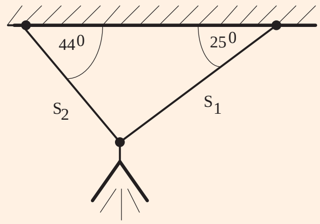
Übungen

Ü1 Berechnen Sie mithilfe des Sinus- bzw. Kosinussatzes die fehlenden Größen (Seiten, Winkel) der Dreiecke.

a) $\alpha = 10°$, $\beta = 72°$, $a = 25$
b) $\alpha = 41°$, $\beta = 20°$, $c = 32$
c) $b = 72$, $a = 29$, $\beta = 15°$
d) $b = 58$, $c = 65$, $\alpha = 81°$
e) $a = 17$, $b = 15$, $\gamma = 110°$
f) $a = 30$, $b = 41$, $\beta = 45°$

Ü2 Zwei Punkte A und B am Ufer eines Flusses sind 50 m voneinander entfernt. Am anderen Ufer steht ein Baum C. Berechnen Sie die Flussbreite, wenn folgende Winkel gemessen werden: $\alpha = 72°$, $\beta = 85°$.

Ü3 Zwei Stahlseile, die an einer Decke einer Fabrikhalle befestigt sind, halten eine Lampe von G = 3 kN. Berechnen Sie die Zugkräfte S_1 und S_2 in den Stahlseilen.



Ü4 Zwei Dörfer liegen auf verschiedenen Seiten eines Sees. Eine Straße verläuft von A zu einem weiteren Dorf C und ist 8,4 km lang. Eine zweite Straße verläuft von B nach C und ist 5,4 km lang. Die beiden Straßen treffen sich im Dorf C unter einem Winkel von $\gamma = 57°40'$. Berechnen Sie die Entfernung der beiden Dörfer A und B.

Ü5 Zwei Traktoren ziehen mit $F_1 = 3900$ N und $F_2 = 2100$ N einen LKW unter einem Winkel von $\alpha = 55°$ aus einem Graben. Bestimmen Sie die Größe der Resultierenden R und den Winkel γ, den die Resultierende mit der Kraft F_1 bildet.

Aufgaben 1.3.2

A1 Berechnen Sie mithilfe des Taschenrechners:

a) $\sin 85°$ b) $\sin 25°$ c) $\sin 0{,}5°$ d) $\sin 325°$
e) $\sin 98°$ f) $\sin 1{,}0°$ g) $\cos 45°$ h) $\cos 35°$
i) $\cos 325°$ j) $\cos 0{,}1°$ k) $\cos 88°$ l) $\cos 145°$

A2 Bestimmen Sie zu folgenden Werten die Winkel zwischen 0° und 90°, indem Sie mithilfe des Taschenrechners eine Stelle nach dem Komma den Winkel angeben.

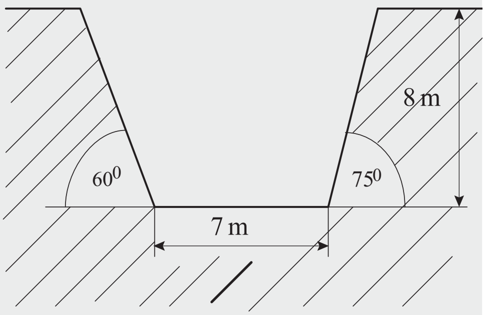
a) $\sin\alpha = 0{,}7071$ b) $\sin\alpha = 0{,}1593$ c) $\sin\alpha = 0{,}3660$ d) $\sin\alpha = 0{,}9567$
e) $\cos\alpha = 0{,}7071$ f) $\cos\alpha = 0{,}9880$ g) $\cos\alpha = 0{,}6349$ h) $\cos\alpha = 0{,}0231$
i) $\sin\alpha = 0{,}2146$ j) $\cos\alpha = 0{,}6885$ k) $\sin\alpha = 0{,}9510$ l) $\cos\alpha = 0{,}6476$

A3 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist $c = 8{,}5$ cm und $\gamma = 30°$.

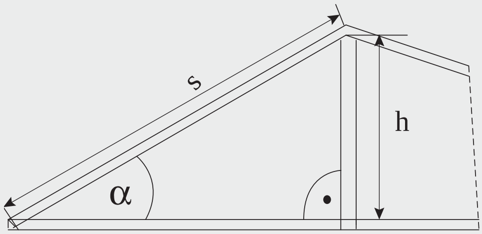
a) Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

A4 Eine Raute besitzt die Diagonalen e = 19 cm und f = 34 cm. Berechnen Sie alle Seiten und Winkel.

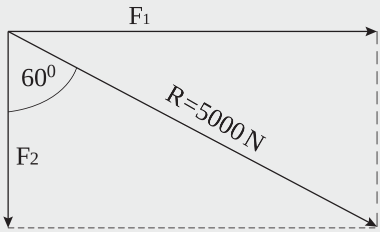
A5 Für eine Eisenbahnstrecke soll ein 1 km langer Geländeeinschnitt (Skizze) ausgehoben werden. Wie viel m^3 Erdreich müssen ausgehoben werden?



A6 Ein Dach hat Sparren der Länge s = 7,50 m und ist unter dem Winkel $\alpha = 25°$ geneigt. Welche Höhe hat das Dach? Wie breit ist der gesamte Boden?



A7 Berechnen Sie die Kräfte F_1 und F_2.



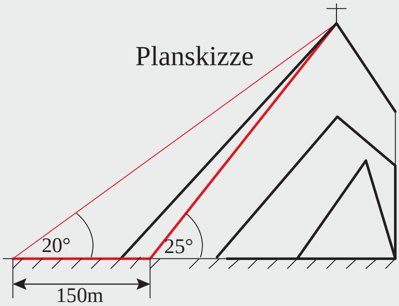
A8 Berechnen Sie mithilfe des Sinus- bzw. Kosinussatzes die fehlenden Größen (Seiten, Winkel) der Dreiecke.

a) $\alpha = 10°$, $\beta = 72°$, $a = 25$
b) $\alpha = 41°$, $\beta = 20°$, $c = 32$
c) $b = 72$, $a = 29$, $\beta = 15°$
d) $b = 58$, $c = 65$, $\alpha = 81°$
e) $a = 17$, $b = 15$, $\gamma = 110°$
f) $a = 30$, $b = 41$, $\beta = 45°$

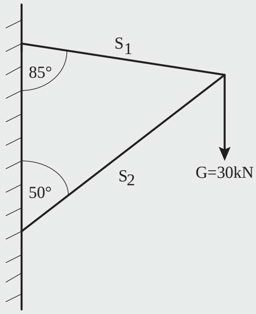
A9 Von einem Aussichtsturm erblickt ein Beobachter in 74 m Höhe einen Wagen unter einem Winkel von $\alpha = 55°$. Auf welcher Höhe des Aussichtsturmes befindet sich ein zweiter Beobachter, wenn er den Wagen unter einem Winkel von 60° sieht? Berechnen Sie den Abstand zwischen Wagen und Aussichtsturm.

A10 Zwei Orte A und B liegen auf einer Waldseite und sind 5,5 km voneinander entfernt. Auf der anderen Seite des Waldes befindet sich ein See, der in Luftlinie gemessen, 3,5 km vom Ort A und 4,5 km vom Ort B entfernt ist. Berechnen Sie alle drei Winkel.

A11 Um die Höhe eines Berges zu messen, wird in der Ebene eine Standlinie von $\overline{AB} = 150$ m abgesteckt. Mit einem Vermessungsgerät wird der Gipfel einmal unter einem Winkel von $\alpha = 20°$ bzw. unter einem Winkel von $\beta = 25°$ angepeilt. Berechnen Sie die Höhe des Berges über der Ebene.

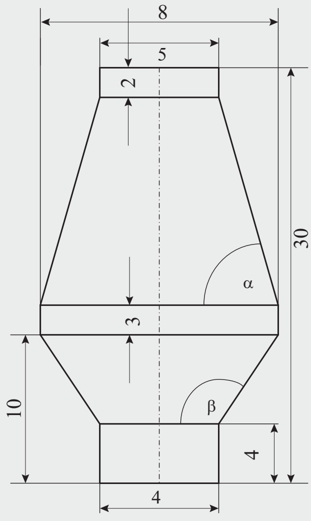


A12 Eine Stahlkonstruktion wird mit G = 30 kN belastet. Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2.

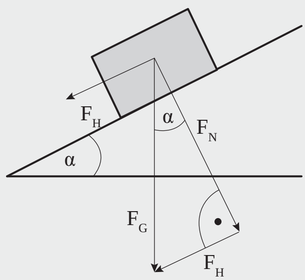


Zusammenfassende Aufgaben

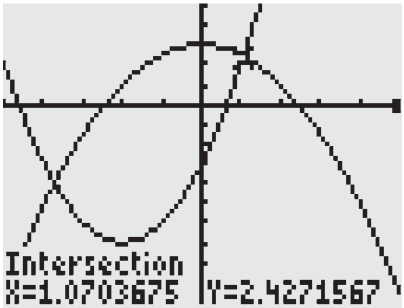
A1 a) Berechnen Sie die Neigungswinkel α und β des Hochofens.
b) Berechnen Sie das Volumen des Hochofens.
c) Berechnen Sie die Oberfläche des Hochofens.



A2 Ein Quader aus Stahl mit $\rho = 7{,}8$ kg/dm^3 mit den Maßen l = 300; b = 200 und h = 50 liegt auf einer schiefen Ebene.
a) Berechnen Sie die Gewichtskraft F_G.
b) Die Kraft F_H verursacht das Herabgleiten des Stahlklotzes. Sie ist nur ein Viertel mal so groß wie die Gewichtskraft F_G. Berechnen Sie F_H und den Winkel α, wenn die Kräfteverhältnisse angegeben sind.
c) Berechnen Sie die Kraft F_N.



Einsatz des GTR (obiges Beispiel):
Man gibt unter **Y1=** und **Y2=** die beiden Terme zu den beiden Funktionen $\mathbf{Y1 = x^2 + 4x - 3}$ und $\mathbf{Y2 = 3 - 0{,}5x^2}$ ein.
Unter **CALCULATE ↓ INTERSECTION** und dreimal **ENTER** erhält man die beiden Graphen und das Ergebnis des rechten Schnittpunktes.



Übung

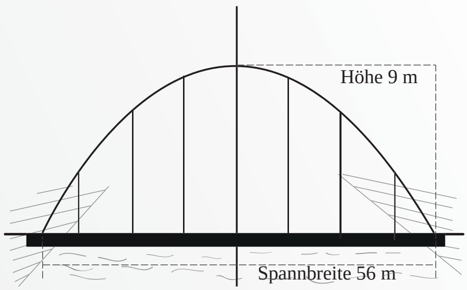
Ü1 Berechnen Sie beide Schnittpunkte der Graphen von f und g und skizzieren Sie die Graphen von f und g.
a) $f(x) = 2x^2 + x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 4$
b) $f(x) = 0{,}2x^2 - 2x + 5$ und $g(x) = 1{,}5x - 0{,}1x^2$

Anwendungen

► Beispiel:

Der Aufhängebogen einer Brücke hat die Form einer Parabel. Der Koordinatenursprung liegt in der Mitte des Brückenbogens. Die Spannweite der Brücke ist 56 m, die Brückenhöhe ist 9 m. Die mittleren Streben sind 7,50 m auseinander, die beiden äußeren Streben sind 5,50 m vom Brückenende entfernt.
a) Fertigen Sie eine Skizze an und ermitteln Sie aus den Angaben die Gleichung der Parabel.
b) Berechnen Sie den gesamten Materialbedarf der 14 Streben in m.

▼ Lösung:



a) In der allgemeinen Form $f(x) = a^2 + bx + c$ fehlt wegen der Achsensymmetrie das Glied bx. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist identisch mit der Brückenhöhe von 9 m. Die Brückenenden entsprechen den Nullstellen der Funktion von $x_1 = -28$ bzw. $x_2 = 28$, sodass a aus der Funktionsgleichung ermittelt werden kann.

$f(x) = ax^2 + c \wedge c = 9$

$f(28) = 0;\ 0 = a \cdot 28^2 + 9 \Rightarrow a = \frac{9}{28^2} = -\frac{9}{784}$

$\mathbf{f(x) = -\frac{9}{784}x^2 + 9}$

b) Die Strebenlängen entsprechen den Funktionswerten. Da die achsensymmetrische Anordnung der Streben für jede Strebenlänge gilt, muss für beide Brückenbögen die mittlere Strebe zweimal, alle anderen Streben viermal berücksichtigt werden.

$f(0) = 9$

$f(7{,}50) = -\frac{9}{784} \cdot 7{,}50^2 + 9 \approx 8{,}35$; $f(15) = -\frac{9}{784} \cdot 15^2 + 9 \approx 6{,}42$

$f(22{,}50) -\frac{9}{784} \cdot 22{,}50^2 + 9 \approx 3{,}19$

$L = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8{,}35 + 4 \cdot 6{,}42 + 4 \cdot 3{,}19 = 89{,}84$

Der gesamte Materialverbrauch für die Stäbe beträgt 89,84 m.

► Beispiel:

Zur Ortung einer verstreuten Wandergruppe schießt diese eine Leuchtkugel mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30$ m/s senkrecht in die Luft (Erdbeschleunigung $g = 9{,}81$ m/s²). Ein Suchtrupp befindet sich hinter einem 50 m hohen Hügel. Es stellt sich die Frage, ob der Suchtrupp den Standort der Wandergruppe aufgrund der Leuchtkugel orten kann.

a) Zur Berechnung der Steighöhe der Leuchtkugel diene die Funktion der Form
$h = f(t) = v_0 \cdot t - 0{,}5 \cdot g \cdot t^2$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung aufgrund der gegebenen Werte.

b) Berechnen Sie sowohl die Zeit, bis die Kugel den Boden wieder erreicht hat, und die Zeit, bis sie ihre maximale Höhe (Scheitelpunkt) erreicht hat.

c) Ermitteln Sie die maximale Steighöhe und skizzieren Sie den Graphen.

▼ Lösung:

a) Da v_0 und $g = 9{,}81$ m/s² gegeben sind, lässt sich die Steigfunktion h sofort angeben.

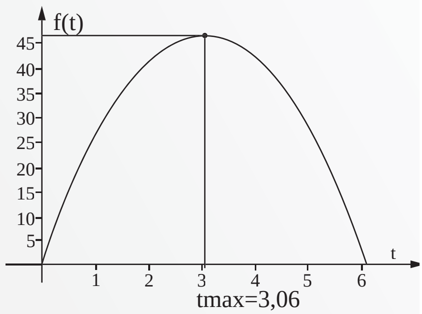
$h = f(t) = 30t - 0{,}5 \cdot 9{,}81t^2$

b) Aus der Physik ist bekannt, dass die Steigzeit bis zur maximalen Höhe gleich der Fallzeit bis zur Bodenberührung ist. Das bedeutet mathematisch, dass sich die Leuchtkugel zu Beginn des Vorganges t = 0 s und nach t = 6,12 s am Boden befindet. In der Hälfte der Zeit, also nach t = 3,06 s, hat die Kugel ihre maximale Höhe erreicht.

$h = 0;$

$0 = t \cdot (30 - 0{,}5 \cdot 9{,}81t) \Rightarrow t_1 = 0 \wedge t_2 = 6{,}12$

$t_{max} = \frac{6{,}12}{2} = 3{,}06$



c) Wird t = 3,06 in die Funktionsgleichung eingesetzt, so erhält man die maximale Steighöhe.

$h_{max} = 30 \text{ m/s} \cdot 3{,}06 \text{ s} - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 3{,}06^2\text{s}^2$
$= 45{,}87 \text{ m}$

Die Wandergruppe bleibt unentdeckt, weil der Hügel mit 50 m die 45,87 m überragt.
(Schneller kommt man mit $v = v_0 - gt$ usw. zum Ziel)

Übung

Ü1 Ein Junge wirft einen Stein von einer 50 m hohen Brücke mit eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5$ m/s senkrecht nach unten in einen Fluss.

a) Ermitteln Sie den Funktionsterm f(t). (Orientieren Sie sich am obigen Beispiel.)

b) Berechnen Sie die Zeit, bis der Stein ins Wasser fällt.

b) Mithilfe der ersten Formel wird errechnet, dass sich die Erdbevölkerung nach ca. 50 Jahren, also im Jahr 1980, **verdoppelt** hat. Die gesuchte Zahl für die Verdopplungszeit t erhält man durch Logarithmieren und Auflösen der Gleichung nach t. Wie viel Menschen lebten tatsächlich 1980 auf der Erde (Tabelle)? (Siehe auch S. 114)

$2{,}0 = 1{,}014^t$ Verdopplung

$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}014} = 49{,}86 \approx 50$ Jahre

$1930 + 50 = 1980$

Für die **Verdopplungszeit t** gibt es bei exponentiellem Wachstum eine allgemeine Formel.

$$\mathbf{t = \frac{\ln 2}{\ln a}}$$

Zur Berechnung der **Verdreifachung** der Erdbevölkerung dienen die gleichen Überlegungen wie oben. Man setzt für a den ermittelten Wert ein und formt nach t um.

$3 \cdot 2{,}0 = 2{,}0 \cdot 1{,}014^t$

$t = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}014} = 79{,}02;\ \ 1930 + 79 = 2009$

Im Jahre **2009** ist die Erdbevölkerung auf das **Dreifache** angewachsen.

c) Es wird die Differenz D der Jahre 2004 (14 Jahre) und 2005 (15 Jahre) berechnet. Die jährliche Zunahme beträgt:

$D = 2{,}0 \cdot 1{,}014^{15} - 2{,}0 \cdot 1{,}014^{14} = 0{,}034$ (Mrd.)

d) Von 1939 bis 1945 fand in Europa der Zweite Weltkrieg statt. Er forderte ca. 55 Millionen Opfer.

Bevölkerungswachstum:

Nach neuesten Schätzungen des U.S. Bureau of the Census wächst die Erdbevölkerung ca. ab dem Jahr 2008 langsamer und ab dem Jahr 2012 wieder schneller, als es die Berechnungen mit der Exponentialformel erwarten lassen.

2. Exponentielle Abnahme

Exponentielle Abnahmeprozesse verlaufen gewöhnlich nach dem folgenden Gesetz:

$\mathbf{f(t) = f(0)\,a^{-t}}$ bzw. $\mathbf{f(t) = f(0)\,e^{-k \cdot t}}$ mit $\mathbf{k = \ln a}$

f steht für den Bestand nach t Jahren, **A = f(0)** bezieht sich auf den **Bestand** zum Zeitpunkt t = 0, (Anfangsbestand), **a** ist die Abnahmekonstante (= Abnahmefaktor), es gilt a > 0.

► Beispiel: Luftdruck

In einer Wetterstation wird der Luftdruck p in hPa (Hektopascal) mithilfe eines Wetterballons gemessen. Dabei geht man davon aus, das der Luftdruck in Meereshöhe h = 0 m ungefähr p(0) = 1000 hPa beträgt und exponentiell abnimmt.

h (in m)	0	1000	2000	3000
p (in hPa)	1000	880	777	684

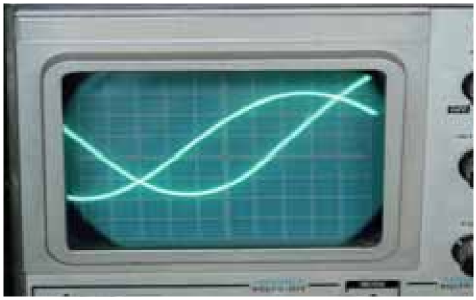
a) Bestimmen die Höhenformel, wenn bekannt ist, dass der Luftdruck exponentiell abnimmt.
b) Berechnen Sie den Luftdruck auf der Zugspitze (2960 m) bzw. auf dem MontBlanc (4800 m).
c) Berechnen Sie die Höhe, die zu 850 hPa gehört.

Übung

Ü1 Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.
a) $\sin x = -0{,}5$ b) $\cos x = 0{,}8$

Von $f(x) = \sin x$ zu $g(x) = a\sin(bx - c) + d$
Die Graphen der Funktionen $g(x) = a\sin(bx - c) + d$ bzw. $h(x) = a\cos(bx - c) + d$ sind in Naturwissenschaft und Technik von besonderer Bedeutung. Sie lassen sich durch Verschiebungen und Streckungen in Richtung der Koordinatenachsen aus den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ bzw. $f(x) = \cos x$ gewinnen.

Ein besonders wichtiger Funktionsterm zu g wird u. a. im Physikunterricht behandelt. Es ist der zeitliche Verlauf von **Spannung** und **Stromstärke** bei Wechselstrom. Sein Graph wird mithilfe des Monitors eines Oszillographen dargestellt. Man erkennt, dass es sich um einen sinusförmigen Verlauf der beiden Graphen handelt. In beiden Fällen sind die Graphen Graphen spezieller Sinusfunktionen, in denen die Spannung U sowie die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt werden. Man spricht auch vom **sinusförmigen Wechselstrom**.



Die einzelnen Größen in den Funktionsgleichungen sind physikalische Größen. Die beiden Größen ω und φ treten in beiden Gleichungen auf.

ω ist die Kreisfrequenz des Wechselstromes. Sie errechnet sich: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dabei ist T die Dauer einer Periode.(Schwingung)

φ ist der Phasenwinkel, der von der Wahl des Nullpunktes auf der Zeitachse abhängt.

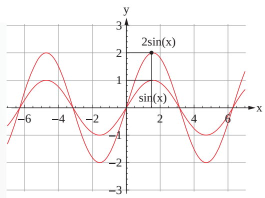
Es handelt es sich um Funktionsgleichungen einer harmonischen Schwingung.
Wechselspannung: $\mathbf{u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$ Wechselstromstärke: $\mathbf{i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$

Es gilt:
$u(t)$: Momentanwert der Spannung $i(t)$: Momentanwert der Stromstärke
u_0: Maximalwert der Spannung (üblich: 230 V)
i_0: Maximalwert der Stromstärke
ω: Kreisfrequenz; $\omega = \frac{2\pi}{T}$
φ: Phasenwinkel

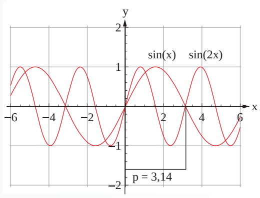
Bevor zum sinusförmigen Wechselstrom noch genauer untersucht wird, sollen zunächst die Einflüsse der Parameter a, b, c und d auf die Graphen der Funktionen $\mathbf{g(x) = a\sin(bx - c) + d}$ untersucht werden.

► Beispiele:

1. $\mathbf{g(x) = 2\sin x}$
Der Graph von $f(x) = \sin x$ wird mit dem Faktor $\mathbf{a = 2}$ in y-Richtung **gestreckt**. Verdoppelung der Amplitude.



2. $\mathbf{g(x) = \sin 2x}$
Der Graph von g schneidet die x-Achse doppelt so oft wie der Graph von $f(x) = \sin x$. Die Periode von g ist $p = \pi$.



A9 Von einer Stichprobe kennt man den Mittelwert $\overline{x} = 1$ und die Varianz $\sigma^2 = 2{,}8$. Berechnen Sie H(2) und H(3).

A10 Gegeben ist die folgende Stichprobe:

x	10	30	50	70	90	110	130	150	180
H(x)	6	9	19	25	33	22	15	8	3

a) Teilen Sie die Stichprobe in Klassen ein und zeichnen Sie ein Histogramm.
b) Berechnen Sie Mittelwert, Varianz und Streuung.
c) Ermitteln Sie das Intervall $[\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma]$ und geben Sie an, wie viel Prozent der Werte in diesem Intervall liegen.

A11 In einem Unternehmen wurden männliche (X) und weibliche (Y) Arbeitnehmer zu den folgenden Bruttomonatslöhnen beschäftigt:

Bruttomonatslohn in 100 Euro	Anzahl X	Anzahl Y
7 – 12	3	5
13 – 19	6	10
20 – 26	10	15
27 – 33	20	6
34 – 40	18	6
41 – 50	9	2

a) Bestimmen Sie h_n für die männlichen und weiblichen Arbeitnehmer.
b) Berechnen Sie die durchschnittlichen Bruttoarbeitslöhne der männlichen (X) und weiblichen (Y) Arbeitnehmer sowie die jeweilige Varianz und Streuung. Berücksichtigen Sie dabei jeweils die Klassenmitten.
c) Zeichnen Sie für X und Y das Histogramm.
d) Wie viel % der weiblichen Arbeitnehmer haben einen Bruttolohn zwischen 1300 und 2600 €?
e) In welchem Intervall liegen die mittleren 66 % der männlichen Arbeitnehmer?

3.2 Regressions- und Korrelationsrechnung

Bisher wurden statistische Erhebungen betrachtet, in denen genau ein Merkmal eine Rolle spielte. Im Folgenden werden Probleme behandelt, in denen genau zwei Merkmale vorkommen, die häufig in einem bestimmten *Zusammenhang* stehen.

- Der Benzinverbrauch eines Autos hängt von der Motorstärke ab.
  Das Gewicht eines Menschen hängt von der Körpergröße ab.
  Die Beschäftigtenzahl eines Betriebes hängt u. a. von der Auftragslage ab.
  Der Preis eines Gebrauchtwagens hängt von seiner Fahrleistung ab.

Man erkennt an den **Beispielen,** dass die *Abhängigkeit* stark bzw. schwach sein kann.

- Im ersten Beispiel liegt zwischen den beiden Zufallsgrößen Motorstärke und Benzinverbrauch sicher eine funktionale Abhängigkeit, denn je stärker die Motorleistung, desto höher der Benzinverbrauch.
- Im vierten Beispiel kann man zwar eine Tendenz zwischen Preis und Fahrleistung vermuten – bei hoher km-Leistung steigt der Preis. Dies kann aber nicht exakt vorhergesagt werden, denn vor allem Alter und Zustand des Autos sowie Beliebtheit bei den Käufern beeinflussen den Preis. Man stellt in diesem Fall eine geringere funktionale Abhängigkeit fest.

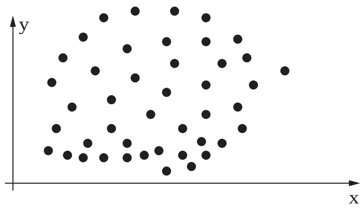
Für den Statistiker, der die Beziehung zwischen zwei gemeinsam auftretenden Merkmalen untersuchen will, stellen sich hier **zwei** Fragen:

1. Besteht zwischen den Merkmalen ein Zusammenhang und wie stark bzw. wie schwach ist dieser Zusammenhang?

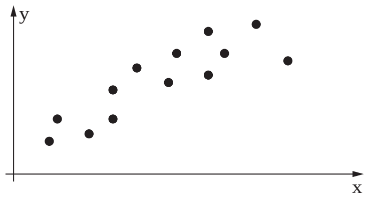
Mit der Bestimmung einer Maßzahl für die Stärke bzw. Schwäche des Zusammenhangs beschäftigt sich die **Korrelationsanalyse.**

Man kann grob eingeteilt **drei** Fälle unterscheiden.

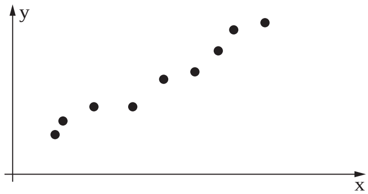
1. Sind kleine Werte der einen Zufallsgröße, kleine wie auch große Werte der anderen Zufallsgröße zugeordnet, so besteht offensichtlich kein funktionaler Zusammenhang. Es liegt **keine Korrelation** vor. Die Zufallsgrößen sind unabhängig voneinander (Punktwolke).



2. Eine **schwache Korrelation** liegt vor, wenn jedem Wert der einen Zufallsgröße relativ niedrige wie auch relativ hohe Werte der anderen Zufallsgröße zugeordnet werden, aber noch keine starke Beziehung zwischen den Zufallsgrößen erkennbar ist.



3. Eine **starke Korrelation** besteht dann, wenn z. B. hohe Werte der einen Zufallsgröße auf hohe Werte der anderen Zufallsgröße und niedrige Werte der einen Zufallsgröße auf niedrige Werte der anderen Zufallsgröße treffen.

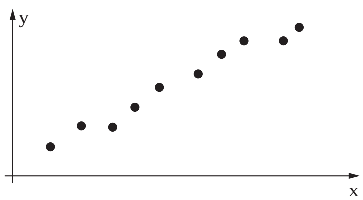


2. Welcher Art ist dieser Zusammenhang und durch welche mathematische Funktion kann er wiedergegeben werden?

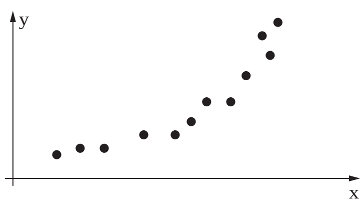
Mit der Bestimmung einer Funktion zur Beschreibung eines möglichen Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsgrößen beschäftigt sich die **Regressionsanalyse.**

Man kann grob **zwei** Fälle unterscheiden.

1. Wird zwischen den beiden Variablen ein nahezu linearer Zusammenhang in den Daten festgestellt, so wird man bei der Regressionsanalyse eine lineare Funktion vermuten. Dabei sind grundsätzlich zwei Regressionsgleichungen möglich:
   $\mathbf{y_i = a_1x_i + b_1}$ **bzw.** $\mathbf{x_i = a_2y_i + b_2}$



2. Wird aus der Form der Punktwolke vermutet, dass ein nichtlinearer Zusammenhang besteht, so kann man diesen ggf. durch eine ganzrationale oder eine Exponentialfunktion beschreiben. Mögliche Regressionsgleichungen sind:
   $\mathbf{y_i = ax_i^2 + bx_i + c}$ **bzw.** $\mathbf{y_i = ax_i^b}$



4.4 Die Ableitungsfunktion f′

Mithilfe der Ableitung lassen sich die Steigungen von Funktionsgraphen an bestimmten Stellen x_0 berechnen. Auf der Seite wird deutlich, dass es je nach Wahl der Stelle x_0 unterschiedliche Steigungswerte gibt. Zwischen der Funktion f und der zugehörigen Ableitung f′ gibt es einen Zusammenhang. Man bezeichnet die Funktion f′ auch als Ableitungsfunktion von f. Mit f′ lassen sich bequem die Steigungen an beliebigen Stellen der Funktion f berechnen.

► Beispiel:

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $f(x) = x^2$.

a) Bestimmen Sie durch Grenzwertbetrachtung die Ableitung von f an der Stelle x_0.

b) Berechnen Sie mithilfe der Ableitung die Steigungen der Parabel an den folgenden Stellen $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ und geben Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f′ an.

c) Stellen Sie die Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f′ grafisch dar.

▼ Lösung:

a) Es wird der Differenzenquotient aufgestellt und die Variable x durch $x_0 + h$ ersetzt.

1. Schritt: Differenzenquotient aufstellen

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

Nach Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Kürzen entsteht der für den Grenzwert vorbereitete Term $2x_0 + h$.

$$\frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = \mathbf{2x_0 + h}$$

Bei der Grenzwertbildung fällt h weg. Die Ableitung an der Stelle x_0 lautet $2x_0$.

2. Schritt: Grenzwertbildung für $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = \mathbf{2x_0}$$

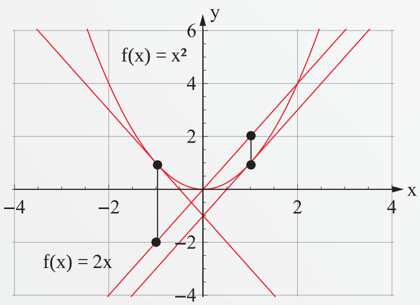
b) Werden die Werte für x in den Ableitungsterm $2x_0$ eingesetzt, so ergibt sich die Wertetabelle.

Wertetabelle der Steigungen:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f′(x)	−6	−4	−2	0	2	4	6

Die gesuchte Ableitungsfunktion f′ hat die Gleichung $f'(x) = 2x$.

c) Zeichnet man in einem Koordinatensystem zu jedem x_0-Wert (Tabelle) den zugehörigen Wert für die Steigung ein, so erhält man den Graphen einer neuen Funktion und zwar $g(x) = 2x$. g wird im Folgenden mit f′ bezeichnet.



Merke

Ist von einer ganzrationalen Funktion f die **Ableitungsfunktion f′** bekannt, so kann der Funktionswert f′(x) der Ableitungsfunktion f′ an jeder Stelle $x \in D(f)$ berechnet werden. Das heißt, man kann für jeden Punkt P(x|f(x)) des Graphen der Funktion f den **Steigungswert f′(x)** berechnen.

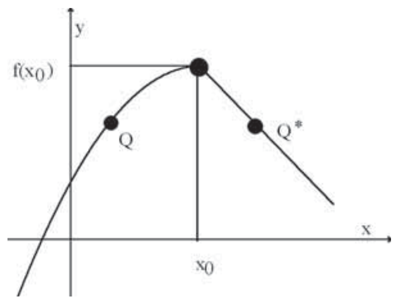
Anmerkung:
Die Bestimmung der Ableitungsfunktion f′ bzw. die Berechnung der Ableitung einer Funktion f an einer Stelle $x \in D(f)$ wird in der Mathematik als **Differenzieren** und das Gebiet, das sich damit beschäftigt, als **Differenzialrechnung** bezeichnet. Die Definitionsbereiche der Funktionen f und f′ sind bei ganzrationalen Funktionen immer $\mathbb{R}$ $(D(f) = D(f') = \mathbb{R})$.

Übungen

Ü1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x - x^2$.
a) Bestimmen Sie mithilfe des Differenzquotienten die Funktion f′, mit deren Hilfe in jedem beliebigen Punkt die Steigungswerte ermittelt werden können.
b) Berechnen Sie den Steigungswert in den Punkten P (0|0) und P (1|2).

Ü2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4x$.
a) Ermitteln Sie mithilfe des GTR die Steigungen in den Punkten P(1|f(1)) und P(5|f(5)).
b) Wie lautet die Ableitungsfunktion f′(x), wenn f′(1) = –2 und f′(5) = 6 beträgt.

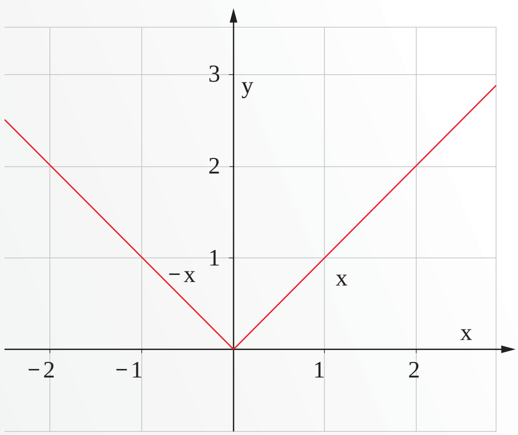
Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Es gibt Funktionen, deren Graph in einem oder mehreren Punkten ihres Definitionsbereiches keine eindeutig bestimmbare Steigung hat.



Der Graph von f hat in dem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ einen *„Knick“*, d. h., an dieser Stelle „springt“ die Tangente von einer Lage in eine andere, je nachdem, ob sich der Punkt Q bzw. Q* von links oder von rechts dem Punkt P nähert.
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, es existiert keine erste Ableitung. Die Funktion f(x) ist im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ aber **stetig**, wie zu erkennen ist.
Dies wird am folgenden Beispiel begründet.

▶ Beispiel: f(x) = |x|

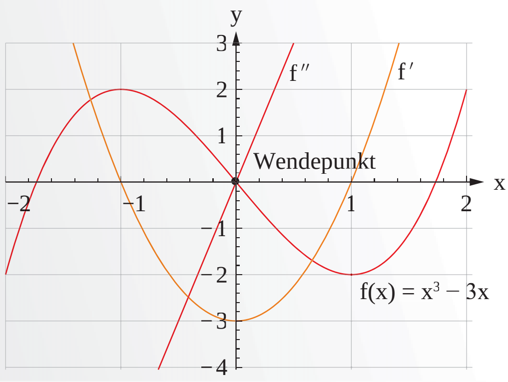
Der Graph der Betragsfunktion besteht aus zwei Halbgeraden, die im Koordinatenanfangspunkt zusammenstoßen. Die beiden Halbgeraden „schwenken“ im Punkt P(0|0). Ihre Steigung ist entweder −1 oder 1. Mithilfe des Differenzenquotienten kann man dies einmal für $x < 0$ und zum anderen für $x \geq 0$ zeigen (rechts- und linksseitige Ableitungen existieren, sind aber nicht gleich).
Die Betragsfunktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht ableitbar, dies ist am Differenzenquotienten zu erkennen. **Die Funktion f(x) = |x| ist an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar.** Sie ist an der Stelle x = 0 aber stetig.



$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ x; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x < 0:}\ \frac{-x-0}{x-0} = \mathbf{-1}; \quad \mathbf{x \geq 0:}\ \frac{x-0}{x-0} = \mathbf{1}$$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 0 = 6x \Rightarrow x_W = 0$
$f'''(x) = 6$; $f'''(0) = 6$.
Da $f'''(x_W) \neq 0$ ist, hat **f bei $x_W = 0$ eine Wendestelle.**
Man stellt fest, dass der Wendepunkt P_W des Graphen von f im Koordinatenanfangspunkt ($P_W(0|0)$) liegt.



Nicht jede zweifach differenzierbare Funktion besitzt eine Wendestelle.

► Beispiel:

Zeigen Sie, dass $f(x) = 0{,}25x^4 - 2x$ keine Wendestellen hat.

▼ Lösung:

Die erste Bedingung $f''(x_W) = 0$ des Satzes ist erfüllt, aber nicht die zweite Bedingung $f'''(x) \neq 0$; $x_W = 0$ ist **keine** Wendestelle von f.

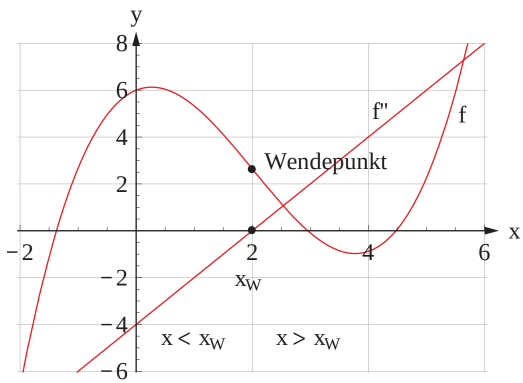
$f'(x) = x^3 - 2$; $f''(x) = 3x^2$
$0 = 3x^2 \Rightarrow x_W = 0$
$f'''(x) = 6x$; $f'''(0) = 0$

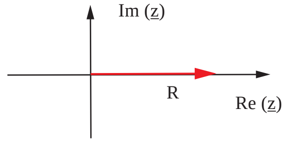
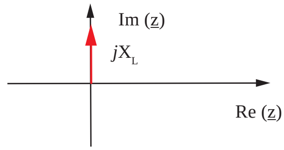
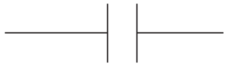
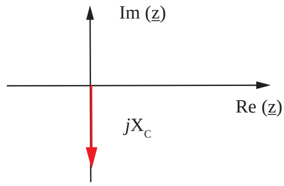
5.2.2 Krümmung

Wo ist die Straße links-, wo ist die Straße rechtsgekrümmt? Worauf kommt es dabei an?

Offensichtlich ändert sich das Krümmungsverhalten eines Graphen von f im Wendepunkt, wie im Schaubild zu erkennen ist. Der Graph der Funktion f hat im Punkt $P(x_W|f(x_W))$ einen Wendepunkt.

Für alle $x < x_W$ durchläuft der Graph von f eine Rechtskurve. Für alle $x > x_W$ durchläuft der Graph von f eine Linkskurve. Der Graph von f'' hat in x_W einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

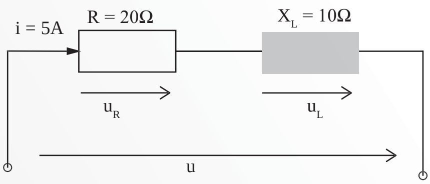


Bezeichnung	Schaltsymbol	Pfeildarstellung
Ohm'scher Widerstand $Z = R$		
Induktiver Widerstand $Z = X_L = \omega L \;\; (\omega = 2\pi f)$		
Kapazitiver Widerstand $Z = X_C = \frac{1}{\omega C} \;\; (\omega = 2\pi f)$		

In der Elektrotechnik wird der Ohm'sche Widerstand als **Wirkwiderstand** und der induktive und kapazitive Widerstand als **Blindwiderstand** bezeichnet.

► Beispiel:

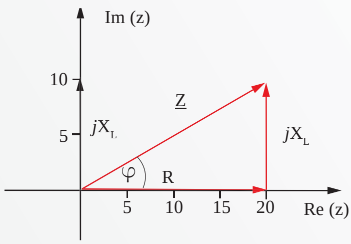
Ein Ohm'scher Widerstand (Wirkwiderstand) und ein induktiver Widerstand (Blindwiderstand) sind in einem Wechselstromkreis, durch den ein Strom von i = 5 A fließt, in **Reihe** geschaltet.



a) Skizzieren Sie das Widerstandsdiagramm in der Gauß'schen Zahlenebene und berechnen Sie den Scheinwiderstand sowie den Phasenwinkel φ.
b) Berechnen Sie die Teilspannungen u_R und u_L.

▼ Lösung:

a) Man zeichnet entsprechend der obigen Skizze den Ohm'schen Widerstand auf der reellen Achse und parallel zur imaginären Achse an die Pfeilspitze von R den induktiven Widerstand ein.



Es entsteht durch die Pfeile von R, $\underline{Z}$ und j X_L ein Dreieck mit dem Phasenwinkel φ.

In einer **Reihenschaltung** addieren sich die Teilwiderstände R und X_L. Zur Berechnung des Scheinwiderstandes wird die Betragsdefinition benötigt (Z = 22,36 Ω).

$$\underline{Z} = R + j\,XL$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} \approx 22{,}36$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20}{22{,}36} \approx 0{,}89 \Rightarrow \varphi \approx 27{,}1°$$