Florian Timmermann, Steffen Köhn, Neele Elbersgerd

Intensivkurs Mathematik

Abitur 2019 Brandenburg

Originale Prüfungsaufgaben

Stoffübersichten

Anschauliche Lösungen

GiRA Nachhilfeinstitut

Intensivkurs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Arbeiten mit dem Buch

Liebe Schüler/innen,

Bald steht Ihr Abitur an. Hier finden Sie ein Beispiel, das Ihnen hilft, mit diesem Prüfungsvorbereitungsbuch zu arbeiten.

1 Ermitteln Sie mit Hilfe der Checkliste ab Seite 9 Ihre persönlichen Lernziele.

“*Ich möchte Stammfunktionen bestimmen können.*“

2 Im Abschnitt "Lernhilfen" finden Sie die wesentlichen Informationen kurz und bündig zusammengefasst.

„STAMMFUNKTION“

Dort finden Sie das Grundwissen ("Basics"), Erklärungen und wertvolle Tipps für die Abiturprüfung ("Good to know").

3 Sie können sich später entschließen eine Prüfungsaufgabe zu bearbeiten, um Ihre Fertigkeiten zu trainieren.
Angenommen, Sie finden folgende Aufgabe:

a) 5 BE. Geben Sie je eine reelle Zahl für die Parameter a, b, und c an, sodass die Funktionen F_a, G_b und H_c Stammfunktionen der Funktionen f, g, und h sind. 31

$f : f(x) = 2x^3 + 4x - 1$ $\qquad F_a : F_a(x) = 0{,}5x^4 + ax^2 - x + 3$

$g : g(x) = \sqrt{x-4}$ $\qquad G_b : G_b(x) = \frac{2}{b}(x-4)^{\frac{3}{2}}$

$h : h(x) = 4e^{-2x+1} + e$ $\qquad H_c : H_c(x) = c \cdot e^{-2x+1} - e$

Am Rand sehen Sie, dass Sie zur Bearbeitung dieser Abituraufgabe Basiswissen auf Seite 31 finden. Falls Sie die Aufgabe nicht lösen können, hilft Ihnen diese Lernhilfe eventuell weiter.

4 Bedenken Sie, dass es beim Bearbeiten einer Aufgabe nicht darauf ankommt, das richtige Ergebnis zu haben. Wenn Sie in den Lösungen nachsehen und feststellen, dass Sie einen Fehler gemacht haben, dann nutzen Sie diese Gelegenheit, um Ihr Wissen zu festigen. Stellen Sie sich die Frage *„Warum ist dieser Lösungsweg richtig?“*. Die ausführlichen Lösungen können Ihnen dabei helfen, die einzelnen Schritte besser nachzuvollziehen. Nehmen Sie sich dafür ruhig etwas Zeit. Sobald Sie sich oder anderen die Lösungen erklären können, haben Sie einen positiven Lerneffekt bewirkt! Dabei können Sie Folgendes beachten:

Graue Texte und Kästen stellen Ideen, Hinweise oder Beschreibungen dar und sollen Ihnen helfen, die Lösung besser nachvollziehen zu können.

a, b, c bestimmen

a) Geben Sie je eine reelle Zahl für die Parameter a, b und c an, sodass die Funktionen F_a, G_b und H_c Stammfunktionen der Funktionen f, g und h sind.

$$f(x) = 2x^3 + \boxed{4}\,x - 1 \qquad F_a(x) = 0{,}5x^4 + ax^2 - x + 3$$

ableiten

$$F'_a(x) = 2x^3 + \boxed{2a}\,x - 1$$

Koeffizienten vergleichen: $4 = 2a \Rightarrow a = 2$

Schwarze Texte hingegen sind ein Teil der schriftlichen Lösung.

5 Sie können auch vollständige Prüfungen bearbeiten oder simulieren. Vor jeder Prüfung finden Sie eine Seite, auf der beschrieben ist, wie viel Zeit Sie für die Aufgaben in etwa einplanen sollten. Dabei sollten Sie jedoch zwei Umgebungen beachten:

1. **Lernumgebung:** Sie wollen anhand der Abitur-Aufgaben Ihre Fähigkeiten trainieren, kontrollieren, was Sie schon können oder den Stoff mit Hilfe von Beispielaufgaben erarbeiten? Dann machen Sie sich auf gar keinen Fall zeitlichen Druck! Nutzen Sie die Querverweise auf den Theorieteil, schreiben Sie sich Notizen auf und probieren Sie unterschiedliche Lösungen aus.

2. **Leistungsumgebung:** Sie fühlen sich fit für's Abi oder wollen Ihren eigenen Leistungsstand überprüfen? Legen Sie sich alle benötigten Hilfsmittel zurecht, versorgen Sie sich mit genügend Getränken und etwas zum Essen und bearbeiten Sie 270 Minuten lang eine Abituraufgabe. Lesen Sie sich die Bedingungen für die einzelnen Aufgaben gut durch und bearbeiten Sie hilfsmittelfreie Aufgaben auch wirklich ohne Hilfsmittel.

Intensivkurs Mathematik und das **Nachhilfeinstitut GiRA** wünschen Ihnen viele Erfolgserlebnisse beim Lernen und ein souveränes Abitur!

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

Die Abitur-Prüfung 2019 wird einen anderen Aufbau als das Abitur 2018 besitzen.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Bewertungseinheiten</td></tr>
<tr><td></td><td>Teil 1</td><td>1 von 1</td><td>1. Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil</td><td>30 BE</td></tr>
<tr><td rowspan="6">mit Hilfsmitteln</td><td rowspan="2">Teil 2</td><td rowspan="2">1 von 2</td><td>2.1 Analysis</td><td>40 BE</td></tr>
<tr><td>2.2 Analysis</td><td>40 BE</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Teil 3</td><td rowspan="2">1 von 2</td><td>3.1 Analytische Geometrie</td><td>25 BE</td></tr>
<tr><td>3.2 Analytische Geometrie</td><td>25 BE</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Teil 4</td><td rowspan="2">1 von 2</td><td>4.1 Stochastik</td><td>25 BE</td></tr>
<tr><td>4.2 Stochastik</td><td>25 BE</td></tr>
</table>

Zugelassene Hilfsmittel	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
für Teil 2-4:	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
für Teil 2-4:	Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über die Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	300 Minuten inklusive Lese- und Auswahlzeit
	Teil 1: höchstens 70 Minuten (frühere Abgabe möglich)
	Teil 2-4: 230 Minuten
Hilfsmittelfreier Teil:	Keine Auswahl möglich. Bei früherer Abgabe (vor Ablauf der 70 Minuten) kann mit der Bearbeitung der weiteren Aufgaben begonnen werden, jedoch ohne Zuhilfenahme der Hilfsmittel. Erst nach Ablauf der 70 Minuten dürfen die dann zugelassenen Hilfsmittel verwendet werden.
Analysis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 **oder** 2.2 zur Bearbeitung aus.
Analytische Geometrie:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 **oder** 3.2 zur Bearbeitung aus.
Stochastik:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 **oder** 4.2 zur Bearbeitung aus.

CHECKLISTE

ANALYSIS

Funktionsklassen im Abitur

Folgende Funktionen und Funktionsscharen können im Abitur miteinander verknüpft (durch Addition, Multiplikation und Verkettung) und untersucht werden:

- □ ganzrationale Funktionen
- □ Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten
- □ Exponentialfunktionen (Basis e)
- □ natürliche Logarithmusfunktionen

Alle Angaben der folgenden Checkliste beziehen sich auf die hier genannten Funktionstypen.

Differentialrechnung

Ich kann …

- □ den Definitions- und Wertebereich einer Funktion bestimmen
- □ eine Funktion auf Symmetrie untersuchen
- □ die Schnittpunkte eines Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen bestimmen
- □ das Verhalten einer Funktion im Unendlichen bestimmen und dabei passende Fallunterscheidungen für den Parameter treffen
- □ lokale Extrem-, Wendepunkte bestimmen
- □ Funktionsgraphen aus ermittelten Eigenschaften graphisch darstellen
- □ die mittlere und lokale Änderungsrate berechnen
- □ Sekanten- und Tangentensteigung an Funktionsgraphen bestimmen
- □ Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbeständen berechnen
- □ Funktionen rekonstruieren

STAMMFUNKTION

Basics.

$$f \underset{\text{ableiten}}{\overset{\text{integrieren}}{\rightleftarrows}} F$$

DIE WICHTIGSTEN STAMMFUNKTIONEN AM BEISPIEL

POTENZREGEL: $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$$f(x) = \boxed{x^3} + 4x - 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \boxed{\frac{1}{4}x^4} + 2x^2 - x + \boxed{C}$$

SUMMENREGEL: $\int f(x) + g(x) \, dx = F(x) + G(x)$

FAKTORREGEL: $\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot F(x)$

$$f(x) = \boxed{e^{3x+1}} + \boxed{3}\, e^{-x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \boxed{\frac{1}{3} e^{3x+1}} - \boxed{3}\, e^{-x} + C$$

LINEARE SUBSTITUTION: $\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b)$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln|x| + C$$

$$f(x) = \sqrt{ax + b} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a} \cdot (ax + b)^{\frac{3}{2}} + C$$

Good to know.

STAMMFUNKTION MIT PUNKT

Häufig wird in Aufgaben verlangt, eine Stammfunktion zu finden, deren Graph einen gegebenen Punkt P enthält. BEISPIEL: Der Graph der Stammfunktion F einer Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2x$ soll den Punkt P(0 | 3) enthalten.

$$F(x) = \int f(x) \, dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$$

Punkt P einsetzen, um C zu ermitteln:

$$\begin{aligned} F(0) &= 3 \\ 3 &= \frac{1}{4} \cdot 0^4 + 0^2 + C \\ C &= 3 \end{aligned}$$

Somit ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3$.

NACHWEIS STAMMFUNKTION

Wer die partielle Integration nicht kennt, wird Probleme haben die Stammfunktion von f mit $f(x) = (2x + 1) \cdot e^{-2x}$ zu ermitteln. Im Text wird demnach formuliert, dass der Nachweis erbracht werden soll, dass $F(x) = (-x - 1) \cdot e^{-2x}$ die passende Stammfunktion sein soll. Der Nachweis kann durch das Ableiten (Produktregel) von F erbracht werden:

$$u = -x - 1 \qquad v = e^{-2x}$$
$$u' = -1 \qquad v' = -2e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= -1 \cdot e^{-2x} + (-x - 1) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} \\ &= e^{-2x} \cdot (-1 + (-x - 1) \cdot (-2)) \\ &= (2x + 1) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

HYPERGEOMETRISCHE VERTEILUNG

Basics.

Kriterien für hypergeometrische Verteilung:

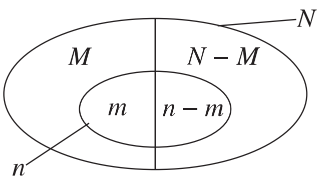
- ohne Reihenfolge
- ohne Zurücklegen

typische Schreibweise:

E: *hier Ereignis definieren*

$$P(E) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Mengen skizzieren:



Beispiel:

N	20 gelieferte Lampen
M	6 defekte Lampen
$N-M$	14 einwandfreie Lampen
n	Stichprobe von 5 Lampen
m	2 Lampen in der Stichprobe sind defekt
$n-m$	3 Lampen in der Stichprobe sind einwandfrei

Good to know.

Signalwörter

ohne Reihenfolge:
- genau dreimal
- mindestens 70
- 3 von 4
- unter zehn max. drei

ohne Zurücklegen:
- 5 Kugeln werden gleichzeitig gezogen
- bei Entnahme einer Stichprobe von 4
- 5 Personen werden ausgelost
- mit einem Griff ziehen

Hypergeometrisch vs. Binomial

Ist die Grundgesamtheit N groß genug und der Stichprobenumfang n möglichst klein, gehen beide Verteilungen ineinander über. Z.B.: von den 12000 Einwohnern einer Kleinstadt treiben 2500 regelmäßig Sport. Nun werden 10 Bewohner nacheinander ausgewählt. Für die Berechnung der Verteilung der Zufallsgröße

X : Anzahl sporttreibender Einwohner

kann sowohl die hypergeometrische als auch die Binomialverteilung genutzt werden, da die Trefferwahrscheinlichkeit auch ohne Zurücklegen nahezu konstant ist.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017

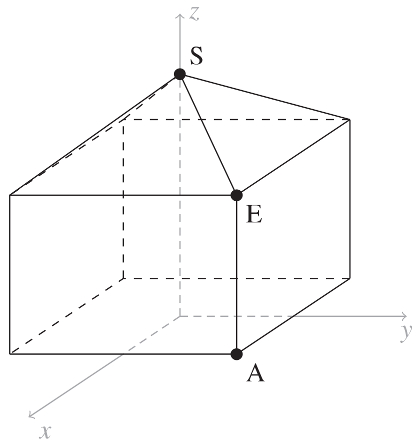
Mathematik

Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau

Zugelassene Hilfsmittel	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
für Teil 2-4:	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
für Teil 2-4:	Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über die Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inklusive Lese- und Auswahlzeit
	Teil 1: höchstens 40 Minuten (frühere Abgabe möglich)
	Teil 2-4: 230 Minuten
Hilfsmittelfreier Teil:	Keine Auswahl möglich. Bei früherer Abgabe (vor Ablauf der 40 Minuten) kann mit der Bearbeitung der weiteren Aufgaben begonnen werden, jedoch ohne Zuhilfenahme der Hilfsmittel. Erst nach Ablauf der 40 Minuten dürfen die dann zugelassenen Hilfsmittel verwendet werden.
Analysis:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 **oder** 2.2 aus.
Analytische Geometrie:	Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 **oder** 3.2 aus.
Stochastik:	Wenn Sie Aufgabe 3.1 gewählt haben, **müssen** Sie Aufgabe 4.1 wählen!
	Wenn Sie Aufgabe 3.2 gewählt haben, **müssen** Sie Aufgabe 4.2 wählen!

3.2 Analytische Geometrie (Gartenpavillon) 10 BE

Im Bild ist ein Pavillon dargestellt, der vereinfacht als zusammengesetzter Körper aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche und einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide aufgefasst werden kann. Eine der senkrecht stehenden Kanten wird durch die Strecke AE mit A(1,5 | 1,5 | 0) und E(1,5 | 1,5 | 2,1) modelliert.
Der Mittelpunkt der in der x-y-Ebene liegenden Grundfläche ist der Koordinatenursprung O(0 | 0 | 0). Eine der in der Spitze S des Pavillons zusammentreffenden Dachkanten ist Teil der Geraden g mit der Gleichung



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}. \text{ Es gilt: } 1\,\text{LE} = 1\,\text{m}.$$

a) 3 BE. Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Dachkante gegenüber der Grundflächenebene. 48

b) 2 BE. Ermitteln Sie die Gesamthöhe des Pavillons. 50

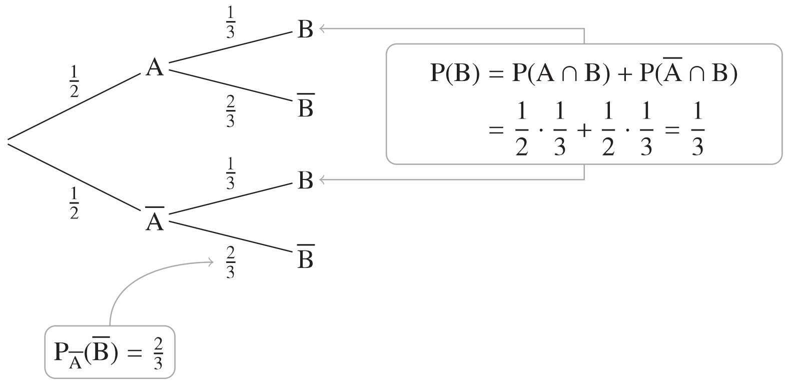
c) 3 BE. Eine der dreieckigen Teilflächen des Daches liegt in der Ebene H, die die Gerade g und den Punkt E enthält. 52 49
Weisen Sie nach, dass diese Ebene H durch die Gleichung $3y + 4{,}5z = 13{,}95$ beschrieben werden kann.

d) 2 BE. Im Inneren des Pavillons befindet sich eine Lampe. Sie wird vereinfacht durch den Punkt L(0 | 1 | 2) modelliert. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade k an, auf der neben L auch der Punkt der Ebene H liegt, der den kleinsten Abstand zum Punkt L hat. 50 53

→ Lösungen ab Seite 202

Teil 3 – Stochastik

a) Zum Ausfüllen des Baumdiagramms nutzen wir die Gegenwahrscheinlichkeit (bzw. die 2. Pfadregel) und die Aussage, dass es sich um unabhängiges Werfen handelt.



Mögliche Ereignisse: A: *Werfen einer geraden Zahl*; B: *Werfen einer Zahl, die kleiner als 3 ist*

b) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses T wurde mit Hilfe der hypergeometrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet. Die Binomialkoeffizienten geben Aufschluss darüber, wie viele Jungs und wie viele Mädchen jeweils ausgewählt wurden:

3 aus 30 Mädchen wurden ausgewählt: $b = 3$

2 aus 25 Jungen wurden ausgewählt: $a = 2$

$$P(T) = \frac{\boxed{\binom{30}{3}} \cdot \boxed{\binom{25}{2}}}{\binom{55}{5}}$$

Möglichkeiten für die Anordnung: Die Reihenfolge der Personen muss MJMJM sein, damit ein Junge immer zwischen zwei Mädchen steht. Da die Kinder voneinander unterscheidbar sind (mit Reihenfolge), jedoch nicht doppelt auf dem Bild stehen können (ohne Zurücklegen), ergibt sich die Anzahl der Möglichkeiten aus folgendem Term:

$$3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$