

1

Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse

Die Grundidee der Ähnlichkeitstheorie baut auf der Tatsache auf, dass sich jede physikalische Gleichung dimensionsbehafteter Einflussgrößen – unabhängig vom benutzten Maßsystem – als Beziehung zwischen einem Satz dimensionsloser Kennzahlen ausdrücken lässt. Die Bezeichnungen in diesem Kapitel weichen zum Teil von den sonst verwendeten ab, um die Darstellung durchsichtiger zu machen. Variable physikalische Größen werden mit Kursivbuchstaben wiedergegeben. Große Normalbuchstaben kennzeichnen die Dimensionen (Größenarten) der Grundgrößen, kleine werden für Maßeinheiten verwendet. m ist somit eine Masse, M die Dimension der Masse und m steht für Meter.

1.1 Grundprinzipien

Jede physikalische Größe lässt sich als das Vielfache $\{a\}$ einer Maßeinheit $[a]$ für diese Größe darstellen

$$a = \{a\} [a], \quad (1.1)$$

wobei $\{a\}$ eine reine Zahl ist, der Zahlenwert. Die Größen können Grundgrößen oder abgeleitete Größen sein. Grundgrößen werden ohne Bezug auf andere Größen festgelegt, etwa in Anlehnung an die Anschauung; ihre Einheiten, die Grundeinheiten, werden willkürlich definiert. Beispiele für oft gebrauchte Größen sind Länge l und Zeit t . Zugehörige Grundeinheiten $[l]$ bzw. $[t]$ sind etwa Zentimeter (cm), Meter (m), Kilometer (km), Fuß (ft), Zoll (in) bzw. Sekunde (s), Stunde (h), Jahr (a). Für manche Betrachtungen spielt nun der Betrag der Einheiten keine Rolle, wichtig ist nur die Kennzeichnung, dass l und t Grundgrößen sind. Man schreibt ihnen deshalb sogenannte Dimensionen L (Länge) und T (Zeit) zu, wobei die Einzelbuchstaben den Grundgrößencharakter wiedergeben. Bei Zahlenrechnungen muss in jedem Fall festgelegt werden, welche Einheit $[l]$ an die Stelle von L treten soll.

Abgeleitete Größen sind als Potenzprodukte von Grundgrößen definiert, wobei reine Zahlenfaktoren, negative und gebrochene Exponenten und Differenziale in

2 | 1 Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse

den Definitionsgleichungen zulässig sind. Die Definitionen können willkürlich sein oder sich an Naturgesetze anlehnen. Eine willkürliche (aber natürlich den praktischen Bedürfnissen angepasste) Definition ist die der Geschwindigkeit v gemäß

$$v = \frac{dl}{dt}. \quad (1.2)$$

Diese Definition legt auch in gewissem Rahmen die Einheiten $[v]$ fest. Mit Gl. 1.1, angewandt auf l , t und v , wird

$$v = \{v\} [v] = \frac{[l]}{[t]} \frac{d\{l\}}{d\{t\}}, \quad (1.3)$$

da $[l]$ und $[t]$ konstant sind und vor die Differenziale gezogen werden können. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\{v\} = \frac{1}{A} \frac{d\{l\}}{d\{t\}} \quad (1.4a)$$

und

$$[v] = A \frac{[l]}{[t]} \quad (1.4b)$$

gesetzt wird, wo A eine willkürliche reine Zahl ist. Wird A hier und bei entsprechenden Definitionsgleichungen für die Einheiten anderer abgeleiteten Größen gleich 1 gesetzt, so nennt man die Gesamtheit der Einheiten, das sog. Einheitensystem, kohärent. Das in den meisten Ländern gesetzlich vorgeschriebene Einheitensystem das „Système International d’Unités“ (abgekürzt SI-System) ist kohärent, weshalb auch Kohärenz im Folgenden vorausgesetzt werden soll.

Betrachtet man die Geschwindigkeit zum Beispiel, so ist allen Einheiten der Geschwindigkeit gemein, dass eine Längeneinheit auf eine Zeiteinheit bezogen wird. Daraus folgt für die Dimension der Geschwindigkeit das Potenzprodukt $L T^{-1}$.

Bei physikalischen Größen unterscheidet man zwischen Grundgrößen und abgeleiteten Größen. Grundsätzlich kann willkürlich festgelegt werden, welche Größen Grundeinheiten sein sollen, womit ein Maßsystem fixiert ist. Länge und Zeit bieten sich wegen ihrer Verbindung mit der Anschauung an – denkbar wäre aber auch die Wahl von l und u als Grundgrößen (Dimensionen L und V), womit t eine abgeleitete Größe würde (Dimension $L V^{-1}$). Dimensionen haben somit nicht den Charakter von Naturgesetzen, sondern sind definitionsabhängig. So sind lange Zeit die Größen Kraft F , die nach NEWTON gemäß

$$F = m \frac{d^2l}{dt^2} \quad (1.5)$$

zusammenhängen, alternativ als Grundgröße und die Masse m als abgeleitete Größe betrachtet worden, was zu unterschiedlichen Maß- und damit Einheitensystemen in Technik (Kraft als Grundgröße) und Physik (Masse als Grundgröße) führte. Seit 1978 ist durch Gesetz diese Zweigleisigkeit beendet, es wurde die Masse als Grundgröße festgelegt und die Kraft mit Gl. 1.5 als abgeleitete Größe definiert. Das Gesetz legt neben Länge l (Dimension L), Zeit t (T) und Masse m (M), auch die Temperatur ϑ (Θ), die Stoffmenge n (N), die Stromstärke i (I) und die Lichtstärke s (S) als Grundgrößen fest. Es definiert weiter die in diesem Maßsystem zu verwendenden Einheiten, die insgesamt das oben erwähnte SI-System bilden. Die Grundeinheiten des Systems sind das Meter (m), die Sekunde (s), das Kilogramm (kg), das Kelvin (K), das Mol (mol), das Ampere (A) und die Candela (cd).

Für die Verfahrenstechnik sind im Wesentlichen die mechanischen Grundgrößen Länge, Zeit und Masse, die thermodynamischen Temperatur und Stoffmenge sowie die daraus abgeleiteten Größen und das zugeordnete Einheitensystem wichtig. Stromstärke und Lichtstärke spielen in Spezialbereichen eine Rolle, etwa in der Elektrochemie und bei photochemischen Prozessen.

In einem Maßsystem können verschiedene Größen gleiche Dimensionen haben, das gilt in einem darauf aufbauenden Einheitensystem dann auch für die Einheiten. Reine Zahlen sind dimensionslos. Tabelle 1.1 zeigt für die Verfahrenstechnik wichtige Größen mit ihren Einheiten im SI-System und ihren Dimensionen.

Tabelle 1.1 Dimensionen und SI-Einheiten einiger für die Verfahrenstechnik wichtiger Größen.

| Größe | Dimension | Einheit |
|---------------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| Länge l , Durchmesser d | L | m (Meter) |
| Zeit t | T | s (Sekunde) |
| Masse m | M | kg (Kilogramm) |
| Temperatur ϑ , T | Θ | K (Kelvin) |
| Stoffmenge n | N | mol (Mol) |
| Geschwindigkeit u , v , w | $L T^{-1}$ | $m s^{-1}$ |
| Drehzahl n | T^{-1} | s^{-1} |
| Beschleunigung b , g | $L T^{-2}$ | $m s^{-2}$ |
| Kinem. Viskosität ν | $L^2 T^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |
| Diffusionskoeffizient D | $L^2 T^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |
| Kraft F | $L T^{-2} M$ | $m s^{-2} kg = N$ (Newton) |
| Energie U , E , H , G | $L^2 T^{-2} M$ | $m^2 s^{-2} kg = J$ (Joule) |
| Arbeit W , Wärme Q | $L^2 T^{-2} M$ | $m^2 s^{-2} kg = J$ (Joule) |
| Leistung P , \dot{W} | $L^2 T^{-3} M$ | $m^2 s^{-3} kg = W$ (Watt) |
| Druck p | $L^{-1} T^{-2} M$ | $m^{-1} s^{-2} kg = Pa$ (Pascal) |
| Impuls I | $L T^{-1} M$ | $m s^{-1} kg$ |
| Oberflächenspannung σ | $T^{-2} M$ | $s^{-2} kg$ |
| Dichte ρ | $L^{-3} M$ | $m^{-3} kg$ |
| Dynam. Viskosität η | $L^{-1} T^{-1} M$ | $m^{-1} s^{-1} kg$ |
| Wärmekapazität C | $L^2 T^{-2} M Q^{-1}$ | $J K^{-1}$ |
| Molare Wärmekapazität c | $L^2 T^{-2} M Q^{-1} N^{-1}$ | $J K^{-1} mol^{-1}$ |

Tabelle 1.1 (Fortsetzung)

| Größe | Dimension | Einheit |
|--|------------------------------|---------------------|
| Spezifische Wärme c_s | $L^2 T^{-2} Q^{-1}$ | $J kg^{-1} K^{-1}$ |
| Entropie S | $L^2 T^{-2} M Q^{-1}$ | $J K^{-1}$ |
| Wärmeleitfähigkeit λ | $L T^{-3} M Q^{-1}$ | $W m^{-1} K^{-1}$ |
| Temperaturleitfähigkeit a | $L^2 T^{-1}$ | $m^2 s^{-1}$ |
| Wärmeübergangskoeffizient α | $T^{-3} M Q^{-1}$ | $W m^{-2} K^{-1}$ |
| Stoffübergangskoeffizient β | $L T^{-1}$ | $m s^{-1}$ |
| Gaskonstante R | $L^2 T^{-2} M Q^{-1} N^{-1}$ | $J K^{-1} mol^{-1}$ |
| Thermischer Volumenausdehnungskoeffizient α_T | Q^{-1} | K^{-1} |

1.2

Physikalische Ähnlichkeit

Es ist bei den meisten für die Verfahrenstechnik grundlegenden physikalischen und physikochemischen Vorgängen möglich, die Differenzialgleichungen aufzustellen, die diese Vorgänge beschreiben. Zwar können bei technischen Prozessen wegen der komplexen Rand- und Anfangsbedingungen die Gleichungen nicht immer geschlossen gelöst werden. Sie führen also nicht direkt zu den gewünschten Beziehungen, jedoch ist das letztlich eine rechentechnische, nicht eine grundsätzliche Schwierigkeit.

Hier soll der Begriff der physikalischen Ähnlichkeit zweier Systeme 1 und 2 von ihren Differenzialgleichungen her definiert werden, was natürlich Gleichartigkeit der Systeme und der sie beschreibenden Gleichungen voraussetzt.

Physikalische Ähnlichkeit impliziert geometrische Ähnlichkeit. Sie ist gegeben, wenn sich alle korrespondierenden Strecken in beiden Systemen gleich verhalten: $l_1/l_2 = \text{const}$. Das ist erfüllt, wenn einander entsprechende Längen gleiche Vielfache von für die beiden Systeme jeweils charakteristischen Grundlängen sind, die natürlich korrespondieren müssen

$$l_1 = \{l\} L_1 \quad (1.6a)$$

$$l_2 = \{l\} L_2. \quad (1.6b)$$

Die Gln. 1.6 sind eine Abwandlung von Gl. 1.1 und bedeutet, dass jedes System eine individuelle Längeneinheit, die charakteristische Länge, besitzt, $\{l\}$ ist der für beide Systeme gleiche variable Zahlenwert, der im Folgenden jeweils mit einem Apostroph gekennzeichnet wird: $\{l\} = l'$.

Physikalische Ähnlichkeit verlangt darüber hinaus, dass auch für die anderen variablen Größen der Gln. 1.6 entsprechende Beziehungen gelten. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn sie für alle in Betracht kommenden Grundgrößen oder ein System abgeleiteter Größen gilt, aus dem sich die Grundgrößen errechnen lassen,

wie es oben für Zeit und Geschwindigkeit sowie für Masse und Kraft aufgezeigt wurde.

Zieht man in den Termen der Differenzialgleichungen die charakteristischen Größen sowie die ebenfalls in den jeweiligen Systemen als konstant angenommenen Stoffwerte vor die variablen Teile, so sind die beiden Gleichungen identisch, wenn die so entstehenden konstanten Koeffizienten identisch sind, dabei sind diese Konstanten aus in beiden Systemen unterschiedlichen Faktoren aufgebaut. Das sei hier für die Strömungslehre gezeigt.

Wie in Kapitel 4 abgeleitet wird, gilt für Strömungen von inkompressiblen, zähen Medien mit orts- und zeitunabhängigen kinematischen Viskositäten ν nach NAVIER-STOKES für die x -Achse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem im physikalischen System 1

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_1 = g \cos \alpha - \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_1. \quad (1.7)$$

Dabei sind u die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung, ρ die Dichte, p der Druck, g die Schwerebeschleunigung und α der Winkel zwischen x -Achse und Schwerkrafttrichtung. Entsprechende Gleichungen gelten für die anderen Koordinaten und das System 2.

Als charakteristische Größen werden neben einer Länge eine Geschwindigkeit und eine Kraft gewählt, womit die Grundgrößen Zeit und Masse indirekt fixiert sind. Außer Gl. 1.6 gelten somit

$$u_1 = V_1 u', \quad (1.8a)$$

$$u_2 = V_2 u' \quad (1.8b)$$

und

$$f_1 = F_1 f' \quad (1.9a)$$

$$f_2 = F_2 f', \quad (1.9b)$$

wobei u' und f' dimensionslos sind. Damit wird Gl. 1.7

$$\frac{V_1^2}{L_1} \frac{du'}{dt'} = g \cos \alpha - \frac{F_1}{\rho_1 L_1^3} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu_1 V_1}{L_1^2} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right)$$

oder

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{g L_1}{V_1^2} \cos \alpha - \frac{F_1}{\rho_1 V_1^2 L_1^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu_1}{L_1 V_1} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right) \quad (1.10a)$$

und entsprechend für System 2

6 | 1 Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{gL_2}{V_2^2} \cos \alpha - \frac{F_2}{\rho_2 V_2^2 L_2^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{v_2}{L_2 V_2} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right). \quad (1.10b)$$

Die Systeme sind somit ähnlich, wenn gilt

$$\frac{gL_1}{V_1^2} = \frac{gL_2}{V_2^2} = Z_1 \quad (1.11)$$

$$\frac{F_1}{\rho_1 L_1^2 V_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 L_2^2 V_2^2} = Z_2 \quad (1.12)$$

$$\frac{v_1}{V_1 L_1} = \frac{v_2}{V_2 L_2} = Z_3, \quad (1.13)$$

und wenn auch für die Rand- und Anfangsbedingungen die Beziehungen Gl. 1.6, 1.8 und 1.9 gelten. Natürlich lässt sich g auf beiden Seiten von Gl. 1.11 streichen, doch würde dann die Dimensionsfreiheit von Z_1 verlorengehen, die für Z_2 und Z_3 gilt. Statt mit einer Bezugskraft F nach Gl. 1.9 kann man auch mit einem Bezugsdruck p oder einer Bezugsdruckdifferenz Δp arbeiten, womit Gl. 1.12 zu

$$\frac{\Delta p_1}{\rho_1 V_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 V_2^2} = Z_4 \quad (1.14)$$

wird.

Genau die Beziehungen Gln. 1.11–1.14 erhält man auch aus den Gleichungen für die anderen Geschwindigkeitskomponenten.

Wie man sich anhand der Tabelle 1.1 überzeugen kann, sind die Kennzahlen Z_1 bis Z_4 dimensionsfrei. Bei *Gleichheit der Kennzahlen* sind somit die beiden Differenzialgleichungen Gl. 1.10 identisch, was dann bei ähnlichen, d. h. nach Gl. 1.6, 1.8 und 1.9 bzw. daraus hergeleiteten Beziehungen für andere Größen übertragenen Rand- und Anfangsbedingungen auch für ihre Lösungen gilt.

Da es nur eine beschränkte Zahl von für die Verfahrenstechnik wichtigen Differenzialgleichungen gibt, die andererseits fast alle wesentlichen Prozesse beschreiben, gilt dasselbe für die Kennzahlen.

In Tabelle 1.2 sind die für die mechanische und thermische Verfahrenstechnik meistverwendeten Kennzahlen zusammengestellt; sie werden durchweg nach Forschern benannt und durch die Anfangsbuchstaben von deren Namen bezeichnet. Ein Teil der Kennzahlen lässt sich anschaulich deuten, so sind Eu , Fr und Re , die ja mit Z_4 , Z_1^{-1} und Z_3^{-1} nach Gl. 1.14, 1.11 und 1.13 identisch sind, Verhältnisse von Beschleunigungen bzw. nach Erweiterung mit den Dichten von auf das Volumen bezogenen Kräften. Für die Technische Reaktionsführung wichtige Kennzahlen sind in Abschnitt 7.2.3 zusammengestellt.

Tabelle 1.2 Die wichtigsten Kennzahlen der physikalischen Verfahrenstechnik mit den Größenbezeichnungen der Tabelle 1.1.

| Bezeichnung nach | Abkürzung | Aufbau |
|------------------|-----------|--|
| Euler | Eu | $\frac{p}{\rho v^2}, \frac{\Delta p}{\rho v^2}$ |
| Newton | Ne | $\frac{f}{\rho v^2 l^2}, \frac{P}{\rho n^3 d^5}$ |
| Froude | Fr | $\frac{v^2}{lg}, \frac{n^2 d}{g}$ |
| Reynolds | Re | $\frac{v l}{\nu}, \frac{\rho n d^2}{\eta}$ |
| Grashof | Gr | $\frac{l^3 \alpha_T g \Delta \vartheta}{\nu^2}$ |
| Nußelt | Nu | $\frac{\alpha l}{\lambda}$ |
| Peclet | Pe | $\frac{v l}{a}$ |
| Prandtl | Pr | $\frac{\nu}{a}$ |
| Sherwood | Sh | $\frac{\beta c l}{D}$ |
| Schmidt | Sc | $\frac{\nu}{D}$ |
| Weber | We | $\frac{\rho v^2 l}{\sigma}$ |
| Archimedes | Ar | $\frac{l^3 \rho g \Delta \rho}{\eta^2}$ |

1.3 Modelltheorie

Um kostspielige Untersuchungen an Apparaten und Anlageteilen von Originalgröße zu vermeiden oder zumindest zu reduzieren, sucht man Experimente an Modellen auszuführen und die Ergebnisse auf die Großanlage zu übertragen. Diese Übertragung erfordert ein der Großausführung physikalisch ähnliches Modell. Voraussetzung dafür ist geometrische Ähnlichkeit, bei Strömungsvorgängen das Erfülltsein der Bedingungen vom Typ der Gl. 1.11–1.14 und Ähnlichkeit der Anfangs- und Randbedingungen. Mit anderen Worten: Die Gleichheit der

8 | 1 Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse

bestimmenden Kennzahlen in Modell- und Hauptausführung. Das sei für die Bestimmung der Leistungsaufnahme eines Rührers ausgeführt.

Die Leistung \dot{W} ist proportional zu einer charakteristische Kraft F und einer charakteristischen Geschwindigkeit V

$$\dot{W}_1 \sim F_1 V_1, \quad (1.15a)$$

$$\dot{W}_2 \sim F_2 V_2. \quad (1.15b)$$

Damit lässt sich Gl. 1.12 zu

$$\dot{W}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \dot{W}_1 \quad (1.16a)$$

umformen. Die Übertragung von Längen vom Modell (Index 1) auf die Großausführung (Index 2) erfolgt nach Gl. 1.6 gemäß $l_2 = \frac{L_2}{L_1} l_1$, worin L_2/L_1 das Größenverhältnis beider Ausführungen festlegt. Für Geschwindigkeiten gilt der Übertragungsfaktor V_2/V_1 . Aus Gl. 1.11 folgt dafür

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{1/2}, \quad (1.17a)$$

aus Gl. 1.13 folgt

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{v_2}{v_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (1.17b)$$

und aus beiden Beziehungen

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{3/2}. \quad (1.17c)$$

Von den Gln. 1.17 müssen zwei erfüllt sein.

Für die Übertragung der Rührerleistung folgt aus Gl. 1.16a mit Gl. 1.17a

$$\dot{W}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{1/2} \dot{W}_1. \quad (1.16b)$$

Gemessen bzw. eingestellt werden im Allgemeinen die Drehfrequenzen n der Rührer (Zahl der Umläufe in der Zeiteinheit, Dimension T^{-1}), wobei gilt

$$V_1 \sim L_1 n_1, \quad (1.18a)$$

$$V_2 \sim L_2 n_2. \quad (1.18b)$$

Damit wird $V_2/V_1 = L_2 n_2 / L_1 n_1$, was Gl. 1.17a und 1.17b zu

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/2} \quad (1.17d)$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \quad (1.17e)$$

und Gl. 1.16a zu

$$\dot{W}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^5 \dot{W}_1 \quad (1.16c)$$

werden lässt; Gl. 1.17c und 1.16b bleiben unverändert.

Beispiel

Übertragung der Rührerleistung von einem Modell im Maßstab 1:5 ($L_1/L_2 = 0,2$)

Gleichung 1.17d verlangt im Modell eine um den Faktor $(L_2/L_1)^{1/2} = 5^{1/2} = 2,24$ größere Drehfrequenz, als sie für die Hauptausführung vorgesehen ist. Die kinematische Viskosität der Modellflüssigkeit ergibt sich aus der Hauptausführung mit dem Faktor $(L_1/L_2)^{3/2} = 0,2^{3/2} = 0,089$. Die an diesem Modell gemessene Leistung wird dann nach Gl. 1.16b, wenn gleiche Dichten der Flüssigkeiten zugrunde gelegt werden, mit dem Faktor 280 auf die Hauptausführung transformiert.

In der Praxis ist Forderung 1.17c, wie das Beispiel zeigt, im Allgemeinen schwer zu erfüllen. Insbesondere zeigt sie die Unmöglichkeit, Modellversuche mit der gleichen Flüssigkeit durchzuführen, die in der Großausführung eingesetzt werden soll. Ähnliche Schwierigkeiten können auch bei Übertragungen von Modellversuchen in anderen Bereichen der Verfahrenstechnik auftreten.

Vielfach hilft in solchen Fällen eine Analyse der Ansatzgleichungen weiter. Die Zahl der Gleichungen vom Typ Gl. 1.11–1.14, welche die Freiheit der Übertragung einschränken, hängt von der Zahl der Terme in der zugrunde liegenden Differentialgleichung ab. Ist es näherungsweise möglich, für ein Problem auf einen Term oder sogar mehrere dieser Terme zu verzichten, so sinkt die Zahl der einschränkenden Bedingungen, und die Modellübertragung wird erleichtert. Man spricht dann von partieller Ähnlichkeit.

Im Fall der Leistungsaufnahme bei gleichartigen Strömungsverhältnissen kann auf die Gleichheit von Fr in beiden Ausführungen verzichtet werden, wenn Schwerkraften beim Rührvorgang keine Rolle spielen; Fr ist nämlich ein Maß für das Verhältnis von Trägheits- zu Schwerkraften; wenn letztere überwiegen, wird Fr sehr klein. Damit entfallen die Bedingungen Gl. 1.17a bzw. 1.17d und 1.17c, es

10 | 1 Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse

verbleiben Gl. 1.17b bzw. 1.17e. Nun kann ein Modellversuch mit der gleichen Flüssigkeit durchgeführt werden, die für die Großausführung vorgesehen ist. Mit $v_1 = v_2$ und $r_1 = r_2$ wird

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \quad (1.17f)$$

und die Übertragung erfolgt nach

$$\dot{W}_2 = \frac{L_1}{L_2} \dot{W}_1. \quad (1.16d)$$

Beispiel

Übertragung der Rührerleistung von einem Modell im Maßstab 1:5 bei partieller Ähnlichkeit

Es wird bei Verzicht auf Gleichheit der *Fr*-Zahl die gleiche Flüssigkeit im Modell und in der Großausführung verwendet.

Im Modell muss mit um den Faktor $5^2 = 25$ höheren Drehfrequenzen gearbeitet werden, als sie für die Hauptausführung vorgesehen sind (Gl. 1.17f). Ein Fünftel der so gewonnenen Leistungsaufnahme wird dann nach Gl. 1.16d in der Großausführung benötigt.

Übrigens lassen sich die gleichen Beziehungen auch verwenden, um für einen vorgegebenen Rührbehälter, für den die Leistungsaufnahme \dot{W}_1 bei der Füllung mit Flüssigkeit 1 bekannt ist, \dot{W}_2 für eine Flüssigkeit 2 zu berechnen. Mit $L_1/L_2 = 1$ wird aus Gl. 1.17e

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad (1.17g)$$

und aus Gl. 1.16b

$$\dot{W}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 \dot{W}_1. \quad (1.16e)$$

Eine solche teilweise Ähnlichkeit bringt natürlich die Gefahr von Übertragungsfehlern mit sich. Es muss in jedem Einzelfall sorgfältig abgeschätzt werden, welche Fehler zu erwarten sind bzw. unter welchen Bedingungen die partielle Ähnlichkeit ausreicht. Bei der Flüssigkeitsrührung etwa hat sich gezeigt, dass beim Rühren ohne Trombe, wie es bei geringen Rührgeschwindigkeiten oder beim Vorhandensein von Widerstandsblechen (sog. Schikanen) realisiert ist, die Übertragungsbedingungen Gl. 1.16d und 1.17d (bei gleicher Flüssigkeit in beiden Ausführungen) ausreichen.

1.4

Möglichkeiten der Kennzahlbestimmung

Die vollständige Integration eines Differenzialgleichungssystems vom Typ Gl. 1.7 liefert die abhängigen Variablen als Funktionen von Raum und Zeit. Geht man dabei von der Form Gl. 1.10 aus, so bleiben die dimensionslosen Kennzahlen als Konstanten von allen Integrationsoperationen unberührt, sie sind Systemparameter, die in die Endformeln eingehen. Sie enthalten dabei schon einen großen Teil des physikalischen Gehalts der Endformeln, da nur in ihnen physikalische Größen enthalten sind; die Integration liefert die Verknüpfung dieser Kennzahlen Z_i

$$F(Z_1, Z_2, \dots) = 0. \quad (1.19)$$

Diese Beziehung kann natürlich auch experimentell ermittelt werden.

Gleichung 1.19 sagt aus, dass (innerhalb bestimmter Grenzen) eine Kennzahl durch die anderen bestimmt ist und dass zur Lösung eines Problems nicht mehr die Funktion zwischen allen bestimmenden Größen, sondern nur noch die zwischen den an Zahl geringeren Kennzahlen des Problems, die alle diese Größen enthalten, zu ermitteln ist. Ein Vorteil ist dabei, dass bei experimenteller Bestimmung von Gl. 1.19 die Kennzahlen durch besonders geeignete Größen variiert werden können.

Die oben für Strömungsvorgänge abgeleiteten Kennzahlen Gl. 1.11–1.14 finden sich in äquivalenter Form in Tabelle 1.2

$$Z_1 = 1/Fr, \quad Z_2 = Ne, \quad Z_3 = 1/Re, \quad Z_4 = Eu.$$

Für Strömungsvorgänge folgt somit unter Verwendung der konventionellen Kennzahlen von Tabelle 1.2 aus Gl. 1.19

$$Ne = f(Re, Fr) \quad (1.20)$$

bzw.

$$Eu = g(Re, Fr) \quad (1.21)$$

Wie in Tabelle 1.2 sollen die charakteristischen Größen im Folgenden durch die allgemeinen Größenbezeichnungen gekennzeichnet werden.

Man erkennt, dass die Kennzahl Re den Einfluss von v , l und ν auf die Vorgänge derart kombiniert, dass ohne Änderung von ν und l etwa in einer experimentellen Anordnung nur durch Variation von v der Parameter Re geändert werden kann. Damit ist der Einfluss möglicher Änderungen von ν und l mit erfasst, sofern Re im untersuchten Bereich bleibt.

Der Umfang, in dem die Variablen reduziert werden, wenn man von den für ein Problem wichtigen physikalischen Größen zu den dimensionslosen Kennzahlen übergeht, wird durch das π -Theorem von BUCKINGHAM gegeben. Danach lässt sich

die funktionelle Verknüpfung zwischen n physikalischen Größen, die sich aus insgesamt m Grunddimensionen aufbauen, durch eine Funktion zwischen $n - m$ Kennzahlen wiedergeben. Für den Leistungsbedarf P eines Rührers sind z. B. die 6 Größen g , d , n , P , ρ und η mit den 3 Grunddimensionen L, T und M wichtig. Nach dem π -Theorem wird der Vorgang durch eine Verknüpfung zwischen $6 - 3 = 3$ Kennzahlen beschrieben. Falls die Schwerebeschleunigung keine Rolle spielt (Rühren ohne Trombe), wird $n = 5$, m bleibt 3, und die Zahl der Kennzahlen sinkt auf $5 - 3 = 2$.

Die Kennzahlen eines Systems können auch ohne die Differenzialgleichungen ermittelt werden. Dabei geht man von folgender Überlegung aus: Ein verfahrenstechnischer Vorgang kann allgemein durch eine Funktion der problembestimmenden physikalischen Größen (den Einflussgrößen) beschrieben werden. Die Einflussgrößen sind dimensionsbehaftet; ihre Dimensionen setzen sich aus den Grunddimensionen Länge L, Masse M, Zeit T und Temperatur Θ zusammen. Aus der Tatsache, dass sich jede physikalische Funktion auch in einer vom gewählten Maßsystem unabhängigen Form darstellen lassen muss, folgt die Problembeschreibung in dimensionslosen Kennzahlen, die sich als Potenzprodukte der dimensionsbehafteten Einflussgrößen ergeben. Die Anzahl der möglichen Kennzahlen erhält man, wie erwähnt, nach dem π -Theorem von BUCKINGHAM. Für sie wird angesetzt

$$Z_i = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_i^{\alpha_i} \dots b_n^{\alpha_n} \quad (1.22)$$

Bringt man nun die Dimensionen für die b_i -Größen der rechten Seite von Gl. 1.22 ein, erhält man m Gleichungen für die n Unbekannten α_i , da die Summe der Exponenten jeder Grundgrößendimension verschwinden muss – die linke Seite von Gl. 1.22 ist ja dimensionslos. In der Regel ist $n > m$, sodass die α_i -Werte nicht explizit bestimmbar sind. Man erhält $n - m = r$ Freiheitsgrade für das Gleichungssystem, d. h. es sind r α_i -Werte frei wählbar, von denen die übrigen abhängig sind.

Beispiel

Direkte Ermittlung der Kennzahlen für den Leistungsbedarf eines Rührers

Der Einflussgrößensatz (die sog. Relevanzliste) lautet hier

$$P = f(g, d, n, \rho, \eta)$$

Für eine Kennzahl Z_j gilt dann

$$Z_i = P^{\alpha_1} g^{\alpha_2} d^{\alpha_3} n^{\alpha_4} \rho^{\alpha_5} \eta^{\alpha_6} \quad (1.23a)$$

Da Z_j dimensionslos ist, ergibt sich die Dimensionsgleichung

$$(L^2 M T^{-3})^{\alpha_1} (L T^{-2})^{\alpha_2} (L)^{\alpha_3} (T^{-1})^{\alpha_4} (M L^{-3})^{\alpha_5} (M L^{-1} T^{-1})^{\alpha_6} = 1 \quad (1.23b)$$

oder umgeordnet

$$L^{2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_5 - \alpha_6} M^{\alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6} T^{-3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6} = 1. \quad (1.24)$$

Da die Exponentensummen für L, M und T verschwinden müssen, folgt aus Gl. 1.24 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_5 - \alpha_6 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 0 \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 &= 0 \end{aligned}$$

Für die 6 unbekanntem α_i -Werte stehen nur 3 Bestimmungsgleichungen zur Verfügung. Es ergeben sich 3 Freiheitsgrade. Man kann demnach nur drei α_i -Werte abhängig von den übrigen ermitteln. Wenn man fordert

$$\alpha_3, \alpha_4 \text{ und } \alpha_5 = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6),$$

folgt

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_6 \\ \Rightarrow \alpha_5 &= -\alpha_1 - \alpha_6 \\ \alpha_3 &= -5\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_6 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in Gl. 1.23a findet man

$$Z_i = \left(\frac{P}{\rho n^3 d^5}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{g}{n^2 d}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\eta}{\rho n d^2}\right)^{\alpha_6}$$

Die Klammerterme sind dimensionslos und können als Kennzahlen betrachtet werden. Will man die Kennzahlen jedoch in bestimmter äußerer Form erhalten (z. B. in der in Tabelle 1.2 definierten Form), müssen die Exponenten entsprechend gewählt werden. Gemäß der 3 Freiheitsgrade hat man 3 Wahlnotwendigkeiten. Wählt man

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \alpha_6 = 0 \quad \text{ergibt sich } Z_1 \rightarrow Ne = \frac{P}{\rho n^3 d^5} \quad (1.25a)$$

$$\alpha_6 = -1; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{ergibt sich } Z_2 \rightarrow Re = \frac{\rho n d^2}{\eta} \quad (1.25b)$$

$$\alpha_2 = -1; \quad \alpha_1 = \alpha_6 = 0 \quad \text{ergibt sich } Z_3 \rightarrow Fr = \frac{n^2 d}{g} \quad (1.25c)$$

Die gewonnenen Kennzahlen sind somit identisch mit den aus den Differenzialgleichungen gewonnenen Gl. 1.11–1.13. Die Leistungsaufnahme eines Rührers lässt sich somit darstellen durch

$$Ne = f(Re, Fr), \quad (1.26)$$

wobei die Funktion f für die gewünschten Bereiche von Fr und Re experimentell zu ermitteln ist.

Grundsätzlich ist nur die Zahl der Kennzahlen eines Systems durch die Ausgangsgrößen festgelegt. Die Identität der Kennzahlen im vorstehenden Beispiel mit den früher abgeleiteten Zahlen ist an die getroffene Fixierung von Leit- und Bezugsgrößen gebunden. Wählt man andere Bezugsgrößen, etwa g , P und ν , so erhält man auch anders aufgebaute Kennzahlen. Die physikalische Aussage bleibt die gleiche. Für die Modellübertragung kann es gelegentlich von Vorteil sein, von der gebräuchlichen Kennzahlenform (nach Tabelle 1.2) abzuweichen. Allerdings lassen sich die in der Tabelle zusammengestellten Kennzahlen, zumeist anschaulich deuten. So stellt beispielsweise die REYNOLDS-Zahl das Verhältnis von Trägheitskraft zur Reibungskraft, bzw. die FROUDE-Zahl, wie oben erwähnt, das Verhältnis von Trägheitskraft zur Schwerkraft dar. Falls für ein Problem verschiedene gleichartige Größen wichtig sind, z. B. zwei Viskositäten in einem Zwei-Phasen-System oder verschiedene Längen bei Aufgabe der geometrischen Ähnlichkeit, werden sie jeweils auf eine von ihnen bezogen (ν_2/ν_1 , l_2/l_1 , l_3/l_1 , usf.), was zu weiteren Kennzahlen des Systems führt.

Die zuletzt genannte Methode der Kennzahlenbestimmung wird auch als *Dimensionsanalyse* bezeichnet. Die Schwierigkeit liegt bei ihr darin, den vollständigen Satz von Einflussgrößen zu finden, der für das vorliegende Problem relevant ist (die Relevanzliste). Der Reiz dieses Verfahrens liegt aber darin, dass man, wie gezeigt, das Aufstellen von Differenzialgleichungen zur Kennzahlbestimmung umgehen kann. Allerdings muss hier die funktionale Verknüpfung zwischen den Kennzahlen immer experimentell gefunden werden, während dies im anderen Fall dann entbehrlich ist, wenn die Differenzialgleichungen integrierbar sind.

Aufgaben

1.1

Können Modellversuche bei Systemen übertragen werden, bei denen neben den Kennzahlen Eu , Fr und Re der Strömungslehre auch die WEBER'sche Zahl We (Tabelle 1.2) eine Rolle spielt?

1.2

Was sagt die Dimensionsanalyse über das Gesetz aus, das die Größen p (Druck), V (Volumen), R (Gaskonstante), ϑ (Temperatur) und n (Stoffmenge) bei einem idealen Gas miteinander verknüpft (ideales Gasgesetz)?

1.3

Es soll ein Staubabscheider konzipiert werden. Zur Ermittlung der Auslegungsdaten ist eine Modellapparatur hergestellt worden, die um den Faktor 20 kleiner ist als die Hauptausführung. Das Trägerfluid in der Hauptausführung besitzt eine kin. Viskosität von $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; der Staub eine Korngröße von $d_H = 0,5 \text{ mm}$. Welche kin. Viskosität muss das Modellfluid und welche Korngröße der Modellstaub haben? Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit u_H in der Hauptausführung zu wählen, wenn sich im Modellversuch der Geschwindigkeitswert von $u_M = 2,5 \text{ m/s}$ als optimal erwiesen hat?

1.4

Die Tropfengröße d beim Zerstäuben von Flüssigkeiten hängt von einer Reihe von Einflussgrößen ab. Welche Einflussgrößen sind dies und welche Kennzahlen können daraus aus einer Dimensionsanalyse entwickelt werden?

