Inhaltsverzeichnis

A Vektorrechnung

Seite

B Geraden und Ebenen

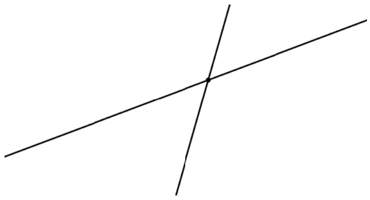
Seite

C Kreise und Kugeln

Seite

Soll die Lage von zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ und $f: \vec{x} = \vec{c} + l \cdot \vec{d}$ zueinander bestimmt werden, müssen beide Geradengleichungen gleichgesetzt werden. Dabei ergibt sich ein LGS bzw. eine Vektorgleichung der Form: $\vec{a} + k \cdot \vec{b} = \vec{c} + l \cdot \vec{d}$

Existiert genau eine Lösung $(k_0; t_0)$, besitzen die Geraden einen Schnittpunkt S.



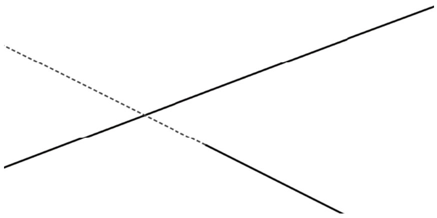
Existieren unendlich viele Lösungen, sind die Geraden identisch.

Existiert keine Lösung, besitzen die Geraden keinen Schnittpunkt. Bei diesem Fall muss zwischen windschief und parallel unterschieden werden. Bei parallelen Graden sind die Richtungsvektoren linear abhängig.

Windschief:

$g: \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{b}$
$f: \vec{x} = \vec{c} + l \cdot \vec{d}$

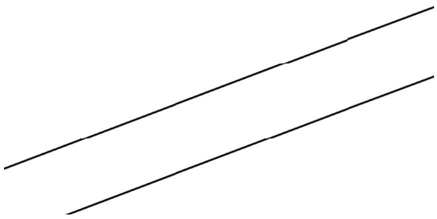
mit $\vec{b} \neq l \cdot \vec{d}$



Parallel:

$g: \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{b}$
$f: \vec{x} = \vec{c} + l \cdot \vec{d}$

mit $\vec{b} = l \cdot \vec{d}$



Wie liegen die drei folgenden Geraden jeweils zueinander?

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 10{,}5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -2{,}25 \\ -6{,}75 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$$

Die Lage zwischen zwei Geraden lässt sich durch Gleichsetzen der Geradengleichungen bestimmen.

zum Video

<u>Lage zwischen f und g:</u>

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 10{,}5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 10{,}5 \\ -7 \end{pmatrix} - l \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 3{,}5k & + & 2l & = & 1 & \mathrm{I} \\ 10{,}5k & - & 2l & = & 3 & \mathrm{II} \\ -7k & - & 2l & = & -2 & \mathrm{III} \quad | \ \mathrm{III} + \frac{7}{10{,}5}\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 3{,}5k & + & 2l & = & 1 & \mathrm{I} \\ 10{,}5k & - & 2l & = & 3 & \mathrm{II} \\ & - & \frac{10}{3}l & = & 0 & \mathrm{III} \end{array}$$

$\rightarrow \quad l = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{7}$ Geraden schneiden sich.

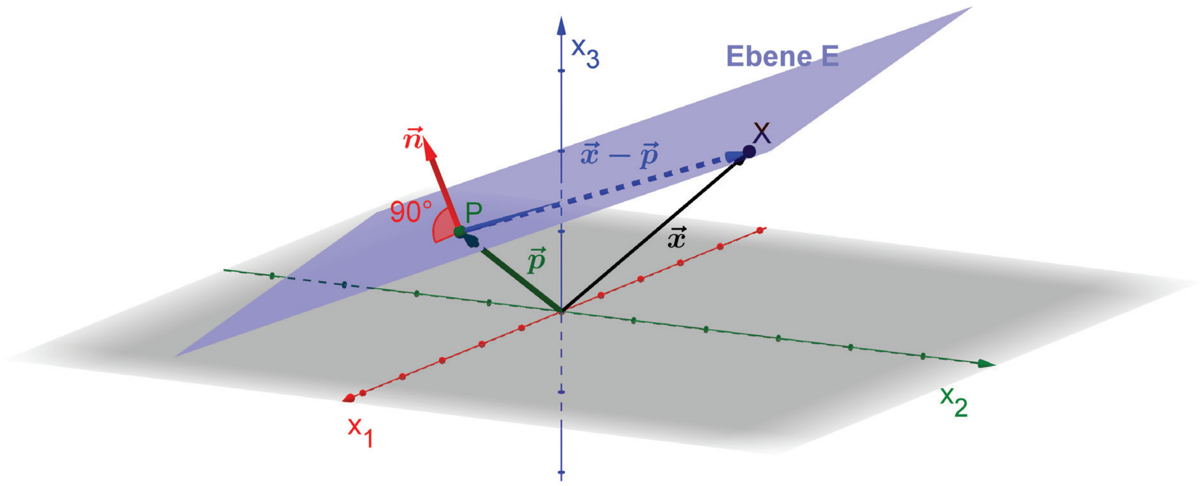
Eine Ebene E kann durch einen Punkt P mit dem zugehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{0P} = \vec{p}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ beschrieben werden.
Es gilt für alle Punkte X mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{0X} = \vec{x}$ in dieser Ebene folgende Gleichung

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Man bezeichnet sie als **Normalenform der Ebenengleichung**. Die Gleichung lässt sich auf das Skalarprodukt bei orthogonalen Vektoren zurückführen.
Die Normalenform der Ebenengleichung lässt sich durch Ausmultiplizieren der Skalarprodukte auch als **Koordinatengleichung** der Form

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$$

schreiben. Dabei ist $b = \vec{p} \cdot \vec{n}$.



Stelle eine Ebenengleichung in Koordinatenform auf, sodass die Punkte $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Ebene liegen. Wandle danach die Koordinatenform in Normalenform um.

zum Video

Jeder der Punkte muss die Koordinatengleichung erfüllen. Du stellst also für jeden Punkt die Koordinatengleichung auf, indem du ihre Koordinaten für x_1, x_2, x_3 einsetzt.

$$\begin{aligned} -n_1 + n_2 + 2n_3 &= b \\ 3n_1 + 5n_2 + 6n_3 &= b \\ 2n_1 + n_2 + n_3 &= b \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um ein Gleichungssystem, das wir mit dem Gauß-Algorithmus lösen wollen. Du rechnest

für Zeile 2: $\mathrm{II} + 3 \cdot \mathrm{I}$

und für Zeile 3: $\mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{I}$

Um die Lage von Ebenen besser beschreiben und zeichnen zu können, bestimmt man zunächst die **Spurpunkte** und **Spurgeraden:**

- Die **Spurpunkte** sind jeweils die Schnittpunkte der Ebene mit den verschiedenen Koordinatenachsen.
- Verbindet man die Spurpunkte erhält man die **Spurgerade**. Dies ist die Schnittgerade der Ebene mit der x_1 - x_2 - oder x_1 - x_3 - oder x_2 - x_3 - Ebene.

Zeichne die Ebene $E: 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10$ in ein Koordinatensystem, indem du die Spurpunkte und Spurgeraden bestimmst.

zum Video

Wie oben beschrieben, sind die Spurpunkte die jeweiligen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Diese lassen sich bestimmen, indem man zwei Koordinaten der Ebenengleichung Null setzt und dadurch die Koordinate der verbleibenden Achse bestimmt. Daraus folgt:

$$4x_1 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 10 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2{,}5 \quad S_1(2{,}5|0|0)$$
$$4 \cdot 0 - 2x_2 + 5 \cdot 0 = 10 \quad \rightarrow \quad x_2 = -5 \quad S_2(0|-5|0)$$
$$4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad x_3 = 2 \quad S_3(0|0|2)$$

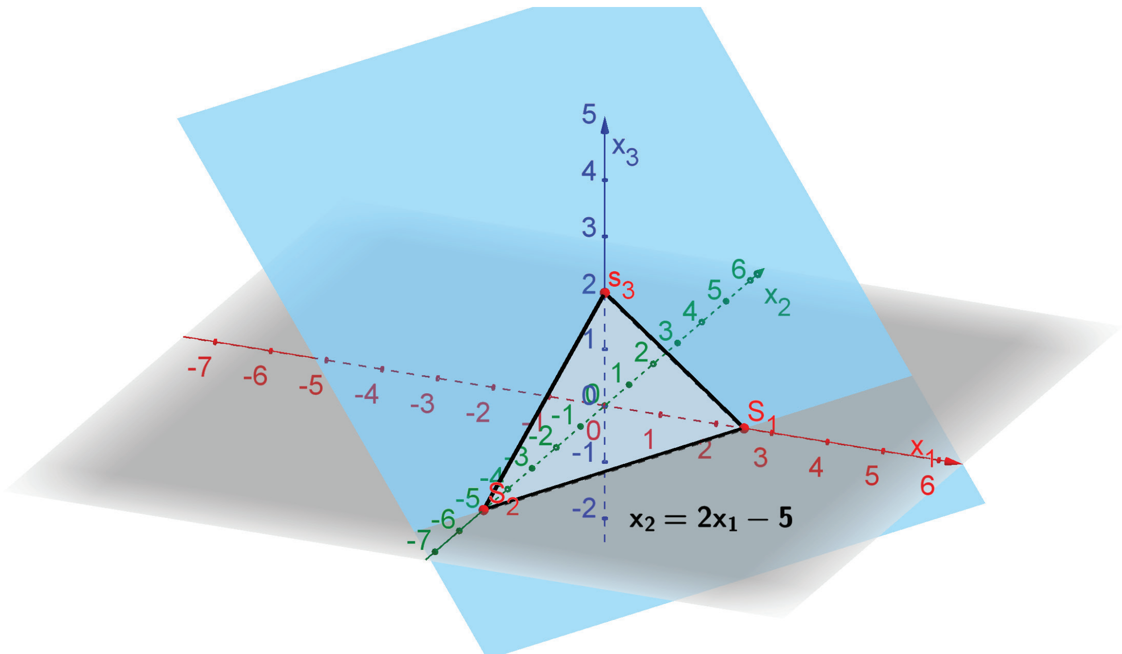
Die Spurpunkte sind somit bestimmt und können an den Koordinatenachsen als Schnittpunkte eingetragen werden. Das Verbinden der Spurpunkte ergibt unmittelbar die Spurgerade, wodurch nun auch die Ebene eingezeichnet werden kann.
Möchte man die Spurgerade rechnerisch bestimmen, reicht es, genau eine Koordinate Null zu setzen. Setzt man also x_3 Null, erhält man die Spurgerade in der x_1 - x_2 - Ebene, die sich durch Umstellen wie eine Geradengleichung schreiben lässt:

$$4x_1 - 2x_2 + 5 \cdot 0 = 10 \quad \rightarrow \quad x_2 = 2x_1 - 5$$

Für die anderen beiden Spurgeraden gilt:

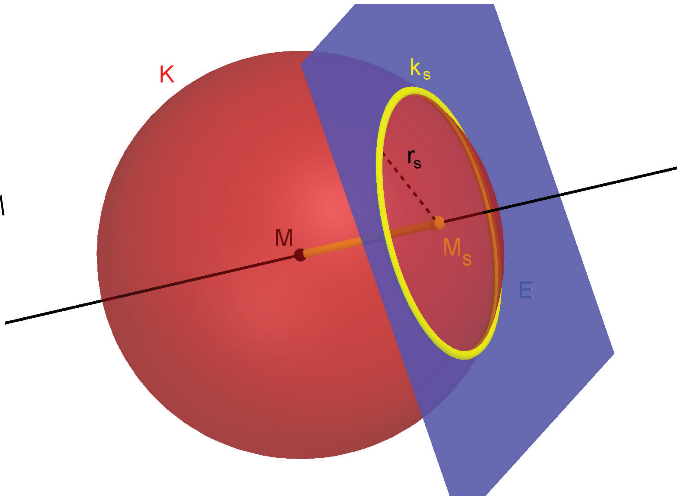
$$4x_1 - 2 \cdot 0 + 5x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad x_3 = -\tfrac{4}{5}x_1 + 2$$
$$4 \cdot 0 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \quad \rightarrow \quad x_3 = \tfrac{2}{5}x_2 + 2$$

Du erkennst außerdem beim Aufstellen der Spurgeraden, dass der Achsenabschnitt der Geradengleichung eben auch mit dem Spurpunkt von $x_3 = 2$ (siehe oben) übereinstimmt.



Eine Ebene E, die eine Kugel K mit Radius r schneidet, bildet einen Schnittkreis k_s dort, wo die beiden Figuren zusammen fallen. Dieser Schnittkreis hat den Radius r_s und den Mittelpunkt M_s. Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Fußpunkt des Lots vom Kugelmittelpunkt M (Ortsvektor $\vec{m}$) auf die Ebene. Der Radius des Schnittkreises berechnet sich mit:

$$r_s = \sqrt{r^2 - d^2}$$



Dabei ist d die Länge der Strecke $\overline{MM_s}$ vom Kugelmittelpunkt zum Kreismittelpunkt, die sich mittels Hesse'scher Normalenform bestimmen lässt.

Ein Sonderfall ist die Tangentialebene, die eine Kugel nicht schneidet, sondern nur in einem Punkt T(Ortsvektor $\vec{t}$) berührt. Für sie gilt die Gleichung:

$$(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{t}) = r^2$$

Überprüfe, ob sich die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13$ und die Kugel K mit dem Mittelpunkt M(2 | -1 | 2) und einem Radius von 4 schneiden. Wenn ja, bestimme auch den Schnittkreis.

Um zu bestimmen, ob die Ebene die Kugel schneidet, müssen wir den Abstand der Ebene zum Kugelmittelpunkt feststellen. Wie du bereits in Kapitel B09 gelernt hast, wendet man für die Abstandsbestimmung von Punkt zu Ebene die Hesse'sche Normalenform an. Für eine Ebenengleichung der Form $a_1 x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ und einen Mittelpunkt $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ gilt daher bekanntermaßen:

zum Video

$$d = \left| \frac{a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 13}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-9}{\sqrt{9}} \right| = 3$$

Da der Abstand geringer ist als der Radius der Kugel, kann man schließen, dass die Ebene durch die Kugel verläuft und sich somit auch ein Schnittkreis ergibt.
Wir haben bereits den Abstand d bestimmt und kennen auch den Radius der Kugel, daher können wir nun den Radius des Schnittkreises mit der Formel aus der Beschreibung bestimmen:

$$r_s = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Fußpunkt des Lots vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene. Die Lotgerade lautet

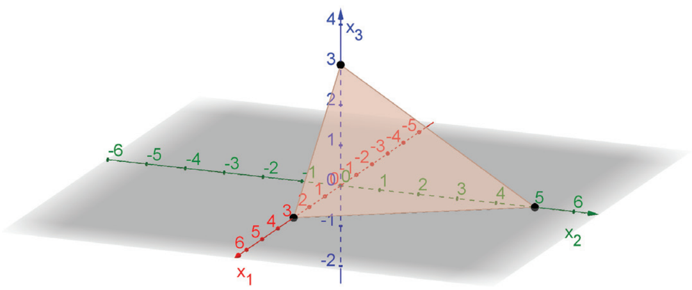
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

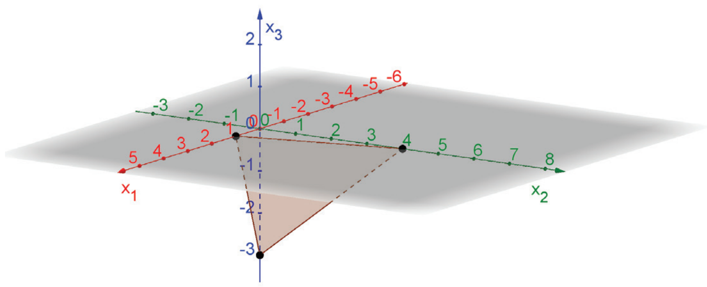
Mit diesen Schritten, lassen sich die Ebenen leicht einzeichnen. Den Schnittpunkt von Ebene und Koordinatenachse nennt man teilweise auch ‚Durchstoßpunkt‘, da die Ebene ja gewissermaßen von einer Koordinatenachse durchstoßen wird.

Übungen

1.

Bestimme jeweils eine Koordinatengleichung der Ebenen.





2.

Von einer Ebene sind folgende Spurpunkte mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ bekannt.

Bestimme die zugehörige Koordinatengleichung der Spurgeraden.

3.

Welche Ebene verbirgt sich hinter folgenden Koordinatengleichungen? Beschreibe ihre Lage im Koordinatensystem, z.B. mit Hilfe einer Skizze.

a) $x_1 + 2x_3 = -3$
b) $x_2 = 1$
c) $x_1 - x_2 = 0$