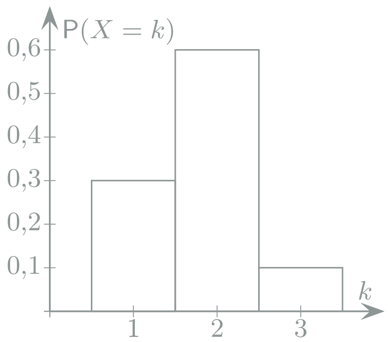
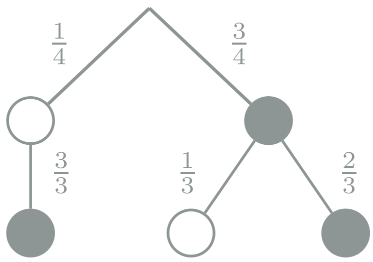
Florian Timmermann

Intensivkurs Mathematik

Stochastik





$\mathrm{P(C)} = \frac{1}{6}$ $\qquad \sigma = 5$ $\qquad |\mathrm{A}| = \binom{7}{2}$

Die optimale Vorbereitung auf das Abitur:

- Erklärung des gesamten Stoffes
- Aufgaben auf allen Niveaustufen
- mit allen Lösungswegen

Abitur

Intensivkurs Mathematik

http://www.intensivkurs-mathematik.de

2. Auflage, 1. Druck 2017

Druck: Karmášek s.r.o., České Budějovice (CZ)

ISBN: 978-3-9817902-3-8

Inhaltsverzeichnis

Arbeiten mit dem Buch 5

Bezeichnungen 7

Theorie & Aufgaben 9

1 Zufallsexperimente 11
- 1.1 Einführung . . . 11
- 1.2 Einstufige Zufallsexperimente . . . 13
- 1.3 Mehrstufige Zufallsexperimente . . . 18
- 1.4 Kombinatorische Hilfsmittel . . . 24
- 1.5 Additionssatz . . . 32
- 1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . 34
- 1.7 Unabhängige Ereignisse . . . 38

2 Zufallsgrößen 41
- 2.1 Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . 42
- 2.2 Verteilungsfunktion* . . . 45
- 2.3 Erwartungswert . . . 47
- 2.4 Varianz und Standardabweichung . . . 50

3 Spezielle Zufallsgrößen 53
- 3.1 Binomialverteilung . . . 53
- 3.2 Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung . . . 58
- 3.3 Standardnormalverteilung* . . . 61
- 3.4 Approximation der Binomialverteilung für großes n* . . . 63
- 3.5 Prognoseintervalle und Sigma-Regeln . . . 65

4 Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten 69

5 Testen von Hypothesen 75
- 5.1 Einseitiger Signifikanztest . . . 76
- 5.2 Zweiseitiger Signifikanztest . . . 80

Lösungen 85

Bonusmaterial 133

Index 141

Inhaltsverzeichnis

Arbeiten mit dem Buch

Liebe Schüler/innen,

Dieses Buch soll Ihnen die Vorbereitung auf die anstehenden Abiturprüfungen erleichtern, egal aus welchem Bundesland Sie kommen. Jeder Abschnitt besteht aus einem kurzen Theorieteil mit Beispielen und dazugehörigen Aufgaben.

- **Schwierigkeitsgrade**: • leicht, •• mittel, ••• schwer, ★ Bonusaufgaben (über dem Schulniveau).
  Wählen Sie individuell ihr gewünschtes Niveau aus und versuchen Sie, sich mit der Zeit zu steigern.
- Alle Aufgaben, die per Hand gerechnet werden müssen, haben einfache Zahlenwerte als Lösung.
- Ein wissenschaftlicher Taschenrechner darf zum Lösen verwendet werden.
- *: Dieses Kapitel wird im Unterricht nur selten behandelt
- **179.**: Diese rot markierten Aufgaben sind Schwerpunkt der Abiturvorbereitung
- **Lösungen**: Ich stelle Ihnen alle Lösungen inklusive der Lösungswege zur Verfügung. Gelegentlich kann es auch alternative Lösungswege geben. Versuchen Sie bitte stets, die Aufgaben zu lösen, ohne einen Blick auf die Lösungen zu werfen. Erst wenn Sie nach zwei Versuchen nicht auf die Lösung kommen, sollten Sie sich diese ansehen.

Auf der Internetseite

http://www.intensivkurs-mathematik.de

erhalten Sie zusätzliche Informationen sowie eine Übersicht über die weiteren Bücher dieser Reihe.
Nun wünsche ich Ihnen eine erfolgreiche Vorbereitung auf die Abiturprüfungen in Mathematik!

Teil I.

Theorie & Aufgaben

1 Zufallsexperimente

1.1 Einführung

In vielen Bereichen des täglichen Lebens stellen wir fest, dass zahlreiche Beobachtungen unter ähnlichen Bedingungen häufig wiederholt werden können. Bei einigen davon lässt sich das Ergebnis durch mathematische Modelle exakt voraussagen, wie z.B. die Uhrzeit des Sonnenuntergangs an einem bestimmten Ort und Tag. Es gibt jedoch viele Fälle, bei denen unser Wissen nicht ausreicht, um exakte Vorhersagen zu einer einmaligen Beobachtung zu treffen. Dann sprechen wir von einem *Zufallsexperiment*.

Aufgabe

Nennen Sie Beispiele für ein Zufallsexperiment.

Lösung

- Eine Münze wird geworfen. Auf welche Seite fällt sie?
- Welche Lottozahlen werden gezogen?
- Eine Frau wird schwanger. Wird das erwartete Kind ein Junge oder ein Mädchen?
- Bei Kopfschmerzen wird eine Tablette verabreicht. Wirkt sie?

Während wir bei Zufallsexperimenten wie dem Wurf einer Münze keine Vorhersagen für individuelle Ergebnisse treffen können, so ist das sehr wohl für ganze Versuchsreihen mit z.B. 100 Münzwürfen möglich. Um dieses Phänomen zu beschreiben, führen wir ein Experiment mehrfach („n-mal“) durch und interessieren uns dafür, ob ein bestimmtes *Ereignis* A eintritt oder nicht.

Absolute und relative Häufigkeit
Den Ausdruck

$$h_n(\mathrm{A}) = \frac{\text{Anzahl der Versuche, in denen A eintritt}}{\text{Anzahl } n \text{ aller Versuche}}$$

bezeichnen wir als *relative Häufigkeit*, den Zähler dieses Bruches als *absolute Häufigkeit* des Ereignisses A.

Es ist klar, dass die Werte von $h_n(\mathrm{A})$ zwischen 0 und 1 liegen. Beobachten wir die Werte $h_n(\mathrm{A})$ für eine wachsende Anzahl n an Versuchen, so stellen wir fest, dass diese Werte einer erstaunlichen Regularität unterliegen.

Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Für große Werte von n strebt der Wert $h_n(\mathrm{A})$ gegen eine bestimmte Zahl P(A), also $h_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{P}(\mathrm{A})$ für $n \to \infty$.

Diesen Wert P(A) nennen wir die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A. Auch die Wahrscheinlichkeit P(A) liegt dann zwischen 0 und 1.

Ein Beispiel zeigt Abb. 1.1, in der die relative Häufigkeit für das Ereignis A = „die Münze fällt auf Kopf“ sukzessive bei einer Versuchsreihe mit Münzwürfen festgehalten wird. Sie strebt gegen den Wert $\frac{1}{2}$.

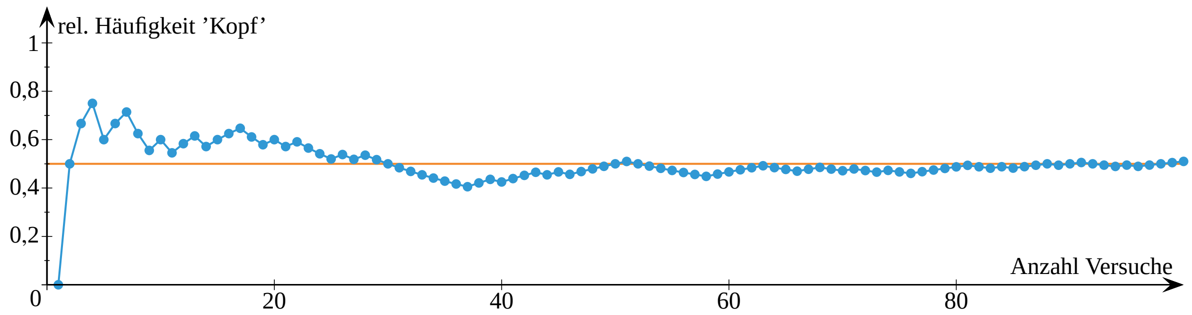


Abb. 1.1: Relative Häufigkeit des Ereignisses „Kopf“ bei mehrmaligem Münzwurf

Je nachdem, ob ein Experiment nur aus einem Schritt besteht (z.B. einmaliger Wurf eines Würfels) oder aus mehreren (z.B. zweimaliger Wurf einer Münze), so spricht man von einem *einstufigen* bzw. *mehrstufigen* Zufallsexperiment.
Mit dem Wurf eines Würfels stellen wir beispielhaft interessante Fragestellungen vor, die Inhalt dieses Buches sind.

1: Wie oft fällt bei drei Würfen im Durchschnitt eine 6? Wie stark variieren die Ergebnisse?

2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu werfen? Wie oft müssen wir mindestens werfen, damit wir mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine 6 werfen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, innerhalb von fünf Würfen genau eine 6 zu werfen? Beeinflusst der Wurf eines Würfels den darauffolgenden Wurf?

3: Wie oft fällt bei sechzig Würfen im Durchschnitt eine 6? In welchem Intervall erwarten wir bei einer solchen Versuchsreihe die Anzahl geworfener Sechser, so dass wir in 95 % aller Vermutungen richtig liegen?

4: Angenommen, der Würfel wäre gezinkt. In welchem Intervall erwarten wir die wahre Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel bei einmaligem Wurf eine 6 zeigt, wenn wir zuvor Ergebnisse aus sechzig Würfen gesammelt haben?

5: Wie können wir mit einem Test bestimmen, ob ein Würfel gezinkt ist?

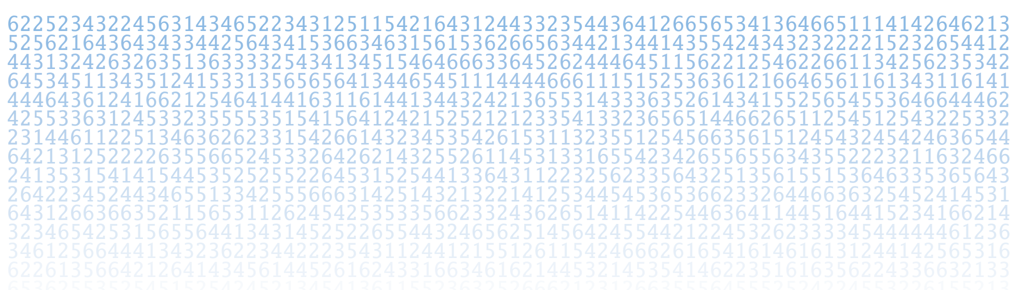


Abb. 1.2: Simulation vieler Würfe eines Würfels

3 Spezielle Zufallsgrößen

3.1 Binomialverteilung

In diesem Abschnitt wollen wir ein Experiment mit zwei Ergebnissen („Erfolg“ und „Misserfolg“) und der Erfolgswahrscheinlichkeit p mehrfach durchführen, wobei die einzelnen Versuche voneinander unabhängig sind. Ein solches Experiment mit n Versuchen heißt *Bernoulli-Kette der Länge n*.

Beispiel

Wir werfen einen Würfel dreimal. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zufallsgröße X = „Anzahl geworfene Sechser“ an.

Lösung

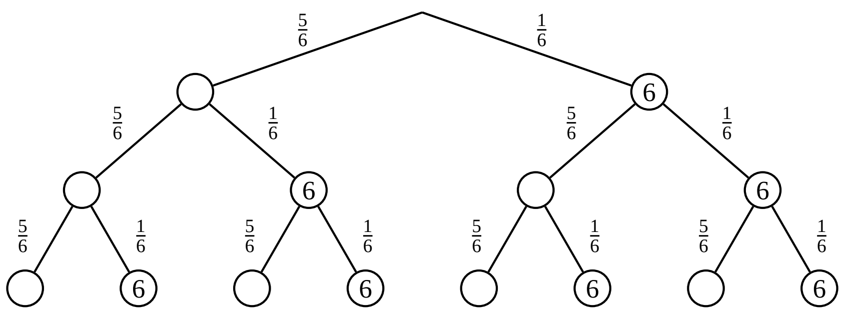


Abb. 3.1: Baumdiagramm zum dreimaligen Wurf eines Würfels

Bei der Erstellung eines Baumdiagramms für n Würfe (hier: $n = 3$, siehe Abb. 3.1) stellen wir fest, dass die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad des Ereignisses X = „k-mal Sechs“ den gleichen Aufbau hat. Mit Hilfe der Kombinatorik erkennen wir, dass es jeweils exakt $\binom{n}{k}$ Pfade mit dem gleichen Aufbau gibt („Auf wie viele Arten kann ich k Sechser in einem Pfad der Länge n verteilen?“). Somit erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}(X = k) = \underbrace{\binom{3}{k}}_{\text{Anzahl Pfade}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{k}}_{k\text{-mal Sechs}} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}}_{(3-k)\text{-mal keine Sechs}}$$

und die in Tab. 3.1 dargestellte Wahrscheinlichkeitsfunktion.

k	0	1	2	3
Anzahl Pfade	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$
$\mathrm{P}(X = k)$	$1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$	$1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$

Tab. 3.1: Wahrscheinlichkeitsfunktion zum dreimaligen Wurf eines Würfels

Somit stellen wir fest, dass die Anzahl der Erfolge in einer Bernoulli-Kette einer besonderen Verteilung unterliegt.

Binomialverteilung

Die Trefferzahl X einer Bernoulli-Kette mit n Versuchen und der Erfolgswahrscheinlichkeit p heißt *binomialverteilt* mit den Parametern n und p. Wir schreiben $X \sim \mathrm{B}_{n;\,p}$. Für die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erzielen, gilt:

$$\mathrm{P}(X=k)=\overset{\text{Anzahl Pfade}}{\binom{n}{k}}\cdot \underset{\text{P(Treffer)}}{p}^{\overset{\text{Anzahl „Treffer“}}{k}}\cdot \underset{\text{P(kein Treffer)}}{(1-p)}^{\overset{\text{Anzahl „kein Treffer“}}{n-k}}$$

Diese Formel macht das Zeichnen eines Baumdiagrammes in derartigen Fällen überflüssig. Wir können mit einer beliebig großen Anzahl an Versuchen arbeiten. Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion der Binomialverteilung lassen sich im Taschenrechner meist mit Befehlen wie `Bin` oder `Binom` berechnen.

Beispiel

Ein Würfel wird 5-mal geworfen. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der geworfenen Sechser. Stellen Sie eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf und zeichnen Sie diese.

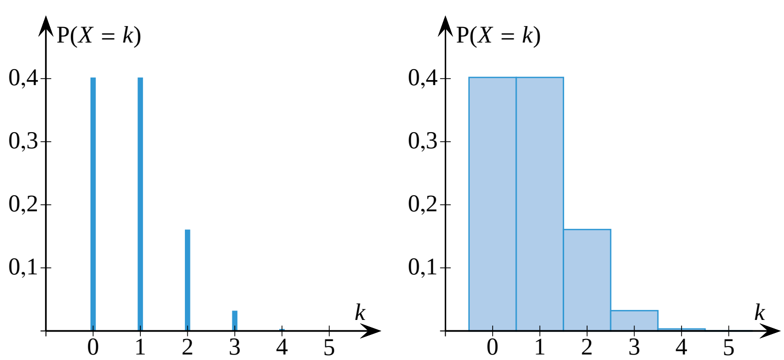
Lösung

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = \frac{1}{6}$. Berechnen wir alle Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X = k)$ wie etwa

$$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{B}_{5;\,\frac{1}{6}}(2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}=0{,}1608,$$

so erhalten wir die folgende Wertetabelle.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X=k)$	0,4019	0,4019	0,1608	0,0322	0,0032	0,0001



(a) Stabdiagramm (b) Histogramm

Abb. 3.2: Abbildungen der Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X \sim \mathrm{B}_{5;\,\frac{1}{6}}$

Beispiel

Ein Würfel wird 20-mal geworfen. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der geworfenen Sechser. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Taschenrechners.

(a) $P(X = 7)$ (b) $P(X \leq 5)$ (c) $P(X \geq 8)$ (d) $P(7 \leq X \leq 13)$

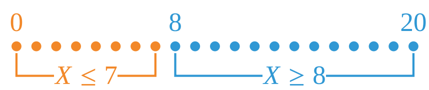
Lösung

Es gilt $X \sim B_{20;\,\frac{1}{6}}$. Wir berechnen:

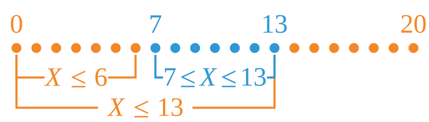
(a) im WTR: `BinomPD`
$P(X = 7) = B_{20;\,\frac{1}{6}}(7) = 0{,}026$

(b) im WTR: `BinomCD`
$P(X \leq 5) = 0{,}898$

(c) im WTR: Wir betrachten das Gegenereignis.
$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 0{,}011$



(d) $P(7 \leq X \leq 13)$
$= P(X \leq 13) - P(X \leq 6) = 0{,}037$



132. Entscheiden Sie mit Begründung, welche der folgenden Zufallsgrößen X binomialverteilt sind. Geben Sie die Werte für n und p an.

(a) Aus einer Urne mit 5 schwarzen und 2 weißen Kugeln werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X = „Anzahl gezogener schwarzer Kugeln".

(b) Aus einer Urne mit 5 schwarzen und 2 weißen Kugeln werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. X = „Anzahl gezogener schwarzer Kugeln".

133. Ergänzen Sie die Werte in den Lücken, so dass sich eine korrekte Wahrscheinlichkeit dafür ergibt, dass eine binomialverteilte Zufallsgröße einen bestimmten Wert annimmt.

(a) $\binom{9}{\square}\cdot 0{,}3^{\square}\cdot \square^{5}$ (b) $\binom{\square}{\square}\cdot 0{,}6^{4}\cdot \square^{8}$ (c) $\binom{\square}{2}\cdot 0{,}8^{9}\cdot \square^{\square}$

134. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zufallsgröße $X \sim B_{n;\,p}$ tabellarisch auf und zeichnen Sie diese in ein Stabdiagramm.

(a) $n = 6,\ p = \frac{7}{10}$ (b) $n = 8,\ p = \frac{1}{2}$

• **135.** Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

(a) genau dreimal 6
(b) höchstens eine 1
(c) keine 5
(d) mindestens eine 6
(e) genau eine gerade Zahl
(f) mehr als drei Würfel ≥ 3

• **136.** Ein Biathlet gibt 10 Schüsse auf eine Zielscheibe ab. Einen einzelnen Schuss trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

(a) genau 7 Treffer
(b) mehr als 8 Treffer
(c) mindestens 8 Treffer
(d) weniger als 6 Treffer

• **137.** Eine Münze wird 100-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

(a) höchstens 45-mal Kopf
(b) mindestens 55-mal Kopf
(c) zwischen 40- und 60-mal Kopf
(d) zwischen 45- und 55-mal Kopf

•• **138.** Eine Familie möchte im September einen einwöchigen Segelurlaub machen. Für diesen Monat ist bekannt, dass im Durchschnitt an 20 Tagen ausreichend Wind vorhanden ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit herrscht während des Urlaubs an mindestens 5 Tagen ausreichender Wind?

•• **139.** Ein Würfel wird mehrmals geworfen. Geben Sie eine geeignete Fragestellung an, die sich mit dem folgenden Ansatz lösen lässt.

(a) $\binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$
(b) $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$
(c) $1 - \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
(d) $\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^4$

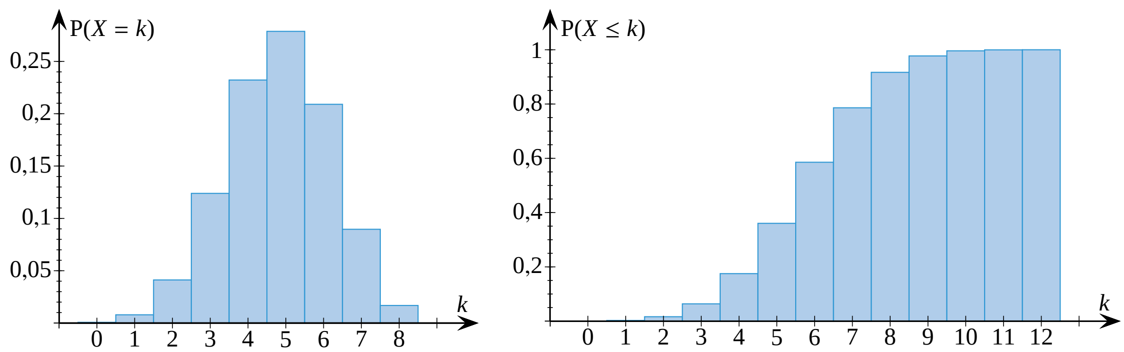
•• **140.** Tim und Sophie spielen Tennis.

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass Sophie einen einzelnen Punkt macht, liegt bei 60 %. Sie spielen 8 Punkte aus. Entscheiden Sie mit Hilfe von Abb. 3.3a, welche dieser Aussagen korrekt sind.
   (i) P(Sophie macht mindestens 6 Punkte) $\approx 0{,}32$
   (ii) P(Sophie macht weniger als 4 Punkte) $\approx 0{,}29$

(b) Tim hat trainiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sophie einen einzelnen Punkt macht, liegt nun bei 51 %. Sie spielen 12 Punkte aus. Entscheiden Sie mit Hilfe von Abb. 3.3b, welche dieser Aussagen korrekt sind.
   (i) P(Sophie macht höchstens 8 Punkte) $\approx 0{,}82$
   (ii) P(Sophie macht genau 6 Punkte) $\approx 0{,}23$

•• **141.** Ein Schüler nimmt an einem Multiple-Choice-Test teil. Dieser besteht aus Fragen mit je 4 Auswahlmöglichkeiten. Zum Bestehen muss mindestens die Hälfte aller Fragen richtig beantwortet werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Schüler den Test besteht, wenn sich der Test aus

(a) 10 Fragen zusammensetzt und der Schüler alle Lösungen rät;
(b) 20 Fragen zusammensetzt und der Schüler alle Lösungen rät;
(c) 20 Fragen zusammensetzt, der Schüler 4 Fragen richtig beantworten kann und die restlichen Lösungen rät;
(d) Warum sind die Wahrscheinlichkeiten der Teilaufgaben (a) und (b) unterschiedlich? Erläutern Sie.



(a) $X \sim B_{8;\,0{,}6}$ (b) $X \sim B_{12;\,0{,}51}$

Abb. 3.3: Schaubilder zu Aufgabe 140

•• **142.** Ein Flugzeug hat 240 Sitze. Es haben 250 Kunden einen Flug gebucht, da die Fluggesellschaft davon ausgeht, dass im Schnitt 6 % aller Kunden ihren Flug nicht antreten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist genau dieser Flug überbucht?

•• **143.** Ein Biathlet gibt 20 Schüsse auf eine Zielscheibe ab. Die Trefferwahrscheinlichkeit für einen einzelnen Schuss ist p.

(a) (•) Es gilt $p = 0{,}9$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 20 Treffer zu erzielen?

(b) Wie groß muss p sein, damit die Wahrscheinlichkeit, 20 Treffer zu erzielen, bei mindestens 50 % liegt?

(c) Es gilt $p = 0{,}9$. Wie viele Schüsse darf er maximal abgeben, damit die Wahrscheinlichkeit, alle Schüsse zu treffen, mindestens bei 50 % liegt?

(d) (•••) Ermitteln Sie durch systematisches Ausprobieren, für welche Werte von p die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet höchstens 18 Treffer erzielt, bei unter 10 % liegt.

••• **144.** Bei einem Radioquiz werden einem Teilnehmer x Fragen gestellt, die er nur mit „ja“ oder „nein“ beantworten kann. Von diesen muss er mindestens die Hälfte richtig beantworten, um einen Preis zu gewinnen. Das in Abb. 3.4 dargestellte Schaubild der Funktion f gibt seine Gewinnwahrscheinlichkeit an, wenn er alle Antworten raten muss. Interpretieren Sie den Verlauf des Schaubilds im Sachzusammenhang.

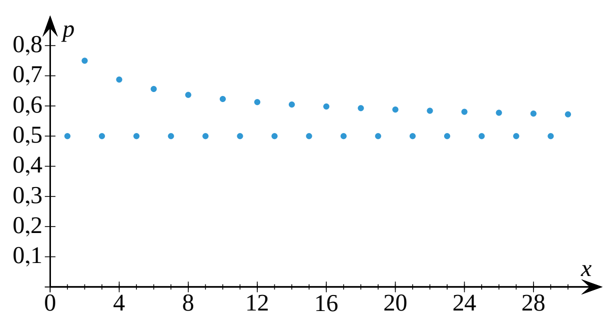


Abb. 3.4: Schaubild zu Aufgabe 144

••• **145.** Zwei Basketballteams treten im System „Best of Seven“ gegeneinander an (maximal 7 Spiele; wer zuerst vier Spiele gewinnt, ist der Gesamtsieger). Team A gewinnt etwa 60 % der Duelle. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Team A auch in diesem Modus?

3.2 Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung

Ist eine Zufallsgröße binomialverteilt, dann lassen sich die Kenngrößen *Erwartungswert* und *Standardabweichung* direkt angeben.

Kenngrößen der Binomialverteilung
Für eine $B_{n;\,p}$-verteilte Zufallsgröße X gilt $\mu = E(X) = np$ sowie $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Beispiel

Ein Würfel wird 180-mal geworfen. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der geworfenen Sechser. Berechnen Sie $E(X)$ und $\sigma(X)$.

Lösung

$$E(X) = np = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30, \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = 5$$

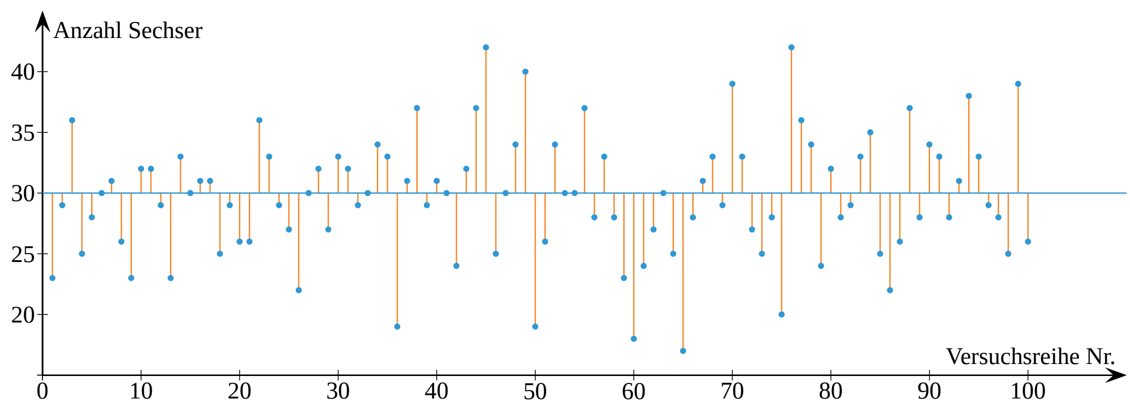
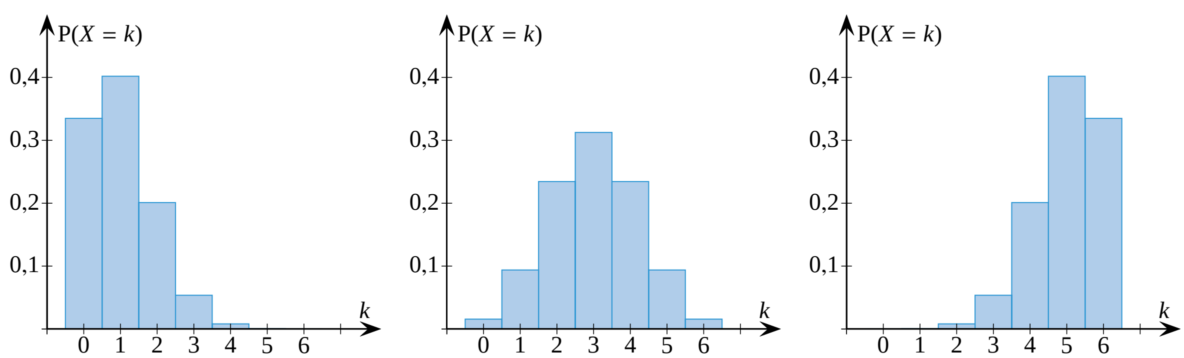


Abb. 3.5: Simulation von 100 Versuchsreihen mit je 180 Würfen eines Würfels

Nun variieren wir die Parameter der Binomialverteilung. Bei gleichbleibendem n gilt: Je größer p ist, desto größer ist auch der Erwartungswert. Je näher p an $\frac{1}{2}$ liegt, desto größer ist die Standardabweichung (Abb. 3.6).



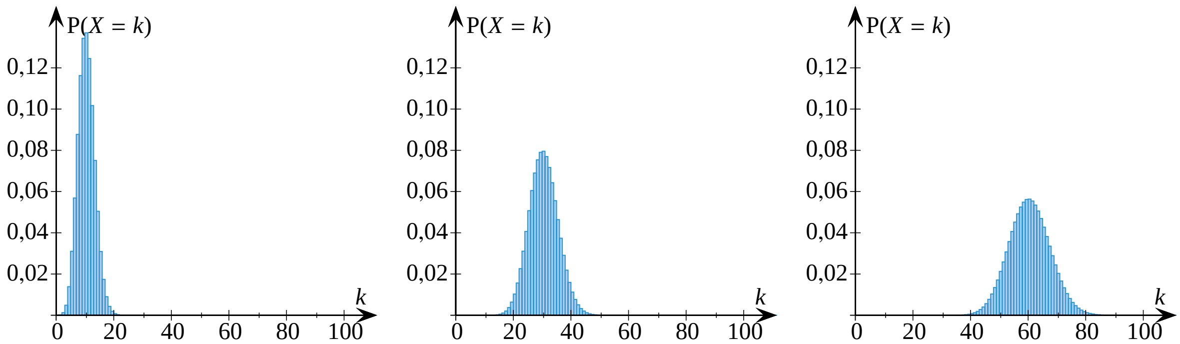
(a) $p = \frac{1}{6}$: $X \sim B_{6;\,\frac{1}{6}}$, $\mu = 1$, $\sigma \approx 0{,}9$

(b) $p = \frac{1}{2}$: $X \sim B_{6;\,\frac{1}{2}}$, $\mu = 3$, $\sigma \approx 1{,}2$

(c) $p = \frac{5}{6}$: $X \sim B_{6;\,\frac{5}{6}}$, $\mu = 5$, $\sigma \approx 0{,}9$

Abb. 3.6: Erwartungswert steigt, Histogramm verlagert sich nach rechts

Bei gleichbleibendem p gilt: Je größer n ist, desto größer ist auch der Erwartungswert und die Standardabweichung. Zudem wird das Histogramm breiter und flacher (Abb. 3.7).



(a) $n = 60$: $X \sim B_{60;\,\frac{1}{6}}$, $\mu = 10$, $\sigma \approx 2{,}9$ (b) $n = 180$: $X \sim B_{180;\,\frac{1}{6}}$, $\mu = 30$, $\sigma = 5$ (c) $n = 360$: $X \sim B_{360;\,\frac{1}{6}}$, $\mu = 60$, $\sigma \approx 7{,}1$

Abb. 3.7: Erwartungswert steigt, Standardabweichung steigt, Histogramm wird breiter und flacher

Verbindet man die Balkenspitzen im Schaubild der Wahrscheinlichkeitsfunktion, so hat die entstehende Kurve ungefähr an der Stelle μ eine Extremstelle und in $\mu-\sigma$ und $\mu+\sigma$ Wendestellen. So lassen sich aus dem Schaubild der Wahrscheinlichkeitsfunktion die Kenngrößen der Binomialverteilung schätzen.

• **146.** Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ für die Zufallsgröße X.

(a) $X \sim B_{12;\,\frac{1}{4}}$ (b) $X \sim B_{16;\,\frac{1}{2}}$ (c) $X \sim B_{100;\,\frac{9}{10}}$ (d) $X \sim B_{60;\,\frac{3}{8}}$

• **147.** Berechnen Sie die fehlenden Werte für die binomialverteilten Zufallsgrößen $X \sim B_{n;\,p}$.

(a) $n = 18$, $p = \square$, $E(X) = 12$, $\sigma(X) = \square$

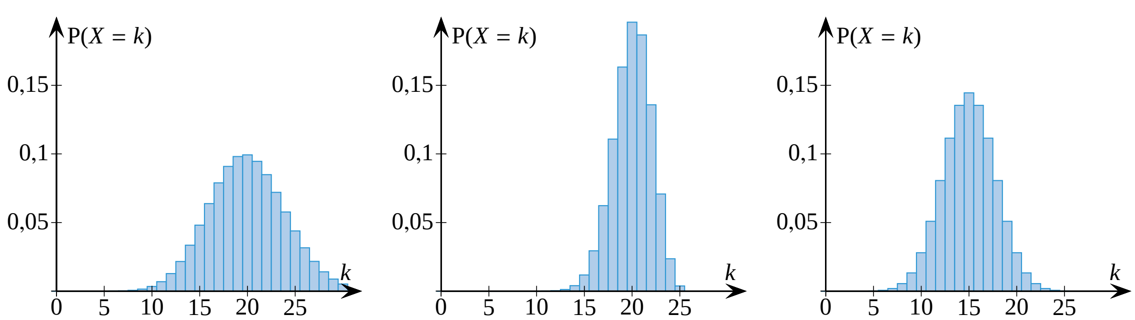
(b) $n = \square$, $p = \frac{4}{5}$, $E(X) = 20$, $\sigma(X) = \square$

(c) (••) $n = \square$, $p = \frac{5}{6}$, $E(X) = \square$, $\sigma(X) = \frac{5}{3}$

(d) (••) $n = 64$, $p = \square$, $E(X) = \square$, $\sigma(X) = 4$

•• **148.** In Abb. 3.8 sind Ausschnitte von Wahrscheinlichkeitsfunktionen binomialverteilter Zufallsgrößen gegeben. Ordnen Sie die Schaubilder den folgenden Zufallsgrößen zu.

(i) $X \sim B_{25;\,\frac{4}{5}}$ (ii) $X \sim B_{30;\,\frac{1}{2}}$ (iii) $X \sim B_{100;\,\frac{1}{5}}$



(a) (b) (c)

Abb. 3.8: Schaubilder zu Aufgabe 148

149. In Abb. 3.9 sind Ausschnitte von Wahrscheinlichkeitsfunktionen zweier binomialverteilter Zufallsgrößen gegeben. Schätzen Sie jeweils die Parameter μ und σ.

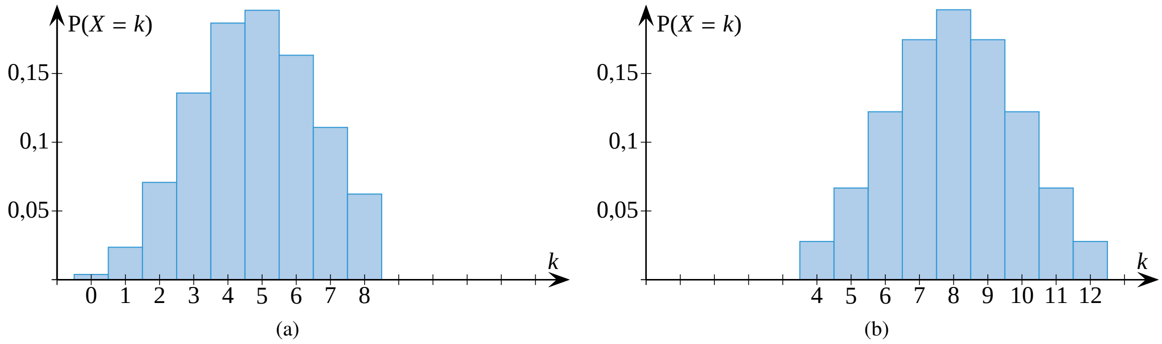


Abb. 3.9: Schaubilder zu Aufgabe 149

150. Auf einem Sektempfang befinden sich 80 Personen, von denen jeder mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % ein 0,1-Literglas Sekt trinkt und mit 40 % keines. Die verfügbaren Sektflaschen haben ein Volumen von 0,7 Litern.

(a) Mit wie vielen vollen Sektgläsern ist im Durchschnitt zu rechnen?

(b) Der Gastgeber hat vor, 7 Flaschen Sekt bereitzustellen. Nehmen Sie dazu Stellung.

151. Ein Glücksrad besteht aus 36 gleich großen Feldern, wobei eines davon einen Gewinn von 30 € enthält. Die restlichen Felder enthalten keinen Gewinn. Der Spieleinsatz für ein einmaliges Drehen beträgt 1,50 €.

(a) Es wird geschätzt, dass 200 Menschen das Glücksrad drehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 7 Gewinne erzielt?

(b) Mit wie viel Reingewinn kann der Betreiber im Schnitt rechnen?

(c) Wie hoch muss der Einsatz mindestens sein, damit der Betreiber im Schnitt überhaupt Gewinn macht?

(d) Wie oft müsste der Gewinn mindestens gedreht werden, damit der Betreiber bei einem Einsatz von 1,50 € Verlust machen würde? Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde dieser Fall tatsächlich eintreten?

152. Berechnen Sie die fehlenden Werte für die binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B_{n;\,p}$.

$$n = \square, \quad p = \square, \quad E(X) = 6{,}3, \quad \sigma(X) = 2{,}1$$

153. Es ist die Zufallsgröße $X \sim B_{n;\,p}$ mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ gegeben. Ergänzen Sie die folgenden Sätze und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) Verdoppeln wir die Anzahl der Versuche auf $2n$, dann erhöht sich der Erwartungswert um den Faktor $\square$ und erhöht sich die Standardabweichung um den Faktor $\square$.

(b) Nun ist $p = \frac{1}{5}$ gegeben. Erhöhen wir p um den Faktor 2,5, dann erhöht sich der Erwartungswert um den Faktor $\square$ und erhöht sich die Standardabweichung um den Faktor $\square$.

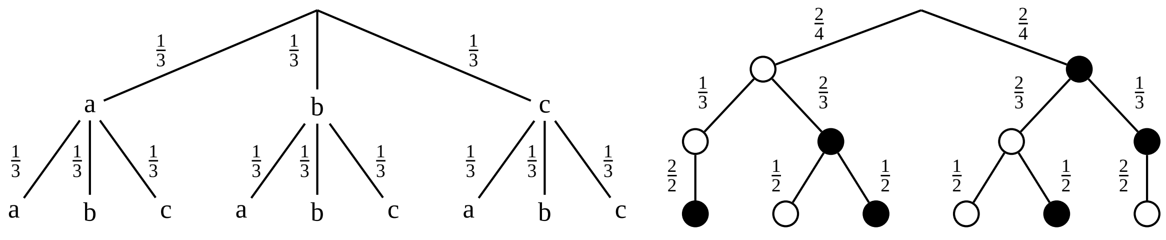
Teil II.

Lösungen

Mehrstufige Zufallsexperimente (S. 18 – 23)

14. (a) $\Omega = \{\mathrm{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc}\}$. Baumdiagramm siehe Abb. 5.9a.

(b) $\Omega = \{\mathrm{wws, wsw, wss, sww, sws, ssw}\}$. Baumdiagramm siehe Abb. 5.9b.



(a) (b)

Abb. 5.9: Baumdiagramme zu Aufgabe 14

15. Laplace-Experiment. $|\Omega| = 36$. $A = \{13, 22, 31\}$, $|A| = 3$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. $B = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$, $|B| = 6$, $P(B) = \frac{1}{6}$. $C = \{46, 55, 56, 64, 65, 66\}$, $|C| = 6$, $P(C) = \frac{1}{6}$. $D = \{14, 22, 41\}$, $|D| = 3$, $P(D) = \frac{1}{12}$. $E = \{13, 24, 31, 35, 42, 46, 53, 64\}$, $|E| = 8$, $P(E) = \frac{2}{9}$. $F = \{13, 26, 31, 62\}$, $|F| = 4$, $P(F) = \frac{1}{9}$.

16. (a) In jedem der vier Würfe erhalten wir Kopf oder Zahl. Also $|\Omega| = 2^4 = 16$. Laplace-Experiment.

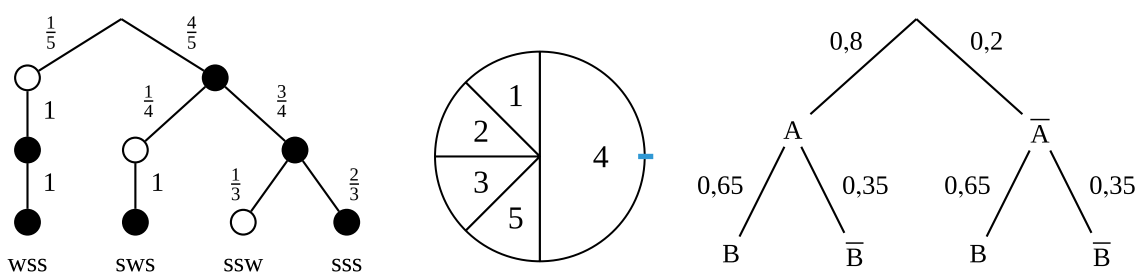
(b) $A = \{\mathrm{KZZZ, ZKZZ, ZZKZ, ZZZK}\}$, $|A| = 4$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. $B = \{\mathrm{KKZZ, KZKZ, KZZK, ZKKZ, ZKZK, ZZKK}\}$, $|B| = 6$, $P(B) = \frac{3}{8}$. Bei dem Ereignis C hilft uns das Gegenereignis: $\overline{C} = \{\mathrm{KKKK}\}$, $C = \Omega \setminus \{\mathrm{KKKK}\}$, $|C| = 15$, $P(C) = \frac{15}{16}$.

(c) Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit P(D) des Ereignisses D = „mindestens einmal Kopf bei n Würfen“ betrachten wir das Gegenereignis $\overline{D}$ = „kein Kopf bei n Würfen“: $P(D) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Auflösen der Ungleichung $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0{,}96$ ergibt $n \geq \log_{0,5} 0{,}04 = 4{,}64$. Die Münze muss also mindestens fünfmal geworfen werden.

17. (a) Baumdiagramm siehe Abb. 5.10a.

(b) $\Omega = \{\mathrm{wss, sws, ssw, sss}\}$.

(c) $A = \{\mathrm{ssw}\}$, $P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$. $B = \{\mathrm{wss, sws, ssw}\}$, $P(B) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$.
$C = \{\mathrm{wss, sws, sss}\}$, $P(C) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$.



(a) Baumdiagramm zu Aufgabe 17 (b) Bild zu Aufgabe 18b (c) Bild zu Aufgabe 19

Abb. 5.10: Lösungsbilder

Mit diesem Übungsbuch können Sie sich langfristig und gezielt auf die Mathematik-Abiturprüfung in Ihrem Bundesland vorbereiten.

Alle Grundlagen und die neuen Unterrichtsinhalte werden anschaulich und mit vielen Bildern sowie Grafiken erklärt.

Für alle Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad angegeben. Alle Lösungswege stehen zur Verfügung und ermöglichen so eine individuelle und selbstständige Vorbereitung.

ISBN 978-3-9817902-3-8

9 783981 790238

Intensivkurs
Mathematik