Motivation

1

In diesem Kapitel ...

- Motivation und Vorstellung der Themenbereiche in der Vektorrechnung
- Verzahnung und Zusammenwirken der einzelnen Bereiche

Eine Matheklausur ist wie eine Schachtel Pralinen – man weiß nie, was drankommt. Deshalb möchte dieses Buch einen umfangreichen Überblick über die stark miteinander verknüpften Themengebiete der Vektorrechnung, Matrizen und linearen Gleichungssysteme liefern. Das Ziel ist, dass sich der Leser ein tiefgründiges Verständnis aneignen kann und dadurch nicht nur für die nächste Klausur bestens gewappnet ist, sondern auch über eine solide Basis in Sachen linearer Algebra und analytischer Geometrie verfügt.

Dabei verzichten wir auf eine trockene Darstellungsweise in Form von Definitionen, Sätzen und anschließenden Beweisen, sondern möchten der Mathematik Leben einhauchen, indem wir den Schwerpunkt auf die anwendungsorientierte Seite legen. Das bedeutet nicht, dass wir komplizierte Fragestellungen geschickt umschiffen. Stattdessen werden alle Themen in einer handfesten und anschaulichen Form präsentiert, die das Erlernen erleichtert.

Gestatten: Die Familie der Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssysteme

Die Vektorrechnung beschäftigt sich, wie der Name bereits verrät, mit **Vektoren** genannten mathematischen Objekten, die sich von gewöhnlichen Zahlen drastisch unterscheiden, sowohl was ihre Eigenschaften angeht als auch was den Umgang mit ihnen betrifft.

Der nächste große Teil des Buchs beschäftigt sich mit Matrizen. Im Prinzip handelt es sich bei einer **Matrix** um eine Weiterführung des Vektorbegriffs. Eine Matrix ist nichts anderes als ein rechteckiges Zahlenschema. Wenn Sie schon einmal Sudoku gespielt haben, haben Sie sich zumindest unbewusst bereits mit Matrizen beschäftigt. Mit Matrizen kann man rechnen, und sie lassen sich vielfältig auch in der Vektorrechnung einsetzen.

Danach sollen **Gleichungssysteme** behandelt werden. Dabei handelt es sich um eine Menge von Gleichungen mit mindestens zwei Unbekannten. Wir wollen Ihnen ausschließlich den Umgang mit **linearen Gleichungen** demonstrieren, in denen Unbekannte einzig und allein in der ersten Potenz vorkommen. Wie man ein solches System lösen kann, ist bereits Schulstoff. Doch das Ziel ist es, mittels Vektorrechnung und Matrizen diese Methoden zu verallgemeinern und zu verfeinern.

Die Vernetzung zwischen den Bereichen untereinander, wie sie in diesem Buch eine Rolle spielt, ist in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Die eingezeichneten Pfeile stellen mögliche Verbindungen dar. Wir haben uns dazu entschieden, die Gebiete in der zuvor genannten

Reihenfolge zu behandeln, da man die Vektorrechnung erlernen kann, ohne etwas über die anderen Themen zu wissen. Zwar können sowohl Matrizen als auch lineare Gleichungssysteme in der Vektorrechnung ihre Anwendung finden, sie sind jedoch nicht zwingend notwendig.

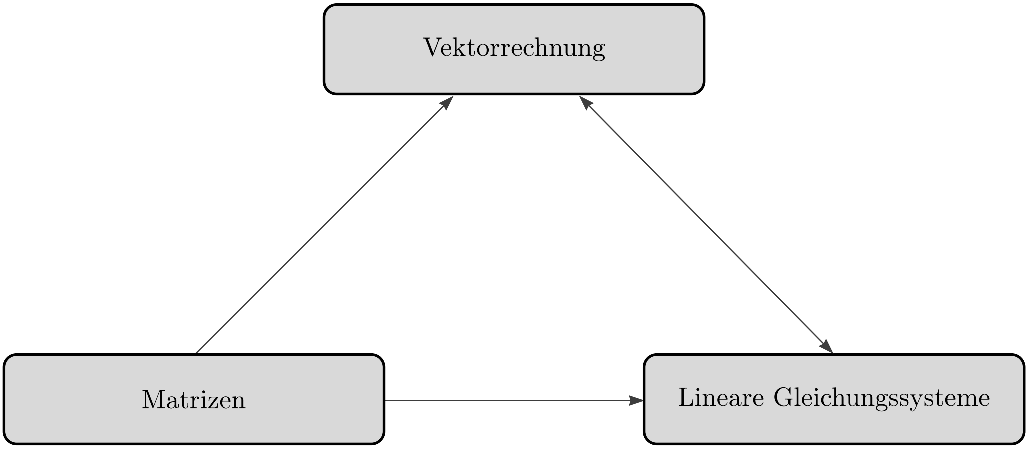

Abbildung 1.1: Die behandelten Gebiete und wie sie zusammenhängen

Die Vektor- und Matrixrechnung halten Einzug in lineare Gleichungssysteme. Wie gesagt, kann man letztere auch ohne solche Kenntnisse lösen, jedoch lassen sie sich mit derartigen Methoden systematisch angehen, was besonders für Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten vorteilhaft ist.

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen selbst können ihrerseits in Problemstellungen der anderen Disziplinen einfließen.

Vektoren in Theorie und Praxis

In der gymnasialen Oberstufe kommt man zum ersten Mal mit der analytischen Geometrie in Berührung. Hier führt man den Vektorbegriff sehr anschaulich ein als ein mathematisches Objekt, das man als Pfeil im Koordinatensystem darstellen kann. Ein solcher Pfeil zeigt in eine bestimmte Richtung und besitzt darüber hinaus eine Länge. Somit können Vektoren als Größen verstanden werden, die sowohl eine Richtung angeben als auch eine Länge haben. Vektoren sind also etwas komplett anderes als gewöhnliche Zahlen. Doch mit dem Vektorbegriff allein kann man noch nicht allzu viel anfangen. Man muss ja mit Vektoren auch rechnen können. Beispielsweise entspricht die Addition von Vektoren dem Aneinanderlegen von Pfeilen im Koordinatensystem.

Dieses Vorgehen, das von der Schule her bekannt ist, sucht in einer Mathematikvorlesung an der Universität seinesgleichen. Denn hier wird der Vektorbegriff viel allgemeiner behandelt, was jedoch auf Kosten der Anschaulichkeit geht. Es geht dann nicht mehr darum, dass man Pfeile in Koordinatensysteme zeichnet, sondern dass Vektoren als abstrakte Größen behandelt werden, für die bestimmte Grundregeln, sogenannte Axiome, gelten. Es ist jedoch so, dass in der Praxis oft die anschauliche Vorstellung von Vektoren ausreichend ist, wie man sie in der Schule kennengelernt hat.

In den Ingenieurwissenschaften lassen sich beispielsweise mit Hilfe von Vektoren Kräfte beschreiben, die innerhalb einer gegebenen Anordnung wirken, wie zum Beispiel einem Flaschenzug. Kräfte besitzen einen Angriffspunkt, zeigen in eine bestimmte Richtung und haben außerdem eine bestimmte Größe. Nicht umsonst stellt man sie in Skizzen als Pfeile dar. Das Ganze schreit förmlich nach dem Vektorbegriff.

Soll die Bahn eines elektrisch geladenen Teilchens in der Nähe eines Magneten beschrieben werden, so kann auch dies mit Vektoren erfolgen. Die Flugbahn ergibt sich aus der Kraft, die der Magnet auf das Teilchen ausübt. Man kann sowohl die Flugbahn als auch die Kraft mittels Vektoren beschreiben. Zum einen bewegt sich das Teilchen auf seiner Bahn in eine bestimmte Richtung, und legt eine Wegstrecke zurück. Zum anderen zeigen die Kraftlinien in eine Richtung, und die Kraft selbst besitzt zudem eine gewisse Stärke. Das sind Problemstellungen, die wie geschaffen sind für eine Anwendung der Vektorrechnung.

Matrizen in Schule, Studium und Beruf

Stellvertretend für ein rechtwinkliges Zahlenschema hat der Begriff der »Matrix« schon lange Einzug in die Mathematik gehalten. Leuten, die Sudoku spielen oder sich mit magischen Quadraten beschäftigen, sind solche Schemata durchaus bekannt. In der Mathematik umfasst man die Zahlen darüber hinaus mit einem Paar runder Klammern, wie beispielsweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Doch was bringen solche Anordnungen von Zahlen außer Spielerei? Das kann doch nicht alles sein! Das ist es auch nicht, denn mit Matrizen kann man unglaublich viel machen. Wie Zahlen und Vektoren lassen sich auch Matrizen addieren und multiplizieren, wobei die Rechenregeln nur unter bestimmten Voraussetzungen funktionieren. Wo auch immer sich Vektoren tummeln, sind Matrizen nicht weit. Im Prinzip sind Vektoren nichts anderes als eine spezielle Klasse von Matrizen. Beispielsweise kann eine Matrix unter bestimmten Voraussetzungen mit einem Vektor multipliziert werden, woraus dann ein neuer Vektor hervorgeht. Mit Hilfe von Matrizen können also Vektoren auf eine bestimmte Art und Weise geändert werden. Also kann eine Matrix so etwas wie ein **Operator** sein, der einen Vektor manipuliert, ihn beispielsweise dreht.

In einer Mathematikvorlesung werden Matrizen – ähnlich wie Vektoren – gewöhnlich als mathematische Objekte auf abstraktem Niveau eingeführt, für die bestimmte Grundregeln gelten. Auf eine solche Darstellung wird in diesem Buch verzichtet; stattdessen stehen praktische Anwendungen im Vordergrund.

Man begegnet Matrizen im Studium jedoch nicht nur in der Mathematikvorlesung, sondern auch in den angewandten Wissenschaften. Wichtig sind sie in der klassischen Mechanik, in der die Antwort ausgedehnter Körper oder elastischer Massen wie Gummi auf Kräfte durch charakteristische Matrizen beschrieben wird. Einfache Zahlen reichen dafür nicht aus, denn das Verhalten eines ausgedehnten Körpers auf eine Kraft hängt auch davon ab, wo die Kraft am Körper wirkt.

Darüber hinaus sind Matrizen überaus wichtig in der Atomphysik und spielen daher auch eine Rolle zur Beschreibung chemischer und biologischer Prozesse. Nach den quantenmechanischen Grundregeln befindet sich ein Atom oder ein Molekül in einem »Zustand«, der mathematisch als Vektor aufgefasst werden kann. Ein äußerer Einfluss wie die Einstrahlung von Licht ändert den Zustand des Atoms, was man mathematisch dadurch beschreibt, dass eine solche Änderung durch Multiplikation des Zustandsvektors mit einer Matrix erfolgt.

Wichtig sind Matrizen ebenso in den Wirtschaftswissenschaften, der Numerik sowie in allen anderen Bereichen, in denen Zahlen eine Rolle spielen. Daher wird man mit Matrizen höchstwahrscheinlich auch noch nach dem Studium in Berührung bleiben.

Wie Matrizen behandelt werden wollen und wie sie einem behilflich sind

Was haben geometrische Figuren mit Gleichungssystemen zu tun? Eigentlich alles, denn hinter jeder Gleichung steht im Prinzip eine Menge von Punkten, die in ihrer Gemeinsamkeit eine geometrische Form bilden. In der Ebene oder im dreidimensionalen Raum kann man eine solche Menge anschaulich darstellen. In höherdimensionalen Räumen geht die Anschauung leider verloren, was aber nichts an der erwähnten Tatsache ändert. Es gibt zwei Klassen von Gleichungen: lineare und nichtlineare.

Der Einfachheit halber soll sich die Betrachtung zunächst auf die Ebene beschränken. In diesem Zusammenhang spielen Gleichungen eine Rolle, die maximal zwei Unbekannte enthalten. Diese werden als x_1 und x_2 bezeichnet. Kommen in einer Gleichung Terme vor, in denen die Variablen miteinander oder untereinander multipliziert werden, dann handelt es sich um eine **nichtlineare Gleichung**. Beispielsweise sind die folgenden Gleichungen nichtlinear:

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 5\,,\ \ x_1 x_2 + x_2 = 0\,,\ \ x_1^{12} + x_2^{23} = 42\,.$$

Derartige Gleichungen stellen Formen in der Ebene dar, die durch krumme Linien gekennzeichnet sind: Kreise, Ellipsen, Parabeln usw.

Dagegen sind Gleichungen, bei denen die Variablen höchstens zur ersten Potenz und auch nicht miteinander multipliziert auftreten, **linear**:

$$x_1 + 7x_2 = 0\,, \qquad 2x_2 = 3\,.$$

Geometrisch sind solche linearen Gleichungen (in zwei Dimensionen) nichts anderes als Geraden. Das lässt sich bereits anhand des lateinischen Ausdrucks »linea« vermuten, was »Linie« bedeutet. Teile von Geraden kann man mit dem *Lineal* zeichnen – soweit also zur Begriffsbildung.

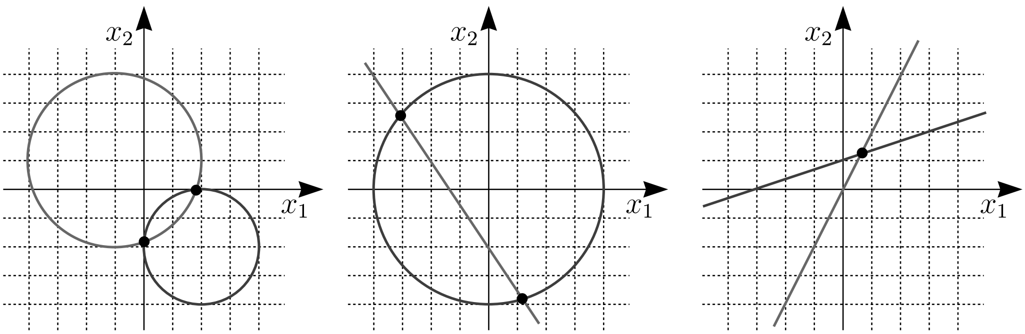

Abbildung 1.2: Geometrische Formen in der Ebene stehen für Gleichungen mit zwei Variablen

Das Interesse besteht oft nicht nur für einzelne Gleichungen, sondern für Mengen mehrerer Gleichungen, die man **Gleichungssysteme** nennt. Steckt hinter einer einzigen Gleichung eine geometrische Figur, so handelt es sich bei einem System von Gleichungen dementsprechend um mehrere Figuren. Die erste Skizze aus Abbildung 1.2 besteht aus zwei Kreisen und gehört zu folgendem nichtlinearen Gleichungssystem:

$$(x_1+1)^2+(x_2-1)^2=9 \qquad (1)$$

$$(x_1-2)^2+(x_2+2)^2=4 \qquad (2)$$

Die zweite Skizze mit dem Kreis und der Geraden ist eine graphische Darstellung des nächsten nichtlinearen Systems:

$$x_1^2+x_2^2=16 \qquad (1)$$

$$\frac{3}{2}x_1+x_2=-2 \qquad (2)$$

Zu guter Letzt veranschaulicht die dritte Skizze das nachfolgende lineare Gleichungssystem:

$$-x_1+3x_2=3 \qquad (1)$$

$$-2x_1+x_2=0 \qquad (2)$$

Nun besteht die Aufgabe darin, Gleichungssysteme zu lösen. Die Lösung setzt sich aus Punkten zusammen, die sowohl auf der einen als auch auf der anderen geometrischen Figur liegen. Es handelt sich dabei somit um Schnittpunkte der Figuren. Nichtlineare Gleichungen zu lösen kann mitunter überaus kompliziert und zum Teil nur numerisch möglich sein; daher wird in diesem Buch nur die Lösung linearer Gleichungssysteme behandelt.

Eine Anwendung von Matrizen liegt bei linearen Gleichungssystemen. Die Zahlen vor den Unbekannten – die **Koeffizienten** – lassen sich in eine Matrix packen. Für das letztere Gleichungssystem würde die entsprechende Matrix wie folgt lauten:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem lässt sich auf diese Weise systematischer schreiben. Wie das genau funktioniert, lernen Sie im Kapitel »Lösen von linearen Gleichungssystemen«. Die Untersuchungen der Eigenschaften von solchen Matrizen führen zu allgemeinen Aussagen über die Lösbarkeit des Gleichungssystems sowie über die Anzahl der Lösungen.