entfernt (3) und anschließend noch so viele Einer, wie noch erforderlich (2). Der erste Schritt ZE - E (33 - 3) ist eigentlich banal, es werden lediglich die vorhandenen Einer entfernt und es bleibt eine Zehnerzahl (30) übrig. Beim zweiten Schritt muss zuerst überlegt werden, wie viele Einer noch zu entfernen sind und dann sind diese von der Zehnerzahl abzuziehen: Z - E (5 = 3 + ? und 30 – 2).

Lassen sich über längeren Zeitraum keine anhaltenden Verbesserungen erzielen, ist auch hierbei auf vorhandene sichere Grundlagen zu achten. Fallen Rechnungen wie 43 – 3 oder 72 – 2 wirklich leicht (über eine nur das Kurzgedächtnis fordernde Übungseinheit hinaus) und wie sieht es mit 60 – 4 oder 90 – 8 aus? Außerdem werden auch beim Unterschreiten sichere Zahlenzerlegungen der Zahlen bis 10 benötigt und selbstverständlich ein problemloser Umgang mit Stellenwerten.

Kinder, die bei Subtraktionen ohne Unterschreitung vorwiegend einzeln zählen, haben keine Chance auf sinnvolle Lernprozesse bei unterschreitenden.

Übergang zur Malschreibweise: Wenn die rechnerischen Voraussetzungen zur Bearbeitung von Malsätzchen sowie das Operationsverständnis erreicht wurden, also eine klare und korrekte Vorstellung zu einem Malsätzchen x·y als x Portionen der Größe y vorhanden ist, kann auch die Schreibweise von Malsätzchen evtl. mit dieser Assoziationshilfe (*Buchner C.*) eingeführt werden:

Zuerst kann man Aufgaben ausschreiben: fünfmal drei bzw. 5 mal 3

Dann kann man übergangsweise das a mit einem Punkt ausmalen: 5 m•l 3

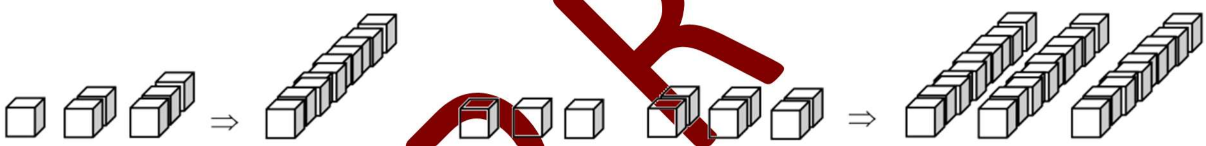
Zuletzt geht man zur Punktschreibweise über: 5 • 3

„Zauberrechnung“ 10 ·

Oft hören Kinder bei Rechnungen, die mit 10 · beginnen, man müsse bloß eine Null an die zweite Zahl anhängen. Dass Mitschülerinnen oder Eltern das sagen, ist verständlich, von Lehrerinnen sollte dieses Vorgehen nie angeboten werden, da es mathematisch falsch ist, weil es ja bei Kommazahlen nicht stimmt. Hier ein Erklärungsmodell, das sich auf die Bedeutung des Zehners im dekadischen System bezieht:

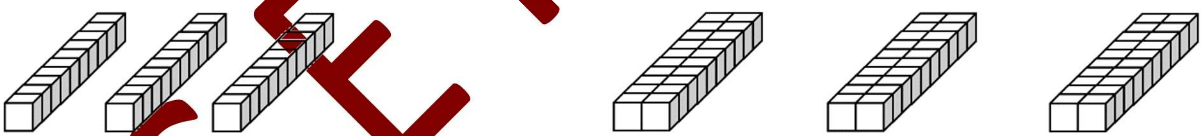
Durch Legen von 10 mal einem Einerwürfel wird eine Zehnerstange erzeugt, durch das Legen von 10 mal 3 Einerwürfeln werden drei Zehnerstangen erzeugt. ***10 · ist also eine „Zauberrechnung“, die aus kleinen Einern große starke Zehner macht!***

??? *Lege bitte zehnmal einen Einer in einer Reihe auf. Was ist dabei entstanden? Genau, eine Zehnerstange. Jetzt lege bitte zehnmal immer drei Einer jeweils in Reihen auf. Und hier sind jetzt? Also erzeugt die Rechnung 10 · aus Einern … ja Zehner. Aus kleinen schwachen Einern* (mitleidig auf einen Einer zwischen Zeigefinger und Daumen blickend) *werden große, starke Zehner.* (gestikulierend etwa den Oberarmmuskel anspannend einen Zehner zeigen)

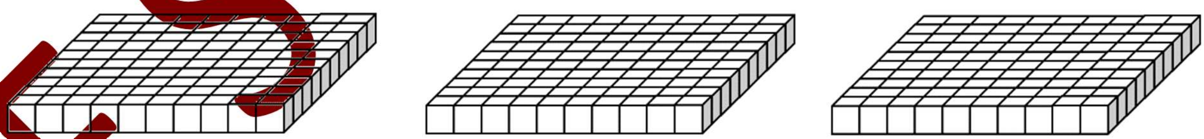


1·1 2·1 3·1 … 10·1 … ein Zehner 1·3 2·3 … 10·3 … drei Zehner

abc Den dargestellten Grundgedanken kann man dann mit demselben Grundgedanken z.B. auf 10·30 und analoger Darstellung mit Material erweitern:



1·30 2·30 …



⇒ 10·30 … 3 Hunderter, also 10·3 Zehner = 3 Hunderter

abc Die Erweiterung auf Zauberrechnungen der Art 100· oder 1000· … lässt sich unter Bezugnahme auf das Dienesmaterial (evtl. auf dessen zweidimensionale Darstellung) gut sprachlich durchführen. Es entstehen dabei über- oder überübernächste … Stellenwerte.

In weiterer Folge kann man dann so argumentieren: bei 10·27 muss man ja zehnmal die Zahl 27 nehmen, also 10·20 **und** 10·7. Dadurch werden aus 2 Zehnern 2 Hunderter und aus 7 Einern 7 Zehner. Somit rücken die Ziffern jeweils eine Stelle nach links.

ZE HZE
10·27 = 270 oder 10·2Z = 2H und 10·7E = 7Z ⇒ 2H+7Z = 200+70 = 270
Da Einer und Zehner um eine Stelle „stärker“ nach links rücken ergeben sich Null Einer.

	H	Z	E
10 ·		2	7
	2	7	0

Es geht dabei keineswegs um Wortklauberei, sondern um eine mathematisch korrekte Erklärung. Dieser liegt eben der Kern der Zehnerbündelung unseres Zahlensystems zugrunde.

abc Kontrastierend kann man auch überschreitende Additionen wie oben dargestellt, allerdings von links mit dem jeweils größten Stellenwert beginnend, durchführen. So kann deutlich gemacht werden, dass bei Überschreitungen durch die entstandene Bündelung die bereits notierte Stelle wieder ersetzt werden muss. Aus diesem Grund ist es geschickter von rechts nach links mit den Einern beginnend zu rechnen, um den Arbeitsaufwand geringer zu halten.

abc In einem Zwischenschritt kann man jeweils nur die Ausgangszahl legen und alle Rechenschritte lediglich mit Worten beschreiben und Ergebniszahlen anschreiben.

Dann kann man Rechnungen gänzlich ohne Verwendung des Materials durchführen, dabei jedoch noch verbal beschreiben, wie man bei der handelnden Bearbeitung vorgehen würde. Es werden also nurmehr die Summanden und die entstandene Summe schrittweise notiert.

<u>Begleitung schriftlicher Subtraktionen mit Dienesmaterial</u>

Bei dieser Übung wird die Begleitung von Subtraktionen mit Dienesmaterial mit Hilfe des Abziehverfahrens beschrieben. Das in Österreich fast ausschließlich zum Einsatz kommende Ergänzungsverfahren wird weiter hinten behandelt. Grundsätzlich sind beide Verfahren möglich und haben im Unterricht ihre Berechtigung, allerdings hat jede der beiden Methoden ihre Vor- und Nachteile.

Das Ergänzungsverfahren hat den Vorteil, dass es bei beliebig großen Zahlen mit gleichbleibendem Schwierigkeitsgrad einsetzbar ist und derart auch schwächeren Kindern kompensatorisch zu richtigen Ergebnissen verhilft.

Es sind eben unabhängig von der Größe der Zahlen nur Ergänzungen im Zahlenraum 20 zu lösen (bei nur einem Subtrahenden). Nachteil ist, dass mangelndes Stellenwertverständnis so verborgen bleiben kann und das „Wegnehmen“ durch die Sprechweise nicht deutlich (hörbar) wird. So bleibt vielen Kindern trotz korrekter Durchführung die Bedeutung des Übertrags verborgen.

Das Abziehverfahren hat den großen Vorteil, dass Kinder bei diesem Vorgehen die einzelnen Schritte meist weit besser mit „Wegnehmen“ verbinden können und verstehen. Außerdem werden die Stellenwerte eher mitgesprochen und die Entbündelung kann besser mit Material begleitet und bei Unterschreitungen sinngemäß verstanden werden. Nachteile ergeben sich in der besonders bei Unterschreitungen aufwändigeren Schreibweise, sowie bei gewissen Zahlenkonstellationen, wie etwa bei Rechnungen mit einer oder mehreren Nullen im Minuenden 6000–2 oder noch deutlicher bei 1 000 000–1. (Allerdings wäre wünschenswert, dass bei solchen Rechnungen das Kopfrechnen bevorzugt wird)

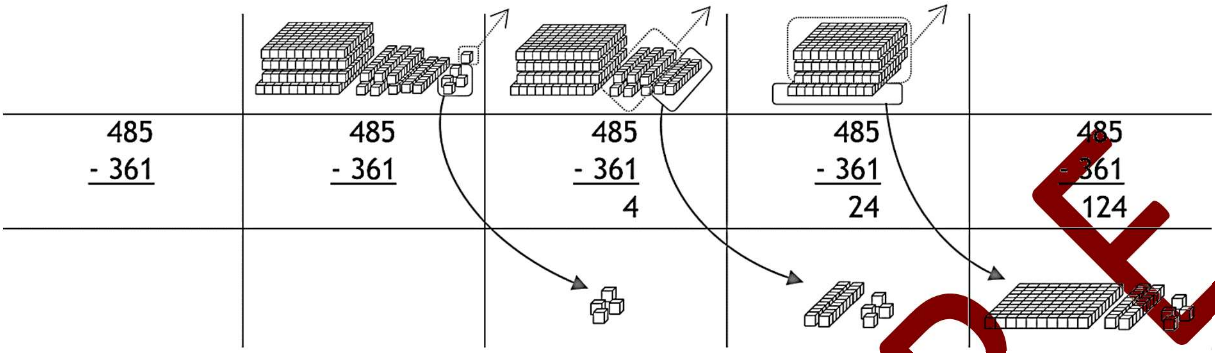
Ich persönlich halte das Abziehverfahren für das eindeutig verständlichere und würde es im Anfangsunterricht bevorzugen. Ebenso wie beim Addieren sollten den Kindern noch vor dem Einsatz eines schriftlichen Verfahrens nebeneinander geschriebene Minusrechnungen gut gelingen. Wäre dies nicht der Fall, ist es zumeist ein Hinweis auf vorliegende Probleme mit Stellenwerten oder Zahlenzerlegungen, mit dem Operationsverständnis bzw. einfacheren Minusrechnungen mit oder ohne Unterschreitungen. Derartige Schwierigkeiten sollten nach Möglichkeit vor dem Einsatz des schriftlichen Verfahrens weitgehend behoben sein.

In den folgenden Beispielen soll mit Hilfe des Stellenwertmaterials beim Abziehverfahren verdeutlicht werden, dass weggenommen wird und bei Unterschreitungen ein Entbündeln erforderlich ist. Es werden jeweils pro Stellenwert entsprechend viele Materialteile entfernt, wie im Subtrahenden angegeben. Ist dies nicht möglich wird davor ein Teil des nächsthöheren Stellenwertes tatsächlich handelnd entbündelt.

Auch dazu finden Sie einige Ausführungen bereits im Buch *Rechenschwäche – konkret*.

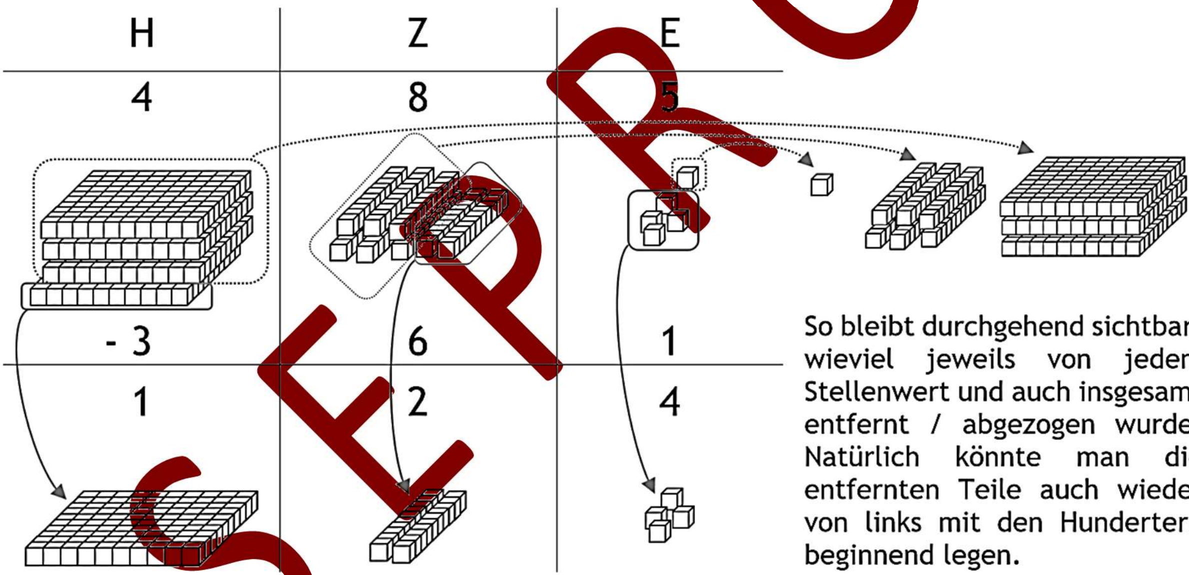
??? *Schreibe bitte die Minusrechnung 485–361 an, indem du die beiden Zahlen untereinander anschreibst und vor 361 ein Minus schreibst. Achte darauf, dass du gleiche Stellenwerte genau untereinanderschreibst. Lege jetzt bitte die Zahl 485 mit dem Stellenwertmaterial über die Rechnung hin. Oben liegt jetzt die Ausgangszahl. Wie viele Einer kommen weg? Richtig, nur ein Einer. Nimm ihn weg, dann bleiben? Schreibe sie unten an und lege die verbleibenden Einer darunter. Wie viele Zehner sind es zu Beginn? Weg kommen? Es bleiben also 2 Zehner. Schreibe es wieder an und lege die übrigen Zehner hin. Und zuletzt die Hunderter ... und das Ergebnis. Also kommt insgesamt heraus …?*

Begleitende Fragen sollen den Denkprozess wieder nach Bedarf unterstützen. So viel wie nötig, so wenig wie möglich. Das Kind soll jedenfalls ermutigt werden, seine Gedanken parallel zur Materialhandlung in Worte zu fassen.



Die Verwendung einer Stellenwerttafel kann Kinder zusätzlich unterstützen, das jeweilige Material wird in die entsprechenden Spalten gelegt.

Bei Beispielen ohne Unterschreitung kann man ebensogut von links, also mit den Hundertern beginnen. Bei Unterschreitungen wird allerdings wieder eine Korrektur bereits angeschriebener Stellen notwendig, was sich beim schriftlichen Verfahren anders als beim Kopfrechnen eher erschwerend auswirkt.



So bleibt durchgehend sichtbar, wieviel jeweils von jedem Stellenwert und auch insgesamt entfernt / abgezogen wurde. Natürlich könnte man die entfernten Teile auch wieder von links mit den Hundertern beginnend legen.

Bei der sprachlichen Begleitung soll den Kindern vorerst abverlangt werden, die Stellenwerte korrekt zu sprechen und nicht nur die Ziffern unter Vernachlässigung der Wertigkeit. Also statt *Acht weniger sechs ist zwei* sollte die Formulierung *Achtzig weniger sechzig ist zwanzig* oder *8 Zehner weniger 6 Zehner sind 2 Zehner* eingefordert werden.

Die sprachliche Kurzform *Acht weniger (minus) sechs ist zwei* kann natürlich in Folge verwendet werden, wenn das Rechenverfahren bereits verstanden wird und gut gelingt.

Stellenwerttafel, -tabelle

Neben Stellenwertkarten (-tafeln) zu jedem Stellenwert (1,2, ..., 10, 20, ... 100, 200, ...), kann der Einsatz einer Stellenwerttafel in der Er- und Bearbeitungsphase sehr nützlich sein.

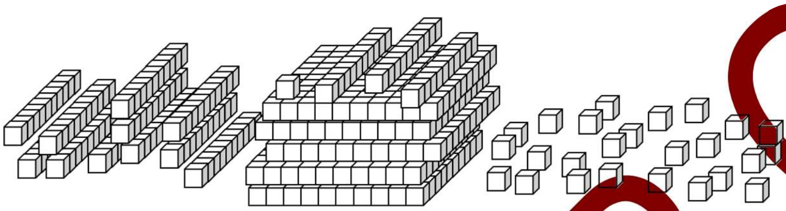
Dabei können verschiedene Abstraktionsstufen verwendet werden:

II .	Z	E	Z	E	Z	E	21 = 20 + 1
	II	.	●●	●	2	1	2 Z + 1 E

Während der Erarbeitung der Bündelung – bei Problemen auch länger – kann eine Stellenwerttafel die Übersetzung zwischen Sprache, Schrift und Darstellung unterstützen.

$21 = 20+1 = 2\cdot 10+1\cdot 1 = 2Z+1E \Rightarrow$ II .

??? *Zähle bitte ab, wie viele Einer, Zehner und Hunderter es sind und trage die Zahlen in der Stellenwerttabelle ein. Tausche jetzt bitte Teile von denen du 10 oder mehr hast in die jeweils nächstgrößeren. Korrigiere immer auch den Eintrag in der Tabelle nach jedem Tausch. Führe so viele Tauschprozesse wie möglich durch.*



H	Z	E
5	14	26
5	15	16
6	5	16
6	**6**	**6**

abc *Alternativ dazu kann man das Material zu einer Zahl selbst auf eine entsprechend große Stellenwerttafel legen und die Ziffern erst nach Abschluss aller möglichen Tauschprozesse dazuschreiben.*

abc *Vorübung für die schriftlichen Rechenverfahren: Es wird auf einer Stellenwerttafel eine Zahl vorgegeben (es kann auch das Anschreiben einer mehrstelligen Zahl in einer Zelle gestattet werden). Dann wird Schritt für Schritt wahlweise entbündelt oder gebündelt und der Eintrag in der Stellenwerttafel entsprechend angepasst.* Solche Überträge werden bei den Rechenalgorithmen verwendet.

H	Z	E
2	5	3
1	15	3
1	14	13
0	20	53

Bei dieser Übung kann wieder Materialbegleitung erfolgen, wobei dies je nach Anzahl der benötigten Teile mitunter zu aufwändig werden kann.

??? Abstrakter werden Übungen an der Stellenwerttafel, wenn für jeden Stellenwert gleiche bzw. gleichartige Materialteile oder Symbole verwendet werden, z.B. Wendeplättchen, Spielsteine, Punkte am Papier etc. wie auch beim Markenspiel von Montessori.

Nimm bitte 5 Plättchen und lege diese beliebig in die Stellenwerttabelle und schreibe die entstandene Zahl an. Suche möglichst viele/alle Möglichkeiten für dreistellige Zahlen. (Es muss also mindestens eines im Hunderterfeld liegen): 140, 131, 122, 113, 104, 230, 221, 212, 203, 320, 311, 302, 410, 401, 500.

Wie lautet die kleinste bzw. größte Zahl, die du mit 11 Plättchen legen kannst? (Zahl mit maximal Stellen und max. 9 Plättchen pro Zelle) $\Rightarrow$ 29 bzw. 920.

H	Z	E
●	●●●●	
●	●●●	●
●	●●	●●
usw. bis:		
●●●●●		

Welche Zahlen zwischen 300 und 400 kannst du mit 4 Plättchen legen: 310 und 301.

Welche Zahlen entstehen, wenn du bei der Zahl 438 nur ein Plättchen umlegen darfst? Schreibe alle Zahlen an, die du derart bilden kannst. 348, 339, 528, 429, 537, 447.

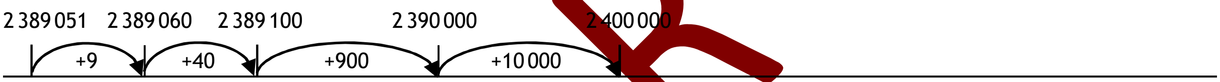
Ergänzen auf volle Stellenwerte

Das Ergänzen auf jeweils festgelegte, volle Stellenwerte wird für den Zahlenraum 100 an anderer Stelle beschrieben. Hier noch zwei Anregungen zum Ergänzen, die in beliebigem Zahlenraum umsetzbar sind. Beide Varianten setzen ein schrittweises Ergänzen um.

??? *Bitte ergänze die Zahl 2389051 auf den nächsten Hunderttausender. Wie lautet dieser? Richtig, es ist 2400000. Füge mit den Einern beginnend jeweils so viele Plättchen (Punkte) hinzu, wie du benötigst, um auf einen Teil des nächstgrößeren Stellenwertes tauschen zu dürfen. Diesen eingetauschten Teil lege dann auf das entsprechende Feld.* (Bei gemalten Punkten werden die zehn im kleineren Stellenwertbereich durchgestrichen, und ein Punkt im nächstgrößeren hinzugefügt) *Verwende dazu eine andere Farbe. Schreibe immer als Zwischenschritt an, wie viel du hinzugefügt hast.* Stelle für Stelle von rechts nach links.

HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
● Startzahl ○ ergänzt		●●	●●●⊙	●●●●● ●●●⊙○	●●●●● ●●●●⊙	⊙○○○○ ○○○○○	●●●●● ⊙○○○○	●○○○○ ○○○○○
⊙ Übertrag				1	0	9	4	9
Am Ende ergibt sich:		●● 2	●●●⊙ 4	0	0	0	0	0

??? Eine Ausgangszahl wird auf einem unbeschrifteten Zahlenstrahl weit links eingetragen und Stellenwert für Stellenwert ergänzt. *Hier auf dem Zahlenstrich ist die Zahl 2389051 eingezeichnet. Wie lautet die Zahl mit dem nächsten vollen Zehner? Trage sie bitte ein und schreibe dazu, wie viele Einer du bis 2389060 dazugeben musstest. Genau, plus 9. Setze jetzt mit den Zehnern fort usw. bis du den nächsten Hunderttausender erreicht hast.*



⇒ 2389051+9+40+900+10000 = 2389051**+10 949** = 2400000

Stolperstein Deutsche Sprache

Bekanntlich ist das Erlernen der Sprechweise und der Art des Schreibens mehrstelliger Zahlen in der deutschen Sprache wegen der Sprechreihenfolge der Stellenwerte im Gegensatz zu den meisten anderen Sprachen deutlich schwieriger. Bei der Konvention der Schreib- und Sprechweise von Zahlen handelt es sich um einen der wenigen Bereiche der Mathematik, in denen weniger inhaltliches Verständnis als Fähigkeiten der Gedächtnisleistung, der intermodalen, assoziativen Verknüpfung sowie serieller und räumlicher Informationsverarbeitung zum Gelingen erforderlich sind.

Dabei ist anzumerken, dass in erster Linie das Verständnis für die Bündelung zu überprüfen ist (Dialog, Bündelung, Entbündelung, Tauschprozesse), wenn Probleme bzw. Fehler in der Benennung oder beim Schreiben mehrstelliger Zahlen auftreten. Liegen dabei Probleme vor, muss die Bündelung noch auf handelnder Ebene erneut aufgebaut bzw. gestärkt werden. Scheinen die **Probleme trotz bestehenden Verständnisses des dekadischen Zahlensystems** tatsächlich **nur im Schreiben und Sprechen** mehrstelliger Zahlen liegen, kann man die folgende Übung einsetzen. Dabei werden die Stellenwerte in der Anfangsphase (und später bei Problemen zusätzlich zwischendurch) sprachlich und in der Darstellung mit Zahlen-/ Stellenwertkarten betont stellenwertweise behandelt.

??? *Die Zahl lautet 27. Also* 20 *und* 7 (Die Zahlen werden parallel zum Zeigen der Zahlenkarten ausgesprochen und nebeneinandergelegt) *zusammen also* 7 *und* 20 ⇒ 27

Während man ***sieben und zwanzig*** spricht, schiebt man die Karte 7 über die Null von 20.

??? *Die Zahl lautet 427. Also* 400, 20 *und* 7 (Die Zahlen werden parallel zum Zeigen der Zahlenkarten ausgesprochen und nebeneinandergelegt) *zusammen also* 400, 7 *und* 20 ⇒ 27 ⇒ 400 ⇒ 427 Zuerst wird also 400 gelegt, dann 7 auf 20 und sofort anschließend 27 gemeinsam auf 400.

Zahlentreppe

Es werden die Zahlen von 0 bis 10 aufgelegt (Moosgummizahlen, Zahlenkarten, …) und Karten mit allen 66 Plus- und/oder Minusrechnungen im Zahlenraum 10 zur Verfügung gestellt. Nun müssen alle Rechnungen ihren Ergebniszahlen zugeordnet werden. Bei der Beobachtung kann man gut erkennen, wie viele Zählprozesse noch sichtbar werden, wie langsam bzw. schnell gearbeitet wird und welche Rechensätze falsch bzw. gar nicht beantwortet werden oder noch besonders schwerfallen.

??? *Hier liegen die Zahlen von 0 bis 10. Und hier sind alle kleinen Plusrechnungen auf Kärtchen. Bitte lege jede Rechnung zur dazugehörenden Ergebniszahl.* Ebenso verfährt man beim Bearbeiten der Minusrechnungen.

Alle 66 Plusrechnungen innerhalb des Zahlenraums 10										
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0+0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9	0+10
0-0	1+0	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8	1+9
1-1	1-0	2+0	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8
2-2	2-1	2-0	3+0	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7
3-3	3-2	3-1	3-0	4+0	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
4-4	4-3	4-2	4-1	4-0	5+0	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5
5-5	5-4	5-3	5-2	5-1	5-0	6+0	6+1	6+2	6+3	6+4
6-6	6-5	6-4	6-3	6-2	6-1	6-0	7+0	7+1	7+2	7+3
7-7	7-6	7-5	7-4	7-3	7-2	7-1	7-0	8+0	8+1	8+2
8-8	8-7	8-6	8-5	8-4	8-3	8-2	8-1	8-0	9+0	9+1
9-9	9-8	9-7	9-6	9-5	9-4	9-3	9-2	9-1	9-0	10+0
10-10	10-9	10-8	10-7	10-6	10-5	10-4	10-3	10-2	10-1	10-0
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Alle 66 Minusrechnungen innerhalb des Zahlenraums 10										

Sehr gut und jetzt ordne die Rechnungen noch (der Größe nach).

abc Alternativ zur Verwendung aller Kärtchen, kann man zuvor nur jene heraussuchen, die man in der Arbeit mit Strategien bereits thematisiert hat.

abc Optional kann man zu den zu Beginn aufgelegten Zahlen auch Darstellungen hinzufügen, also die Zahlen mit Steckwürfeltürmen, Zehner-Punktefeldern u.a. veranschaulichen.

Rechenkartei für Strichrechnungen im Zahlenraum 10

Der Einsatz einer Rechenkartei kann vielfältig erfolgen (Siehe auch *Rechenschwäche-konkret Grüneis A., 2011*). Bei der hier beschriebenen Art geht es darum, zeitnahe eine Assoziation anzubieten. Im Idealfall notiert man zur eigentlich abgefragten Rechnung in kleinerer Schrift eine weitere, die dieses Kind bereits erfolgreich für eine Assoziation einsetzen konnte. Verwendet man dieselbe Idee jedoch in einer Klasse, wird man Hilfsrechnungen dazuschreiben, die eine möglichst große Chance besitzen, als Hilfe genutzt zu werden.

??? *Bitte sag mir immer das Ergebnis der Rechnung. Wenn dir eine Rechnung schwerfällt, hilft dir vielleicht die klein dazugeschriebene zweite Rechnung oder der Hinweis.*

4 + 4	Fingerbild!	7 + 1	6 + 4	Fingerbild!	7 - 7	Hand
4 + 5	5 + 2	2 + 7	6 + 3	9 - 4	7 - 6	5 - 3

abc Bei der Arbeit mit den Karteikarten kann man in der Erarbeitungsphase ebenso nur Rechnungen verwenden, die zu den bis dahin besprochenen Prinzipien passen. In der Automatisierungsphase reichen auch Kärtchen mit Ergebnis auf der Rückseite.

Schriftliche Rechenverfahren

Vorweg: Es besteht im Unterricht weitgehende **Methodenfreiheit** bezüglich der Wahl der von der Lehrerin bevorzugten schriftlichen Rechenverfahren. Allerdings bestimmen meist die Schulbücher in der üblichen Praxis über die Methodenwahl. Somit muss man bei der Verwendung anderer als im Buch eingesetzter Verfahren mit Irritationen bei Eltern, Kindern und mitunter auch bei der Direktorin oder Kolleginnen rechnen. Deshalb sollte man beim Abweichen von üblichen Buch-Methoden die getroffene Entscheidung kommunizieren, am besten im Voraus. Oder man entscheidet sich überhaupt dafür, einmal ein Jahr ohne Buch auszukommen, wenn man neue Wege ohne derartige Zwänge gehen möchte. **Man darf also sehr wohl vom Buch abweichende Verschriftlichungen von Rechnungen verwenden**, sollte sich derer jedoch sicher sein, um Nachfragen überzeugt begegnen zu können.

In der Zeit der **Einführung eines schriftlichen Rechenverfahrens** ist der **wiederholte Einsatz von Stellenwertmaterial** sehr wichtig und verständnisfördernd in Bezug auf die Operation und die verarbeiteten Stellenwerte. Zusätzlich können dabei eingesetzte Stellenwerttafeln die Schritte im Ablauf einer Rechnung gut erkennbar machen. Die Materialbegleitung mit Dienesmaterial und Stellenwerttafeln ist an anderer Stelle näher ausgeführt. Im folgenden Abschnitt sollen nur einige Varianten schriftlicher Strichrechenverfahren erwähnt bzw. vorgestellt werden. Dabei werden mindestens dreistellige Beispiele verwendet, zweistellige sollten im Kopf möglich sein.

H	Z	E
3	2	0
1	5	8
4	7	8

Schriftliche Verfahren der Addition sind am einfachsten zu vermitteln, Besonderheiten finden sich bezüglich der Schreibweisen lediglich in Bezug auf den Übertrag. Die Spalten oben zu beschriften (H, Z, E), hilft vielen Kindern, dies kann man den Kindern in weiterer Folge freistellen oder ganz weglassen.

Bei der begleitenden Sprechweise sollten von Beginn an die jeweils bearbeiteten Stellenwerte gesprochen werden, von Erwachsenen und Kindern. Dies soll bewusst machen, dass unterschiedliche Größenordnungen bearbeitet werden, nicht wie später sprachlich suggeriert nur Rechnungen im Zahlenraum 20. *Null Einer und 8 Einer sind 8 Einer, 2 Zehner und 5 Zehner sind 7 Zehner und 3 Hunderter und 1 Hunderter sind 4 Hunderter, also 478*. Mit der Zeit wird man dann zur bekannten Sprechweise übergehen.

Kommt es zu Überschreitungen, kann man wie üblich die Überträge klein beim nächstfolgenden Stellenwert eintragen (Variante ganz links), oder zusätzliche Zeilen für Überträge (grau) einführen. Zusätzliche Zeilen haben den Vorteil, dass entstandene Zehner, Hunderter … also solche besser erkennbar werden.

H	Z	E
4	6	8
1_1	7_1	9
6	4	7

H	Z	E
1	0	0
	1	0
4	6	8
1	7	9
6	4	7

H	Z	E
4	6	8
1	7	9
1	1	
6	4	7

H	Z	E
4	6	8
1	7	9
5	13	17
5	14	7
6	4	7

Sprachliche Begleitung von oben nach unten, von rechts nach links: *8 Einer und 9 Einer sind 17 Einer, also 7 Einer und ein Zehner oben dazu. 6 Zehner und 7 Zehner und dieser Zehner sind 14 Zehner. Das ergibt einen Hunderter hier und 4 Zehner. 4 Hunderter und ein Hunderter und der Hunderter vom Übertrag dazu sind 6 Hunderter, also 647.*

Abgekürzte Möglichkeit: *9 und 8 sind 17, 7 Einer an 1 Zehner weiter. 6 und 7 und 1 sind 14, 4 Zehner an und ein Hunderter weiter. 4 und 1 und 1 sind 6 Hunderter. 647.*

Auch wenn einzelne Varianten mehr Schreibaufwand erfordern, ermöglichen sie Kindern besser, dahinterstehende Rechenschritte sowie Bündelungen besser verstehen zu können.

Die vierte Variante kann in der Einführungsphase die später abgekürzt durchgeführten Überträge bereits anbahnen und für das jeweilige Bündeln in Schritten eine Besprechungsgrundlage liefern und später schrittweise abgekürzt werden (Zu Beginn in Kombination mit Stellenwertmaterial oder alternativ dazu mit Stellenwertdarstellungen aus dem Markenspiel $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, …).

Auf Dauer ist die 3.Schreibweise sehr günstig, da ja die übertragenen Zehner, Hunderter etc. gleichwertig mit den anderen sind und somit gleiche Schriftgröße angebracht ist.

Punktrechnungen

Haben Kinder in der Therapie Probleme mit Punktrechnungen, so sind meist viel grundlegendere Inhalte aufzuarbeiten. (siehe Grundlagen des Einmaleins, Malnehmen, Malrechnung) **Kompromisse bei mangelhaften Voraussetzungen sind nicht sinnvoll.** Fehlt etwas für den aktuellen Schritt, kann man diesen auch nicht fordern ohne in fragwürdige Kompensationen zu zwingen. Eine sehr gute und ausführliche Auseinandersetzung mit dem Thema findet man im Buch *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken* von *Gaidoschik M. 2014.*

Sind wesentliche Voraussetzungen erfüllt, ist **ausreichendes Handeln in der Anfangsphase enorm wichtig**. Auch Zeichnungen, andere bildhafte Darstellungen und letztlich die sprachliche und schriftliche Ausformulierung bedürfen entsprechender Zeit.

Zwei wichtige Elemente in der verständnisbasierten Er- bzw. Bearbeitung von Multiplikationen und Divisionen sind das Abverlangen und Besprechen einfacher Texte auf der einen und die stetige Einbeziehung von Zusammenhängen bereits in der Erarbeitung auf der anderen Seite.

Kinder sollten die Multiplikation als mehrfaches Addieren derselben Zahl und die Division als mehrfaches Subtrahieren derselben Zahl erkennen und verstehen. Zu Beginn der Arbeit am **Einmaleins und deutlich zeitversetzt** am **Einsineins** soll die Ermittlung von Ergebnissen über mehrfaches Addieren bzw. Subtrahieren durchaus erlaubt werden. Vorerst kann man dies sogar anbieten und fördern, weil es ja den Kern der beiden Rechenoperationen erkennen lässt.

Was in der Erarbeitung noch dem Verständnis dienlich ist, wird in im gängigen Aufbau der Einmaleinsreihen zur Sackgasse. Wenn Kinder in Übungs- und Automatisierungsphase immer noch ausschließlich über das Aufsagen der Ergebnisreihen mit Mitzählen oder das reine Auswendigmerken zu Ergebnissen kommen, ist dies ein massives Warnsignal.

Die Thematisierung nützlicher Fragenstellungen zu Zusammenhängen zwischen Rechensätzen fördert inhaltliches Verständnis bzw. zeigt noch bestehende Probleme auf. Dazu einige Beispiele:

- *Welche Rechnung hat das größere Ergebnis? Begründe deine Antwort.* $a \cdot b$ *oder* $a \cdot (b+1)$? $a \cdot b$ *oder* $(a+1) \cdot b$? $\Rightarrow$ *3·5 oder 3·6? 17·31 oder 18·31? Wie unterscheiden sich die Ergebnisse?*
- *Welche Rechnung hat das größere Ergebnis? Begründe deine Antwort.* $a:b$ *oder* $a:(b+1)$? $a:b$ *oder* $(a+1):b$? $\Rightarrow$ *60:3 oder 60:4? 120:5 oder 125:5? Wie unterscheiden sich die Ergebnisse?*
- *Wie verändert sich das Ergebnis dieser Multiplikation/Division, wenn du die erste/zweite Zahl um eins/… vermehrst/verminderst? 17·2, 240:3.*
- *Wie verändert sich das Ergebnis dieser Multiplikation/Division, wenn du die erste/zweite Zahl verdoppelst/halbierst? 6·7, 48:6.*
- *Wie verändert sich das Ergebnis dieser Multiplikation/Division, wenn du die erste Zahl halbierst/verdoppelst und die zweite Zahl verdoppelst/halbierst? 3·8, 50:10.*

Die Arbeit an der Automatisierung ist ein wichtiger abschließender Schritt, der einige Zeit in Anspruch nimmt. Allerdings ist sie erst bei sicherem Operationsverständnis und ausreichendem Grundlagenwissen sowie grundlegenden Rechenfertigkeiten sinnvoll. Dieser Schritt kommt wie der Einmaleins-Aufbau selbst nicht nur für rechenschwache Kinder oft viel zu früh.

Multiplikation

Aufbau des Einmaleins

Im Kapitel **Dienesmaterial** finden sich bereits nähere Ausführungen zu einzelnen Punkten, die in Folge jeweils nur mehr erwähnt werden. Bei der anschließenden Auflistung sollen grob wesentliche Schritte des Aufbaus in einer möglichen Chronologie angeboten werden.

- **Erarbeitung des Malbegriffs:** Zeitlich sukzessive (dynamische) und räumlich simultane (statische) Begriffsbildung mit Material. Betonung der ersten Zahl (Multiplikator) als Portionsanzahl und der zweiten (Multiplikand) als Portionsgröße. (Bereits ab der 1.Klasse)
- **Einführung der korrekten Sprechweise**. (Bereits ab der 1.Klasse)
- **Aufgreifen verschiedener Aspekte der Malrechnung**: Mehrfache Addition (täglich 2l, 7·2), Zusammenfassen mehrerer gleicher Mengen (dreimal 4kg), Vervielfachen, Anstellen von Vergleichen (zehnmal so groß), kombinatorische Anwendung (Paare aus zwei Mengen bilden, z.B. mögliche Tanzpaare), Einsatz bei Punktfeldern und Flächen (3 mal 6 Kästchen/cm^2).

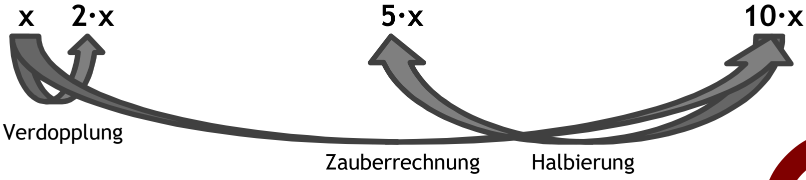
- **Einsatz folierter Mengenbilder:** Jeweils 10 mit je 1, 2, 3, … 10 abgebildeten Objekten. (Äpfel Schwedenbomben, …) zum schnellen Legen von allen Malaufgaben des kleinen Einmaleins.

1·4 ⇒ 

2·4 ⇒ 

4·4 ⇒ 

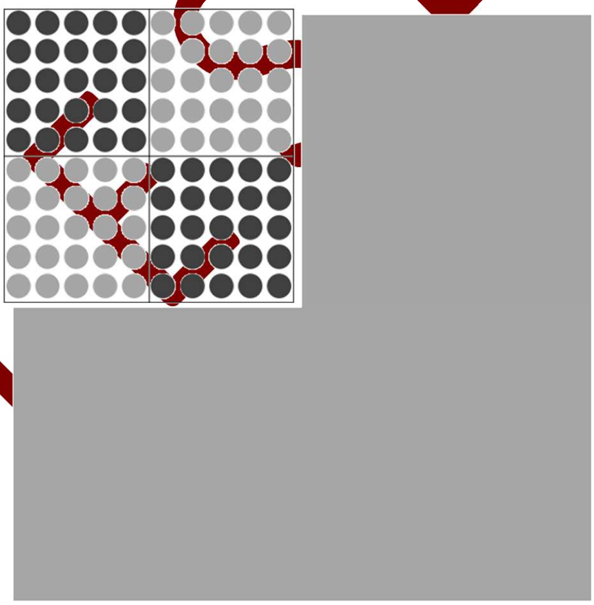
- **Einführung der korrekten Schreibweise.**
- **Beziehungen zwischen Malaufgaben** durch Legen von Material, Mengenbilder (s.o.), Zeichnungen, dem Verdoppeln (Halbieren) mit dem Spiegel oder anhand von Punktfeldern aufzeigen und besprechen. Zweimal ⇔ Viermal, Fünfmal ⇔ Zehnmal, Zehnmal ⇔ Neunmal (noch ohne Ergebnisse).
- **Grund-, Königs-, Kern-, Schlüsselaufgaben:**

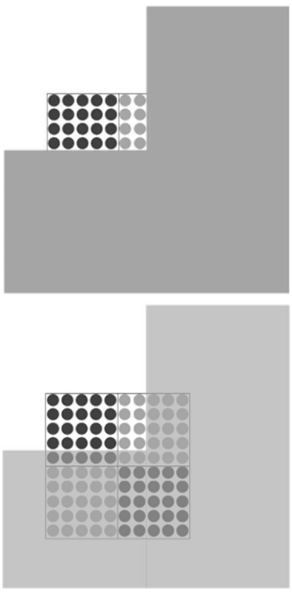


Diese Aufgaben, auch **kurze Reihe** genannt, rücken im Gegensatz zum Reihenaufbau die erste Zahl (1, 2, 10, 5) in den Mittelpunkt des Aufbaus. Bearbeitung mit Ergebnisermittlung.

- **Automatisierung der Königsaufgaben:** Alle 40 Königsaufgaben werden mit Ergebnissen eben durch Verdopplung und Halbierung erarbeitet und automatisiert.
- **Multiplikationen mit Null:** Einführung von Aufgaben mit der Null mit Hilfe einfacher Texte. *Drei Lose gekauft, leider kein Gewinn*: 3·0. *Täglich muss Fr. Heinrich in die Arbeit und zurück insgesamt 7km mit dem Auto fahren. Wie viele km muss sie in einer Arbeitswoche oder in einer Urlaubswoche fahren*: 5·7km = 35km oder 0·7km = 0km.
- **Vertauschungsgesetz:** nicht zu früh und immer mit der Anmerkung, dass **Ergebnisse gleich** sind, die **Bedeutung der beiden Tauschaufgaben jedoch nicht**. Mit Punktfeldern und Einmaleinstafel (mit allen eingetragenen Aufgaben ohne Ergebnisse) bewusst machen, dass durch die Tauschaufgaben die Anzahl der zu merkenden fast halbiert werden kann. So bleiben nur 55 von 100 Aufgaben übrig. Zieht man von der Gesamtzahl auch alle Königsaufgaben und deren Tauschaufgaben ab, bleiben nur mehr 21 zusätzlich zu lernende Aufgaben übrig.

Mit einem Hunderter-Punktefeld und einem Abdeckwinkel (undurchsichtig oder transparent) können alle Malaufgaben des kleinen Einmaleins im Hunderterraum visualisiert werden.





Wie bereits mit den Einmaleinsfeldern und dem Einsatz des Dienes-Materials aufgezeigt, können hier mit Hilfe des Punktefelds und einem Abdeckwinkel alle Aufgaben dargestellt werden. Hier 4·7.

Der Zusammenhang von Tauschaufgaben kann gut durch Drehen des Feldes oder einen selbst durchgeführten Positionswechsel sichtbar und verständlich gemacht werden.

Sehr gut und rasch lassen sich Malaufgaben mit einem (10er-, 20er-, 100er-) Abaco zeigen.

Beim Reihenlernen wird die Gültigkeit des Vertauschungsgesetzes nicht sichtbar, da ja innerhalb einer Reihe nie zwei Tauschaufgaben gemeinsam auftreten.

Alternativ können eingrenzende Aufgaben verwendet werden, diese können durch Rundungen oder durch einfache Vielfache des Divisors gebildet werden:

109:6 (Hilfe im Kopf/am Papier: 10·6=60, 20·6=120) ⇒ das Ergebnis liegt nahe bei 20 und darunter.

367:7 ⇒ das Ergebnis liegt zwischen 50 und 60, weil 350:7=50 und 420:7=60.

2 176:52 ⇒ eine gute eingrenzende Hilfe im Kopf oder am Papier: 10·52=520, 20·52=1040, 40·52=2080, 100·52=5200 ⇒ 50·52=2600 ⇒ das Ergebnis liegt zwischen 40 und 50, näher bei 40.

Eine gute vorbereitende Übung ist die **Suche nach einer Nachbaraufgabe** ohne Rest: *Bitte gib zu dieser Aufgabe eine andere „nahe" an, die Null als Rest ergibt, bei der du das Ergebnis weißt.*
37:4= ⇒ 40:4=10 ⇒ Ergebnis etwas weniger als 10
642:9= ⇒ 630:9=70 ⇒ Ergebnis etwas mehr als 70 (anspruchsvoll)
528:24= ⇒ 480:24=20 ⇒ Ergebnis mehr als 20 (anspruchsvoll)

Zerlegung in Teilaufgaben

Der Dividend wird in leicht teilbare Portionen zerlegt, die Notation kann in beliebigem Umfang und auf unterschiedliche Weise erfolgen.

??? *Spalte wie bei folgendem Beispiel Teile der Ausgangszahl (Dividend) ab, die sich gut durch die zweite Zahl (den Divisor) teilen lassen. Schreibe dabei alle notwendigen Teilschritte an.*

Hier einige Beispiele zu möglichen Vorgehens- bzw. Schreibweisen, von denen man einzelne wahlweise vorstellen kann, nachdem Kinder selbst ohne Anleitung probiert haben:

	A	B	C
5 5 6 : 3 =			
- 3 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
2 5 6			
- 2 4 0	8 0	8 0	8 0
1 6			
- 1 5	5	5	5
1 R e s t	1 8 5	1 8 5	1 8 5

5 5 6 : 3 = 1 0 0 + 8 0 + 5 = 1 8 5 R e s t 1
2 5 6
1 6

Bei der linken und den unteren Schreibweisen wird das Aufteilen selbst schriftlich dokumentiert, mit hohem Schreibaufwand, dafür einer größeren Chance darauf, das Vorgehen verstehen zu können. Besonders in der Anfangsphase sinnvoll.

		A	B	C	D	E
4 1 8 : 5 =						
- 5 0		10	10	10	10	10
3 6 8						
- 5 0		10	10	10	10	10
3 1 8						
- 5 0		10	10	10	10	10
2 6 8						
. . .		50	50	50	50	50
1 8						
- 1 5		3	3	3	3	3
3	Rest	83	83	83	83	83

	A	B	C	D	E
4 1 8 : 5 =					
- 1 0 0	20	20	20	20	20
3 1 8					
- 1 0 0	20	20	20	20	20
2 1 8					
- 1 0 0	20	20	20	20	20
1 1 8					
- 1 0 0	20	20	20	20	20
1 8					
- 1 5	3	3	3	3	3
3	83	83	83	83	83

		A	B	C	D	E
4 1 8 : 5 =						
- 4 0 0		80	80	80	80	80
1 8						
- 1 5		3	3	3	3	3
3	Rest	83	83	83	83	83

Bei dieser Begleitung sind nicht zwingend optimale Abspaltungen verlangt, bei denen sich möglichst wenige Schritte ergeben. Wie im Beispiel darüber sichtbar, kann man die Größen der abgespaltenen Teile unterschiedlich wählen. Natürlich ist eine Variante wie jene ganz links auf Dauer zu aufwändig und wegen der vielen Rechenschritte fehleranfällig, allerdings wird das Teilen sehr gut erkennbar (Anfangs auch mit Dienesmaterial und Marken des Markenspiels begleitbar).

Andere Notationsformen, bei denen ersichtlich wird, dass unterschiedliche Vorgehensweisen durchaus ebenbürtig sind (Für manche Kinder sind angebotene Spalten bestimmt hilfreich, um Ziffern geordnet übereinanderschreiben zu können):

67 : 3 = 22 R 1
10 · 3 = 30 ⇒ 30 : 3 = 10
10 · 3 = 30 ⇒ 30 : 3 = 10
2 · 3 = 6 ⇒ 6 : 3 = 2

161 : 7 = 23
70 : 7 = 10
70 : 7 = 10
21 : 7 = 3

161 : 7 = 23
140 : 7 = 20
21 : 7 = 3

435 : 6 = 72 R 3
300 : 6 = 50
135 Rest
120 : 6 = 20
15 Rest
12 : 6 = 2
3 Rest

435 : 6 = 72 R 3
420 : 6 = 70
15 Rest
12 : 6 = 2
3 Rest

425 : 11 = 38
- 110 : 11 = 10
315
- 220 : 11 = 20
95
- 88 : 11 = 8
7 Rest

137 : 6 = 22 R 5
120 : 6 = 20
17 : 6 = 2

137 : 6 ⇒ 20, 22
17

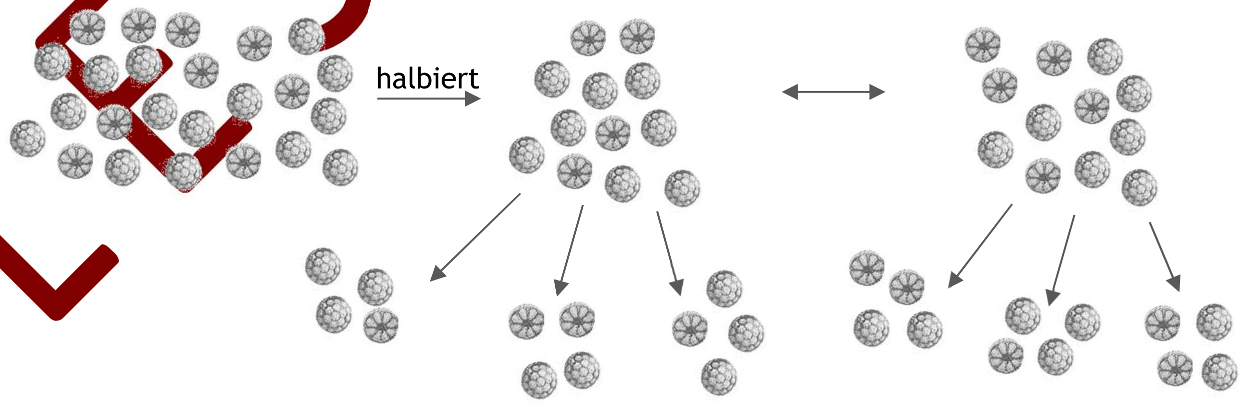
624 : 4 = 156
- 400 : 4 = 100
224
- 200 : 4 = 50
24
- 24 : 4 = 6
0 R

32807 : 7 = 4686 R5
-28000 : 7 = 4000
4807
- 4200 : 7 = 600
607
-560 : 7 = 80
47
- 42 : 7 = 6
5 Rest

abc Beim Kopfrechnen und halbschriftlichen Rechnen kann man auch folgende Gesetzmäßigkeit nutzen: a:(b·c)=a:b:c. Grundlegende Prinzipien des Bruchrechnens werden dabei eingesetzt.

Statt 720:30=720:10:3 oder 432:8=432:2:2:2

Um eine Anzahl in 6 gleiche Teile zu teilen, kann man zum Beispiel zuerst eine Hälfte herstellen und diese danach dritteln: 24:6=24:2:3=12:3=4



abc Beim Kopfrechnen und halbschriftlichen Rechnen kann man ebenso den Umstand hilfreich verwenden, dass das Ergebnis einer Division bei gleichsinniger Veränderung beider Operanden unverändert bleibt.

8480:40 = 4240:20 = 2120:10 = 212 oder = 1060:5 = 212
:2 :2 :10 :2 :5

VOLUMEN:

km^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
10^9 Umwandlungsfaktoren		1 000	1 000	1 000

Flüssigkeit

Flüssigkeitsmaße können immer wieder in ihrem Zusammenhang mit den Kubik-Einheiten er- und bearbeitet werden, da ja beide Raummaße darstellen.

Raummaß			
m^3	$1m^3$	$1dm^3$	$1cm^3$
l	1 000l	1l	1ml

Im **Liter-Würfel** kann gezeigt werden, dass **100 Dienes-Einerwürfel von 1cm³** Volumen den gleichen Raum einnehmen wie **100ml** oder dass 1 000 den gesamten Liter füllen, jeder **einzelne Würfel** somit **einem Milliliter** entspricht.

Viele Körper können nicht gut mit Würfeln gefüllt werden, mit Wasser hingegen schon. Hier sieht man ein zuerst mit Würfeln und danach mit Wasser gefülltes Glas. Dabei ist gut erkennbar, dass Volumina oft sehr viel besser und genauer mit Hilfe von Wasser messbar sind, indem man dieses anschließend in einen Messbecher umfüllt.

Auf diese Art kann man das Volumen von Körpern ermitteln. Zuerst wird eine bekannte Menge an Wasser in einen großen Behälter gefüllt und eine Markierung für den Wasserstand angebracht. Dann taucht man den zu messenden Gegenstand ein und macht erneut eine Markierung für den neuen Wasserstand. Dann entfernt man den Gegenstand, füllt Wasser bis zur zweiten Markierung nach. Die Differenzmenge an Wasser entspricht dem Volumen des Gegenstandes und kann nun durch Abgießen in einen Messbecher (Kübel mit Markierungen) gemessen werden.

Den Rauminhalt kleinerer Objekte kann man einfacher ermitteln. Ein Messbecher für 2l wird bis zur 1l-Markierung mit Wasser gefüllt, das Objekt zur Gänze eingetaucht und dessen Volumen als Differenz zum Liter direkt an der Skala abgelesen.

Flüssigkeit aus einem Behälter in einen anderen **umgießen** und zuvor schätzen, wie hoch sie im neuen stehen wird, indem man eine Markierung mit einem wasserlöslichen Stift anbringt.

Zu einer vorgegebenen **Flüssigkeitsmenge** (Krug, …) soll geschätzt werden, **wie viele gleiche, kleinere Behälter** (Schnapsglas, …) man **füllen** kann. Nach der Schätzung erfolgt die Kontrolle durch mehrmaliges Befüllen.

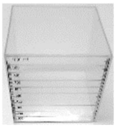
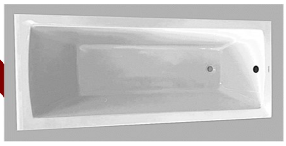
Es soll vorab geschätzt werden, **wie oft man** den **Inhalt eines kleineren in einen größeren Behälter füllen kann**, bis er voll ist. Die Qualität der Schätzungen wird handelnd überprüft.

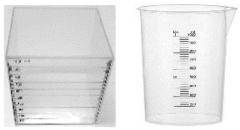
Zwei unterschiedliche Behälter sind verschieden hoch mit Wasser gefüllt: ***In welchem Behälter ist mehr Wasser?*** Kontrolle auf der Balkenwaage (evtl. zusätzlich durch Umschütten in 2 gleiche Behälter).

Zur Bearbeitung verschiedener Einheiten (m, m^3, l, kg, mg, ml …) in einem Kontext eignet sich folgendes Beispiel: Ein **Schwimmbecken** von 10m Länge und 5m Breite beinhaltet vollständig bis zu einer Höhe von 1,80m gefüllt 90000l (90m^3, 90000kg = 90t) Die Zugabe von Chemikalien (Chlor, PH-Minus, Algizid, … in mg oder ml) hängt in ihrer Menge vom Füllvolumen ab.

Ein sehr interessantes Übungsfeld bietet sich zum **Thema Wasser** an. Rund um den **Verbrauch** in verschiedenen Ländern (**Wasserbedarf** in Europa: 100-200l/Tag/Person, 5-10% davon in manchen Entwicklungsländern), das vorhandene **Wasserangebot**, der Verbrauch im Haushalt (bei alltäglichen Tätigkeiten) verglichen mit jenem im industriellen Bereich (z.B. Wasserverbrauch bei der Fleischerzeugung: 15500l/kg Rindfleisch) zu diesem Thema gibt es zahlreiche spannende Fakten und Zahlenmaterial.

Fragen bezüglich des **Verbrauchs** und der **Kosten** können anhand der Besprechung des Zwecks und der Funktionsweise eines **Wasserzählers** geklärt werden.

REFERENZBLATT	FLÜSSIGKEIT	RAUMINHALT
	ca. 15-20 Tropfen	1 ml
	Teelöffel	2,5 ml
	Esslöffel	5-10 ml
	½l PET-Flasche	0,5 l
 	Liter Würfel Messbecher	1 l
	1l-Tetrapack	1 l
	Kanister	5 l
	Kübel	10 l
	Badewannenfüllung	1-2 hl
	Regentonne-Tank: 1m^3 = 1t = 1000l	1000 l

SCHÄTZ- UND KONTROLLHILFE	FLÜSSIGKEIT	RAUMINHALT
	Spritze	1ml – 20ml
	Mini-Messglas	5ml – 50ml
	Liter Würfel Messbecher	1l

FLÜSSIGKEIT:

Hekto-	Einheit		Dezi-	Zenti-	Milli-
Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
hl	l		dl	cl	ml
100 Umwandlungsfaktoren		10	10	10	

Währung

Der korrekte rechnerische Umgang und das Wissen um den relativen Wert einzelner Geldbeträge sind wichtige Unterrichtsziele im Zusammenhang mit Geldwährung.

Bei aller Wichtigkeit ist anzumerken, dass sich die Arbeit mit Euro- und Centbeträgen nicht für die Erarbeitungsphase des Stellenwertbegriffs eignet. Kinder, die noch kein ausreichendes Verständnis für den dekadischen Aufbau des Zahlenraums entwickelt haben, sind durch das Auftreten von Zweier- und Fünferbündelungen überfordert. Das Weglassen der 2c-, 5c-Münzen und der 20€ und 50€-Scheine ist hingegen eine realitätsferne Vereinfachung.

Fazit: **Die Arbeit mit Euros und Cents** ist **erst bei vorhandenem Stellenwertverständnis** wirklich sinnvoll.

Im Folgenden finden Sie einige grundlegende Übungen, bei denen im Idealfall immer **ausreichend Spielgeld zur handelnden Bearbeitung** zur Verfügung steht:

Ein **aus zwei Münzen zusammengestellter Betrag** soll **erraten** werden. *Rate, welchen Betrag ich unter meiner Hand habe, es sind zwei Münzen. Sage mir auch, auf welche Münzen du tippst*. Nach 5 Fehlversuchen wird eine Münze verraten. *Welche Münze habe ich jetzt noch versteckt?* Es kann auch nur mit Cent-Münzen gearbeitet werden. Variante: Information zu Beginn: *Ich habe einen Schein und eine Münze (zwei Scheine / zwei Münzen).*

Es sind **einige Münzen/Scheine vorhanden** und es sollen alle **Beträge** überlegt werden, **die man zusammenstellen kann**, wenn man mindestens einen Teil davon nimmt. Stehen beispielsweise je ein 2c-, ein 20c, und ein 50c-Stück zur Verfügung, können folgende Beträge zusammengestellt werden: 2c, 20c, 50c, 22c, 52c, 70c, 72c.

Es ist eine **größere Menge an Spielgeld** vorhanden. Durch **Wechselprozesse bei der „Bank"** soll die **Anzahl der Einzelteile auf eine möglichst kleine Anzahl verringert** werden. Dabei soll immer genau formuliert werden, was wogegen getauscht wird: *Gib mir bitte einen 50€ Schein für diese fünf 10€ Scheine.*

Sachaufgaben, Textaufgaben

Die in den letzten Jahrzehnten auch von Schulbüchern befeuerte Praxis künstlich reduzierte Realität in Textmäntelchen verpackt als Aufgaben abzuverlangen, hat sich aus diversen Gründen eigendynamisch entwickelt. In Österreich im Volksmund meist als Textbeispiele bekannt, spalten diese nicht nur Schülerinnen in zwei Gruppen. Die eine schätzt diesen Bereich, weil er doch die Verbindung der Mathematik mit dem realen Leben anstrebt, interessant erscheint, oder als eine Art Rätsel gesehen wird. Die zweite Gruppe assoziiert mit diesen Aufgaben eher Furcht und Unverständnis. Warum diese **negative Besetzung** weit verbreitet ist, hat mehrere **Ursachen im Bereich der Voraussetzungen sowie in der Art der Umsetzung**:

- **Sprach-, insbesondere Lesekompetenz** und **Textverständnis** sind **wesentliche Voraussetzungen**. Unzureichende Beherrschung der deutschen Sprache sowie Probleme im sinnerfassenden Lesen (oft wahrnehmungsbedingt) können ein erfolgreiches Bearbeiten sogar verunmöglichen.
- **Fehlende Automatisierung** von Zahlenzerlegungen und kleinen Rechensätzchen sowie **mangelhafte Sicherheit** in der Durchführung erforderlicher **Rechenalgorithmen**.
- Inhaltliche Probleme: **Mangelhaftes Zahlen-/Stellenwert- oder Operationsverständnis**.
- **Nicht ausreichendes Verständnis von Größen, Maßen und Einheiten** für einen Überblick in der Arbeit und als Kontrollhilfe bei Zwischen- und Endergebnissen.
- Die **Auswahl der Themen** ist für Kinder meist alles andere als interessant und nur selten **wirklich** aus ihrer subjektiven Lebenswelt – wenn doch, dann unnatürlich vereinfacht.
- Der **häufige Wechsel von Ausgangsthemen** steht dem „Durchdringen", also einem vertiefenden Bearbeiten einzelner Themenbereiche, im Weg. Dieses würde natürlich mehr Zeitressourcen erfordern und damit eine der größten Lehrersorgen, den Zeitmangel, verstärken.
- Die Bearbeitung wird oft auf einen einzigen erwarteten Lösungsweg beschränkt. Der meist verlangte Gleichschritt aller Schülerinnen führt zu solchen Vereinfachungen. Das Einüben von Rechenverfahren an Stelle des Anwendens bereits gekonnter steht somit im Vordergrund.
- **Angst vor solchen Aufgaben und zunehmend abnehmendes Zutrauen** in die eigenen Fähigkeiten sind oft die Folge oben angeführter Faktoren.

In Folge soll keine umfassende, regelhafte Betrachtung der Thematik erfolgen, die als Anleitung missverstanden werden könnte. Vielmehr sollen **grundsätzliche Ideen zum Umgang** mit solchen Aufgaben sowie **Aspekte der Betrachtung/Reflexion eigenen Vorgehens** angeboten werden.

Begriffe, Aufgabenarten

Fallweise wird versucht, streng zwischen Text- und Sachaufgaben zu unterscheiden. Folgende nicht trennscharfe Unterteilung textbasierter Aufgaben soll unverbindlich einen begrifflichen Überblick geben:

- **Eingekleidete Zahlenaufgabe.** Abstrakter Text ohne Bezug zum täglichen Leben, der meist eine geforderte Rechnung in Worte verpackt: *Eine Zahl wurde verdoppelt und danach 3 dazugegeben. Das Ergebnis ist 11. Wie lautet die Ausgangszahl?*
- **Textaufgabe: Sache im Hintergrund - oft vereinfachte Realität.** Eingefordert wird die Zuordnung einer Operation zu einem Text. Der Kontext ist zwar dem Alltag entnommen, allerdings wird er dabei aufgrund oft noch fehlender Voraussetzungen derart vereinfacht, dass der letztlich angebotene Text eine unzulässige Vereinfachung der Realität darstellt und auch wenig interessant erscheint. *Ein Hund frisst ca. 700g am Tag. Wie viel frisst er in einem Monat?*
- **Sachaufgabe: Sache im Vordergrund – Mathematik nur Hilfsmittel.** Soweit es möglich ist, werden Aufgaben aus der Lebens- und Erfahrungsrealität der Kinder gestellt. Zielsetzung ist immer auch ein besseres Verständnis der Sache selbst. In diesem Zusammenhang wird von der „Erschließung der Welt" durch Aufzeigen und Bearbeiten mathematischer Zusammenhänge in der Welt gesprochen. *Wie viele Fußball-WM-Pickerl bekommst du um 5€?* (90c/5 Stück)
- **Problemaufgabe**: Vorgabe eines **komplexen, realitätsnahen Textes.** Das Verständnis der (neuen) Sache ist essentiell, es ist eine Problemanalyse und danach die Suche nach einem Lösungsweg nötig. Kennt das Kind eine derartige Aufgabestellung und einen dazugehörigen Lösungsweg bereits, ist es eben keine Problemaufgabe mehr. *Wie viel kostet zirka eine Grundausstattung, die ein Kind in seiner Schultasche benötigt?* Nicht eindeutig lösbar.

- **Fermi-Aufgaben**: Fragen bzw. Aufgaben werden oft ohne nähere (Zahlen-)Angaben angeboten. **Notwendiges Zahlenmaterial** und **fehlende Informationen** sind erst **einzuholen**. Dieser Aufgabentyp stellt hohe Anforderungen und ist nicht eindeutig lösbar. Vielmehr beschäftigt man sich dabei fast durchgehend mit Annäherungen und Schätzungen. Typisch ist auch, dass man an viele derartige Aufgaben sehr unterschiedlich herangehen kann. *Wie viele Autos stehen in einem 1km langen Stau? Wie viel Fleisch fressen alle Siamkatzen Österreichs ca. in einem Jahr? Wie viele Gummibären passen in einem Klassenraum? Wie viele Tennisbälle könnte man in einer Schicht auf einem Tennisplatz unterbringen? Wie viele Liter verliert man über ein Jahr durch einen tropfenden Wasserhahn?*

- **Rätsel-, Knobelaufgaben** und **Fantasiegeschichten:** Herausfordernde Aufgaben jenseits von Routineabläufen sollen die Problemlösungsfähigkeit stärken und Lösungsstrategien entwickeln lassen. *Auf wie viele verschiedene Arten kann man 4 Leibchen, 3 Hosen und 3 Paar Socken kombinieren? Wie kann man folgende Laterne ohne Absetzen des Stiftes zeichnen:*  *? Das bekannte Fährenproblem: Fährmann, Wolf, Ziege und Kohlkopf sollen heil mit einem Boot über den Fluss …? 16 Köpfe und 44 Beine. Wie viele Hasen und Hühner sind es?*

  Da alle angeführten Aufgabengruppen in Form von Texten vorgegeben sind, werde ich bei den weiteren Ausführungen bei „Textbeispiel“ bleiben.

Wichtig sind Schluss- bzw. Proportionsrechnungen, deren Verständnis und sichere Durchführung für alle oben angeführten Aufgabetypen von Bedeutung sind.

Textbeispiele verbinden alle wesentlichen Inhalte der Volksschulmathematik mit allen Kompetenzbereichen und sollten schon früh in einfacher Form eingesetzt werden. Sie stellen Übungs- und Anwendungsfeld dar, sind vorrangig jedoch selbst als Lernziel zu verstehen!

Aufgabenauswahl und -gestaltung

Wichtige Grundlagen sind die Kenntnis der Lehrplanvorgaben und das Bewusstsein für die hohen Freiheitsgrade in der Auswahl und Gestaltung von Textbeispielen. Derzeit stellt das ***BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 303/2012 vom 13. September 2012: Lehrplan der Volksschule, Siebenter Teil, Bildungs- und Lehraufgaben sowie Lehrstoff und didaktische Grundsätze, Grundschule Mathematik, Stand: Juni 2003*** die rechtliche Grundlage dar. Einige Auszüge zur Verdeutlichung:

BILDUNGS- UND LEHRAUFGABE: Sachverhalte der Umwelt sind mit Hilfe von Zahlen, Größen und Operationen zu durchdringen … Vielfalt der angebotenen kindgemäßen mathematischen Situationen aus den Bereichen Wirtschaft, Technik und Kultur soll … Bedeutung der Mathematik bewusst machen.

GRUNDSTUFE 1: … Anwenden der Rechenoperationen in Spiel- und Sachsituationen … Lösen von Sachproblemen … Mathematisieren von Spiel- und Sachsituationen nur aus dem kindlichen Erlebnisbereich … Beschreiben von realen oder bildhaft dargestellten Sachsituationen … Zuordnen von Rechenoperationen zu Sachsituationen … Finden von Sachsituationen zu Rechenoperationen Herausarbeiten mathematischer Strukturen aus einfachen Texten mit Hilfe stufengemäßer Darstellungsformen, wie Rollenspiel, Situationsskizzen, Rechenpläne Errechnen und Überprüfen des Ergebnisses Formulieren sachlich richtiger Antworten … Anwenden von Größen in Sachsituationen und bei Sachaufgaben zur Vertiefung des Verständnisses für Größen.

GRUNDSTUFE 2: … Schaffen von sach- und größenbezogenen Vorstellungen zu großen Zahlen, z.B. mit Geldwerten, Längen ... Lösen von Sachproblemen … Mathematisieren von Sachsituationen: Beschreiben von dargestellten Sachverhalten, die z.B. in stufengemäßen Texten, Problembildern, Datenmaterial, grafischen Darstellungen enthalten sind … Herausarbeiten mathematischer Problemstellungen (z.B. Versprachlichen des Problems, Verwenden stufengemäßer Darstellungsformen, wie Situationsskizzen, Rechenpläne, Tabellen) … Zuordnen von Rechenoperationen, Beschreiben von Sachverhalten mit Zahlen und Platzhaltern (Variablen) – Erstellen einfacher Gleichungen … Überschlagendes Rechnen, Einschranken – Lösen durch mündliches Rechnen oder durch schriftliche Verfahren … Kontrollieren und Verbalisieren der Ergebnisse, Finden von Sachsituationen zu Rechenoperationen und einfachen Gleichungen … Diskutieren der dargestellten Sachverhalte … Arbeiten mit Bruchzahlen in einfachen Sachaufgaben … Wählen sach- und situationsgerechter Maßeinheiten für Größen beim Lösen von Sachaufgaben.

Streichquadrate

Streichquadrate stellen ein weiteres vielfältig einsetzbares Übungsformat dar, das wieder in allen Zahlenräumen eingesetzt werden kann.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

~~1~~	2	~~3~~
4	~~5~~	6
7	~~8~~	9

~~1~~	2	~~3~~
~~4~~	~~5~~	6
7	~~8~~	~~9~~

~~1~~	2	~~3~~
~~4~~	~~5~~	6
7	~~8~~	~~9~~

Am Ende werden die verbliebenen Zahlen addiert: 2 + 6 + 7 = 15

Regel der Bearbeitung: In jeder Zeile wird der Reihe nach eine beliebige Zahl ausgesucht, alle anderen Zahlen der gleichen Zeile und der gleichen Spalte werden gestrichen. Die letzte Zahl ergibt sich von selbst, es ist die letzte noch nicht gewählte und noch nicht durchgestrichene Zahl.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

~~1~~	~~2~~	3	~~4~~
5	6	~~7~~	8
9	10	~~11~~	12
13	14	~~15~~	16

~~1~~	~~2~~	3	~~4~~
5	~~6~~	~~7~~	~~8~~
~~9~~	10	~~11~~	12
~~13~~	14	~~15~~	16

~~1~~	~~2~~	3	~~4~~
5	~~6~~	~~7~~	~~8~~
~~9~~	10	~~11~~	~~12~~
~~13~~	~~14~~	~~15~~	16

~~1~~	~~2~~	3	~~4~~
5	~~6~~	~~7~~	~~8~~
~~9~~	10	~~11~~	~~12~~
~~13~~	~~14~~	~~15~~	16

Es gibt 24 Möglichkeiten, die alle 34 ergeben, hier: 3 + 5 + 10 + 16 = 34

~~1~~	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	16	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~
~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~	50
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	57	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	64	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	98	~~99~~	~~100~~

Auch das **Hunderterfeld** kann **als Streichquadrat** verwendet werden.

Es gibt 3 628 800 Möglichkeiten, die alle 505 als Summe ergeben.

Im nebenstehenden Beispiel:

2 + 16 + 25 + 31 + 50 + 57 + 64 + 79 + 83 + 98 = 505

Herstellung von Streichquadraten:

+	a	b	c
x	x+a	x+b	x+c
y	y+a	y+b	y+c
z	z+a	z+b	z+c

+	2	5	8
7	9	12	15
3	5	8	11
11	13	16	19

Streichquadrat mit beliebigen Zahlen.

+	a	b	c	d
w	w+a	w+b	w+c	w+d
x	x+a	x+b	x+c	x+d
y	y+a	y+b	y+c	y+d
z	z+a	z+b	z+c	z+d

+	3	1	7	9
10	13	11	17	19
4	7	5	11	13
6	9	7	13	15
7	10	8	14	16

Durch freie Zahlenwahl kann die Schwierigkeit der Aufgaben gut dosiert werden.

Gesamtsumme in 3x3 Streichquadraten: x+y+z+a+b+c (Bspl: 7+3+11+2+5+8 = 36)

Gesamtsumme in 4x4 Streichquadraten: w+x+y+z+a+b+c+d (Bspl: 10+4+6+7+3+1+7+9 = 47)

Man kann **Streichquadrate mit gewünschten Summenzahlen anfertigen**. Will man ein Streichquadrat z.B. mit der Summe 50 erzeugen, muss man (bei 3x3-Streichquadraten) Zahlen wählen, bei denen x+y+z+ a+b+c = 50 ist, also z.B. 7, 3, 13, 11, 12, 4.

Kinder können Summen in vorgegebenen Streichquadraten mit Selbstkontrolle bearbeiten, fortgeschrittene Rechnerinnen kann man auch selber welche erzeugen lassen (3x3, 4x4, …6x6, …).

Zeile und Spalte

Es wird mit zwei Neunerwürfeln (0-9) geworfen, die beiden erzielten Ziffern (z.B. 6, 2) werden zu einer zweistelligen Zahl kombiniert und das entsprechende Feld (62 oder 26) wird auf der Hundertertafel mit einem Plättchen abgedeckt. Sind beide möglichen Varianten bereits abgedeckt, darf eine einstellige Zahl (2 oder 6) abgedeckt werden. Ziel des Spiels ist, in jeder Zeile und Spalte eine Zahl abgedeckt zu haben, wem dies zuerst gelingt, der gewinnt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25		27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Variante: Spiel an der Hundertertafel: Regeln wie oben. Wer drei (vier) Plättchen in einer Reihe, Spalte (senkrecht), Zeile (waagrecht), Schräge unmittelbar hintereinander platzieren kann, gewinnt.

Runden im Tausender

Es wird mit drei Neunerwürfeln (0-9) gewürfelt, aus den erzielten Ziffern wird eine dreistellige Zahl gebildet. Bei 10 oder einer Krone darf der betreffende Würfel erneut geworfen werden, oder man verwendet die zweistellige Zahl. Diese Zahl ist auf ganze Zehner zu runden, ein Spielstein wird auf das entsprechende Zahlenfeld gelegt.

Jede Spielerin hat zu Beginn z.B. 10 Spielsteine. Fremde Spielsteine werden entfernt, wenn man ein belegtes Zahlenfeld vorfindet. Gewonnen hat, wer zuerst alle seine Spielsteine ablegen konnte.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
110	120		140	150	160	170	180	190	200
210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
410	420	430	440	450	460	470	480	490	500
510	520	530	540	550	560	570	580	590	600
610	620	630	640	650	660	670	680	690	700
710	720	730	740	750	760	770	780	790	800
810	820	830	840	850	860	870	880	890	900
910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000

Beispiel: 219 $\Rightarrow$ Wahlweise 219 $\approx$ 220, 129 $\approx$ 130, 912 $\approx$ 910, …

Variante: es gewinnt, wer am Ende die beiden am nächsten/weitesten zueinander-/auseinanderliegenden Zahlen (kleinste/größte Differenz) abdecken konnte.

Einmaleinswürfeln

Mehrere Würfel werden in einer Runde jeweils dreimal geworfen. Zahlen werden nur gewertet, wenn sie in einem Wurf mehr als einmal vorkommen. Im Beispiel acht Sechserwürfel:

2,6,5,5,2,4,1,2   4,4,4,1,2,5,4,3   3,4,3,2,6,6,5,4

$3 \cdot 2 + 2 \cdot 5$ $4 \cdot 4$ $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6$ $\Rightarrow$ Summe: 6+10+16+6+8+12 = 58

Es gewinnt, wer nach 4 Runden die höchste Gesamtsumme erreicht hat.

Reihen streichen

Jede Mitspielerin erhält zu Beginn ein Summenblatt oder ein Differenzenblatt.

wird abwechselnd mit zwei Sechser- oder Zehnerwürfeln geworfen und je nach Wahl die Summe oder die Differenz beider Zahlen gebildet. Diese Zahl wird einmal am eigenen Spielblatt abgestrichen. Z.B. beim Wurf 3, 6 $\Rightarrow$ 9 am Summenblatt oder 3 am Differenzenblatt:

Summenblatt
Sechserwürfel

2
3 3
4 4 4
5 5 5 5
6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8
~~9~~ 9 9 9
10 10 10
11 11
12

Summenblatt
Zehnerwürfel

0
1
2 2
3 3 3
4 4 4
5 5 5 5
6 6 6 6
7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8
~~9~~ 9 9 9 9 9 9
10 10 10 10 10 10 10 10
11 11 11 11 11 11 11 11
12 12 12 12 12 12 12
13 13 13 13 13 13 13
14 14 14 14 14 14
15 15 15 15 15
16 16 16 16
17 17 17 17
18 18 18
19 19
20

Differenzenblatt
Sechserwürfel

0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
~~3~~ 3 3 3
4 4 4
5 5

Differenzenblatt
Zehnerwürfel

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2
~~3~~ 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5
6 6 6 6
7 7 7
8 8
9
10

Gewonnen hat, wer zuerst alle Zahlen von drei Reihen (Zeilen) komplett streichen konnte. Je nach zur Verfügung stehender Zeit kann man auch eine andere Gewinnanzahl an Reihen festlegen.

Krone: Beim Würfeln einer Krone darf eine beliebige Zahl von 0 bis 10 ausgesucht werden.