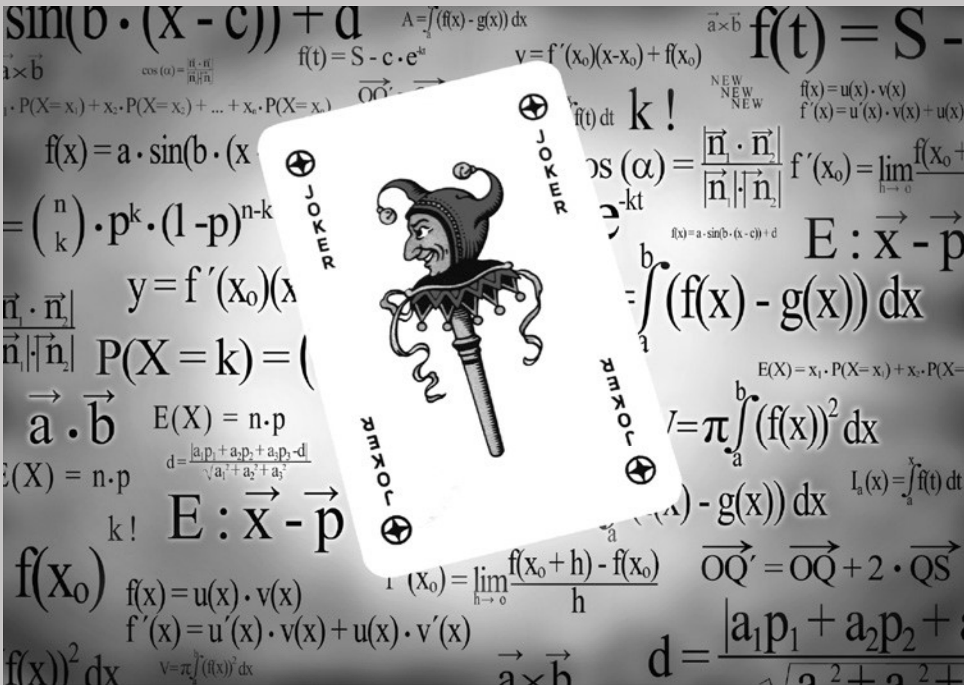
Rosner

Mathematik Fachabitur FOS/BOS 12 (Technik) Bayern

Optimale Vorbereitung durch verständliche Zusammenfassungen und Basisübungen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:

Stefan Rosner
Lehrer für Mathematik in der Oberstufe
stefan_rosner@hotmail.com

beratend:

Sophie Sturm
Lehrerin für Mathematik an der Beruflichen Oberschule Waldkirchen

* * * * *

1. Auflage 2018

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0634-7

1. Aus der Mittelstufe

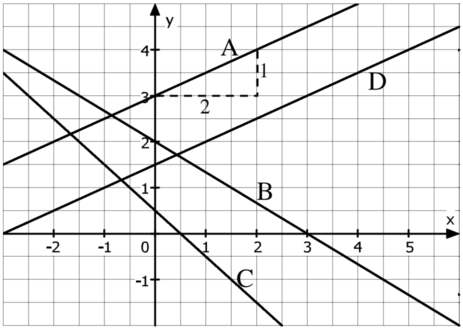
1.1 Geraden

1. Die allgemeine Geradengleichung

$\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$

Vorgehen zum Einzeichnen:

$$y = \frac{\textit{hoch / runter}}{\textit{rechts}} \cdot x + \begin{matrix}\textit{y-Achsen-}\\ \textit{abschnitt}\end{matrix}$$



A : $y = \frac{1}{2}x + 3$ B : $y = -\frac{2}{3}x + 2$

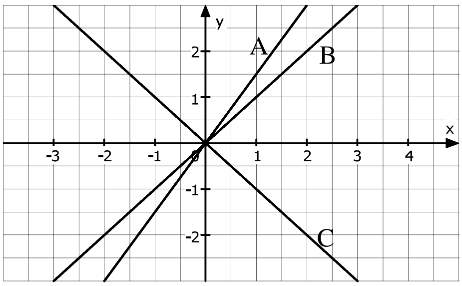
C : $y = -x + 0,5$ D : $y = 0,5x + 1,5$

2. Sonderfälle

- **Ursprungsgerade**
  $\boldsymbol{y = m \cdot x}$

  Spezielle Ursprungsgeraden

  1. Winkelhalbierende: $y = x$
  2. Winkelhalbierende: $y = -x$

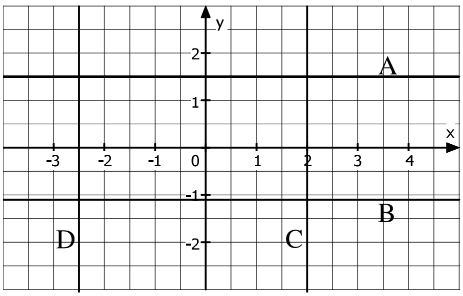


A : $y = \frac{3}{2}x$ B : $y = x$ C : $y = -x$

- **Parallelen zu einer Koordinatenachse**

  Parallele zur x-Achse
  $\boldsymbol{y}$ **=„Zahl“**

  Parallele zur y-Achse
  $\boldsymbol{x}$ **=„Zahl“**



A : $y = 1,5$ B : $y = -1,1$

C : $x = 2$ D : $x = -2,5$

www.mvurl.de/8hss

3. Parallele und senkrechte Geraden

- Zueinander **parallele** Geraden:

Beispiel: $y=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x+1$ (B)

$y=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x+2$ (A)

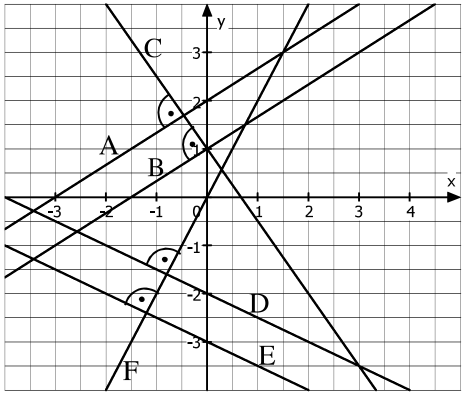
gleiche Steigungen $(\boldsymbol{m_1=m_2})$

- Zueinander **senkrechte** Geraden:

Beispiel: $y=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x+2$ (A)

$y=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}x+1$ (C)

Eine Steigung ist der **negative Kehrwert** der anderen Steigung; oder: Produkt aus den beiden Steigungen ergibt -1 $(m_1\cdot m_2=-1)$



$\text{A}: y=\frac{2}{3}x+2$ $\qquad$ $\text{B}: y=\frac{2}{3}x+1$

$\text{C}: y=-\frac{3}{2}x+1$ $\qquad$ $\text{D}: y=-\frac{1}{2}x-2$

$\text{E}: y=-\frac{1}{2}x-3$ $\qquad$ $\text{F}: y=2x$

4. Zusatz : Der Steigungswinkel (α) einer Geraden

Steigungswinkel $\triangleq$ Winkel, den eine Gerade mit der x-Achse einschließt.

Formel : $\boldsymbol{m=\tan(\alpha)}$
(m: Steigung; α: Steigungswinkel)

Beispiele:

- Berechnung der Steigung aus dem Steigungswinkel:

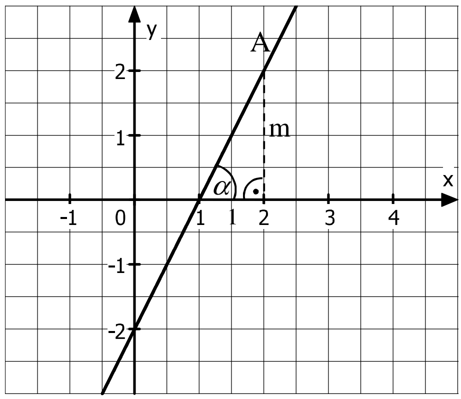
$\alpha=63{,}43°;$ $\qquad m=\tan(63{,}43°)=\underline{\underline{2}}$

- Berechnung des Steigungswinkels aus der Steigung:

$m=2;$ $\qquad 2=\tan(\alpha)$ $\quad |\tan^{-1}$

$\tan^{-1}(2)=\alpha$

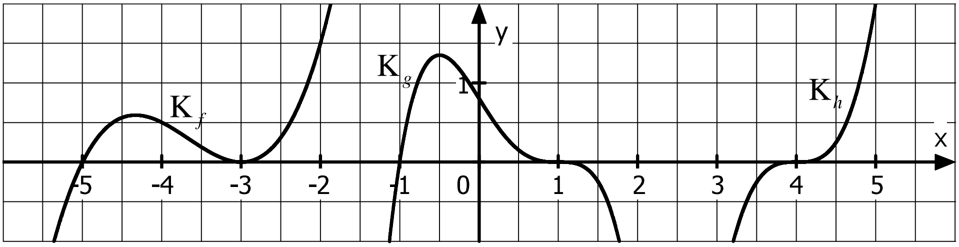
$\underline{\underline{63{,}43°}}=\alpha$



$\text{A}: y=2x-2$

2.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



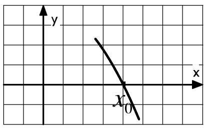
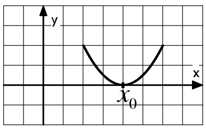
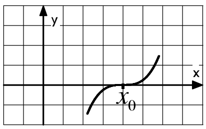
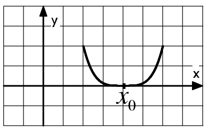
$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$

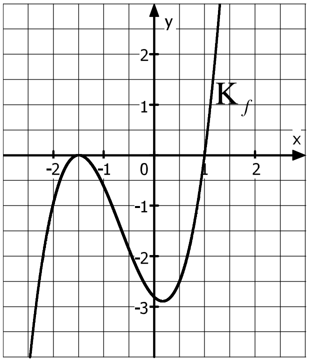
Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Linearfaktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)



Beispiel
Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.

Lösung
Da die Nullstellen $\left(x_{1/2} = -1{,}5;\ \ x_3 = 1\right)$ des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:

$f(x) = a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$

Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x-Achse ist, eingesetzt:

P$(0{,}5 \mid -2{,}5)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1) \\ -2{,}5 &= a \cdot (0{,}5+1{,}5)^2 \cdot (0{,}5-1) \\ -2{,}5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$$

3.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen

1. Polynomgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 3** **abc -** bzw. **pq - Formel**
$2x-4=0 \quad \mid +4$ $2x=4 \quad \mid :2$ $x=2$		
$2x^2-4=0 \quad \mid +4$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \mid \sqrt{}$ $x_1=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_2=-\sqrt{2}\approx -1,41$	$2x^2-4x=0$ $x\cdot(2x-4)=0$ **S. v. Nullpr.** (S. 38) $x_1=0 \qquad 2x-4=0$ $2x=4$ $x_2=2$	$x^2-8x+15=0$ mit **abc - Formel**: $(a=1;\ b=-8;\ c=15)$ $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ $=\frac{8\pm 2}{2}$ $x_1=5; \qquad x_2=3$ oder mit **pq - Formel**: $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (*Bei dieser Formel muss vor dem* x^2 *stets eine* $+1$ *stehen!*)
$2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2 \quad \mid \sqrt[3]{}$ $x=\sqrt[3]{2}$ $x\approx 1,26$	$2x^3-4x=0$ $x\cdot(2x^2-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^2-4=0$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \mid \sqrt{}$ $x_2=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_3=-\sqrt{2}\approx -1,41$	

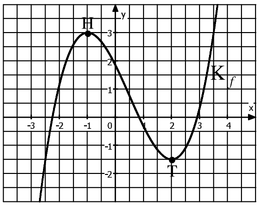
www.mvurl.de/eps4

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 4** **Substitution führt zu** $\boldsymbol{\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0}$
$2x^4 - 4 = 0 \quad \vert +4$ $2x^4 = 4 \quad \vert :2$ $x^4 = 2 \quad \vert \sqrt[4]{}$ $x_1 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}19$ $x_2 = -\sqrt[4]{2} \approx -1{,}19$	$2x^4 - 4x = 0$ $x \cdot \left(2x^3 - 4\right) = 0$ **S. v. Nullpr.** $x_1 = 0 \qquad 2x^3 - 4 = 0$ $2x^3 = 4$ $x^3 = 2$ $x_2 = \sqrt[3]{2}$ $x_2 \approx 1{,}26$	$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ **Substitution :** $\left(x^4 = u^2;\;\; x^2 = u\right)$ $u^2 - 8u + 15 = 0$ $u_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ (abc-Formel) $= \dfrac{8 \pm 2}{2}$ $u_1 = 5; \qquad u_2 = 3$ **Rücksubstitution :** $x^2 = 5 \qquad x^2 = 3$ $x_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}34 \qquad x_3 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ $x_2 = -\sqrt{5} \approx -2{,}34 \qquad x_4 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$

2. Exponentialgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 4** **Substitution führt zu** $\boldsymbol{\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0}$
$e^x = 0{,}5 \quad \vert \ln$ $x = \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$ oder $e^{2x-1} = 0{,}5 \quad \vert \ln$ $2x - 1 = \ln(0{,}5) \quad \vert +1$ $2x = \ln(0{,}5) + 1 \quad \vert :2$ $x = \dfrac{\ln(0{,}5) + 1}{2}$ $x \approx 0{,}153$	$2e^{2x} - e^x = 0$ $e^x \cdot (2e^x - 1) = 0$ **S. v. Nullpr.** $e^x = 0 \qquad 2e^x - 1 = 0$ $x = \ln(0) \qquad e^x = 0{,}5$ keine Lösung $\qquad x = \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$	$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$ **Substitution :** $\left(e^{2x} = u^2;\;\; e^x = u\right)$ $u^2 - 8u + 15 = 0$ $u_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ (abc-F.) $= \dfrac{8 \pm 2}{2}$ $u_1 = 5; \qquad u_2 = 3$ **Rücksubstitution :** $e^x = 5 \qquad e^x = 3$ $x_1 = \ln(5) \approx 1{,}6 \qquad x_2 = \ln(3) \approx 1{,}1$

4.6 Maximale Monotonieintervalle bestimmen

Vorgehen (am Beispiel)	
	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{6}$ (Beispiel) $f'(x)=x^2-x-2$ $f''(x)=2x-1$
1. Schritt: $f'(x)=0$ Stellen mit waagrechter Tangente (Steigung von 0) ermitteln. **(siehe Vorseite)**	$\boldsymbol{f'(x)=0}$ $x^2-x-2=0$ $x_{1/2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$ $=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-1;\ x_2=2}$
2. Schritt: Einsetzen in $f''(x)$ Falls $\begin{cases}f''(x)<0\\f''(x)>0\end{cases}$ liegt $\begin{cases}\textbf{Hochpunkt}\\\textbf{Tiefpunkt}\end{cases}$ vor. **(siehe Vorseite)**	$\boldsymbol{f''(-1)}=2\cdot(-1)-1=-3$ $\boldsymbol{<0}$ $\rightarrow$ **H** $\boldsymbol{f''(2)}=2\cdot 2-1=3$ $\boldsymbol{>0}$ $\rightarrow$ **T**
3. Schritt: Skizze	
4. Schritt: Antwort $\left(\text{von}\begin{cases}\text{steigend nach fallend}\\\text{fallend nach steigend}\end{cases}\text{bei}\begin{cases}\text{Hochpunkt}\\\text{Tiefpunkt}\end{cases}\right)$	f ist streng monoton fallend im Intervall $[-1;\ 2]$ f ist streng monoton steigend in $]-\infty;-1]$ und in $[2;\infty[$

Alternative zum 2. und 3. Schritt: Untersuchung mit Vorzeichentabelle von f'

x	-2	$\boldsymbol{-1}$	0	$\boldsymbol{2}$	3
$f'(x)$	5	$\boldsymbol{0}$	-2	$\boldsymbol{0}$	4
	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Ausnahme: Falls die Gleichung $f'(x)=0$ (1. Schritt) **keine Lösung** hat, ist die Funktion **überall** entweder monoton steigend oder fallend. Die Berechnung der Steigung an einer beliebigen Stelle (z.B. $f'(0)$) führt zur Entscheidung.

4.7 Wendepunkte

Vorgehen zur Ermittlung von Wendepunkten (am Beispiel)	
1. Schritt: $\boldsymbol{f''(x)=0}$	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{6}$ (Beispiel) $f'(x)=x^2-x-2$ $f''(x)=2x-1$ $f'''(x)=2$ $\boldsymbol{f''(x)=0}$ $2x-1=0 \quad \vert +1$ $2x=1 \quad \vert :2$ $\boldsymbol{x=0{,}5}$
2. Schritt: Einsetzen in $\boldsymbol{f'''(x)}$ Wendepunkt, falls $\boldsymbol{f'''(x)\neq 0}$.	$\boldsymbol{f'''(0{,}5)}=2 \quad \boldsymbol{\neq 0} \quad \to \ \mathbf{W}$
3. Schritt: Einsetzen in $\boldsymbol{f(x)}$ y-Koordinaten der Wendepunkte bestimmen.	$\boldsymbol{f(0{,}5)}=\frac{1}{3}\cdot 0{,}5^3-\frac{1}{2}\cdot 0{,}5^2-2\cdot 0{,}5+\frac{11}{6}$ $=\boldsymbol{0{,}75} \ \to \ \mathbf{W}(\boldsymbol{0{,}5}\,\vert\,\boldsymbol{0{,}75})$

Alternative zum 2. Schritt: Untersuchung auf Vorzeichenwechsel

Hat $f''(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, dann hat das Schaubild von $f(x)$ hier einen Wendepunkt.

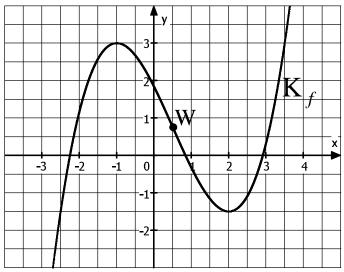
am Beispiel: $x=0{,}5$:

$f''(0)=2\cdot 0-1=-1 \ <0$

$f''(1)=2\cdot 1-1=1 \quad >0$

VZW

$\Rightarrow$ somit Wendepunkt



Bemerkungen

- Als **Wendetangente** wird eine Tangente bezeichnet, welche das Schaubild im Wendepunkt berührt. Die **Wendenormale** steht senkrecht zur Wendetangente und verläuft ebenfalls durch den Wendepunkt.
- An einer **Wendestelle** hat das Schaubild entweder die **größte** oder die **kleinste Steigung**. Das Schaubild von $f'(x)$ hat hier deshalb entweder einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt.

www.mvurl.de/bc2k

4.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung

1. Grundsätzlicher Zusammenhang

Der y-Wert des Schaubildes von $f'(x)$ entspricht an jedem x-Wert der Steigung des Schaubildes von $f(x)$.

2. Zusammenhang zwischen den besonderen Punkten

Kurzversion (Merkregel: In jeder Zeile steht das englische Wort für „neu“; 3-stufig)

$f(x)$	**N**	**E**	**W**			
$f'(x)$		**N**	**E**	**W**		
$f''(x)$			**N**	**E**	**W**	

Ausführliche Version (nur 2-stufig dargestellt)

$f(x)$ bzw. $f'(x)$	**N**	**H**	**T**	**W** (von **Lk** zu **Rk**)	**W** (von **Rk** zu **Lk**)	**TEP**
$f'(x)$ bzw. $f''(x)$		**N** „von + nach –“	**N** „von – nach +“	**H**	**T**	**N** ohne **VZW** (z.B. doppelte N) bzw. **H** oder **T** auf der x-Achse

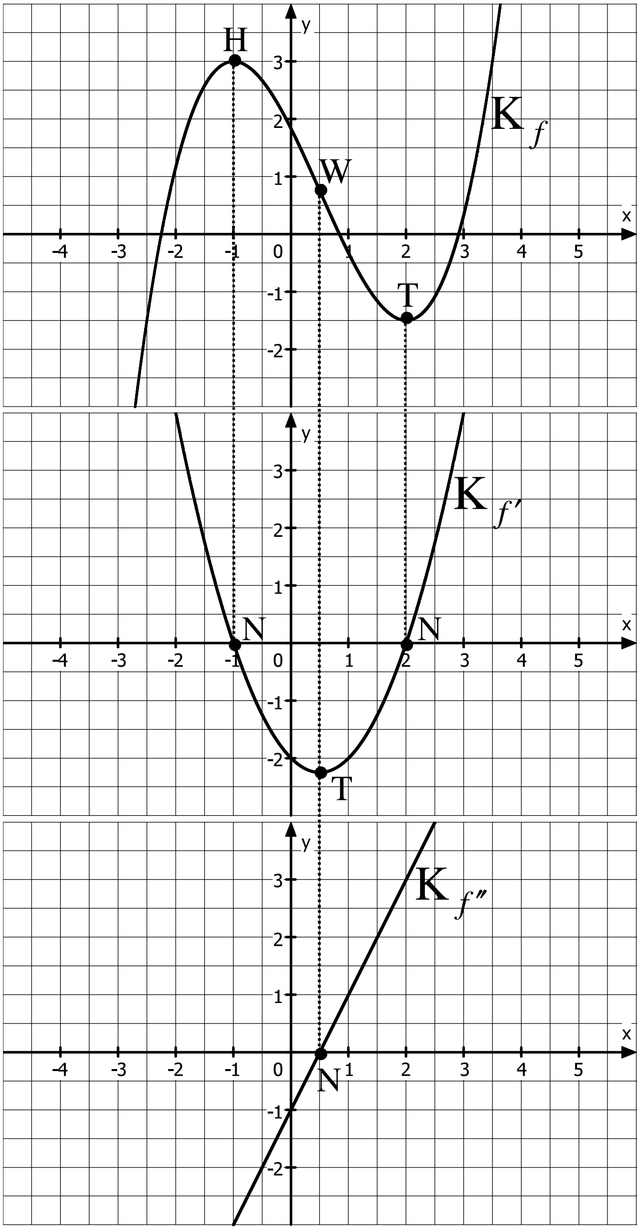
Abkürzungen
Nullstelle
Extrempunkt (**H**och- oder **T**iefpunkt)
Links**k**rümmung / **R**echts**k**rümmung
Wendepunkt
TEP Terrassenpunkt (Sattelp.)
Vor**Z**eichen**W**echsel

Bemerkungen

- Die obigen Zusammenhänge gelten natürlich auch zwischen der Stammfunktion $F(x)$ und der zugehörigen Funktion $f(x)$.
- Die Symmetrieart eines Schaubildes „pendelt“ beim Ableiten.

Beispiel: K_f ist symmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow K_{f'}$ ist symmetrisch zum Ursprung $\Rightarrow K_{f''}$ ist symmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow \ldots$

Beispiel



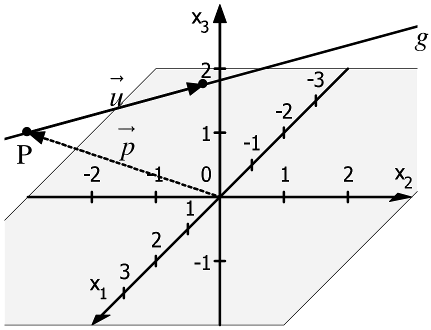
2. Geraden

2.1 Geradengleichungen in Parameterform

Die Punkt-Richtungs-Form:

$\boldsymbol{g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunktes P)
- $\vec{u}$: Richtungsvektor
- r: Parameter (mit $r \in \mathbb{R}$)



Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

Spezielle Geraden: z.B. x_1-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Elementare Aufgabenstellungen

- **Geradenpunkte ermitteln**

Beispiel: Bestimmung eines Punktes auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$).

Einsetzen eines beliebigen Wertes für r (z.B. $r = 2$):

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{D}(1|3|3)$.

- **Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt (Punktprobe)**

Beispiel: Liegt $\mathrm{Q}(0|8|4)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)?

Der Ortsvektor von Q wird für $\vec{x}$ eingesetzt, man erhält ein LGS.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = 2 - 0,5r \Leftrightarrow r = 4 \\ 8 = -2 + 2,5r \Leftrightarrow r = 4 \\ 4 = 2 + 0,5r \Leftrightarrow r = 4 \end{array}$$

LGS ist eindeutig lösbar, somit liegt Q auf der Geraden.
(Bei verschiedenen Ergebnissen für r (Widerspruch) liegt der Punkt nicht auf der Geraden.)

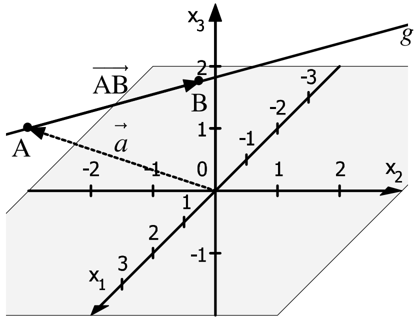
www.mvurl.de/pd8q

∘ Aufstellen einer Geradengleichung aus zwei Punkten

Zwei-Punkte-Form:

$\boldsymbol{g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

- $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, der Ortsvektor des Punktes A, wird als Stützvektor verwendet
- $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, der Verbindungsvektor der Punkte A und B, bildet den Richtungsvektor
- r: Parameter (mit $r \in \mathbb{R}$)



Beispiel: Gerade durch $A(2|-2|2)$ und $B(1{,}5|0{,}5|2{,}5)$.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5-2 \\ 0{,}5-(-2) \\ 2{,}5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } r \in \mathbb{R})$$

Hinweis : Die Gleichung einer Geraden ist nicht eindeutig. Durch „Vertauschen" der Punkte erhält man eine „zahlenmäßig andere" Gleichung (derselben Geraden):

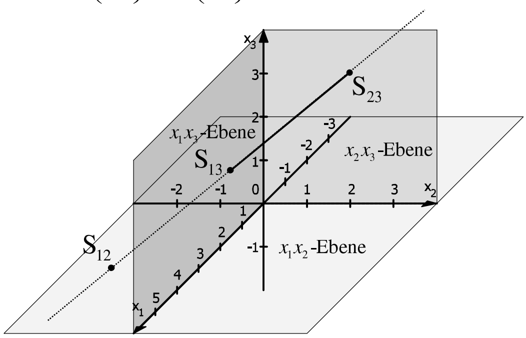
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } r \in \mathbb{R})$$

∘ Spurpunkte ermitteln (Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen)

Beispiel: Berechnen des Schnittpunktes von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der x_2x_3-Ebene.

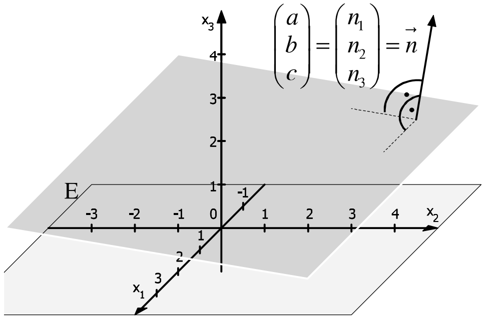
Da der gesuchte Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene liegt, hat seine x_1-Koordinate den Wert 0
$S_{x_2x_3}(0|...|...)$.
Dies wird in die Geradengleichung für x_1 eingesetzt: $0 = 3 - 3r \rightarrow r = 1$.
Nun wird $r = 1$ eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{23}(0|2|3)$$



Beachten Sie: Für den Schnittpunkt mit der $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x_1x_2}\textbf{-Ebene} \\ \boldsymbol{x_1x_3}\textbf{-Ebene} \\ \boldsymbol{x_2x_3}\textbf{-Ebene} \end{matrix}\right\}$ wird $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 = 0} \end{matrix}\right\}$ gesetzt.

3.3 Ebenengleichungen in Koordinatenform



$\mathbf{E:}\ \boldsymbol{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$

oder

$\mathbf{E:}\ \boldsymbol{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b}$

Beispiel:

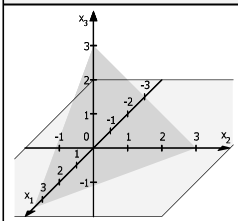
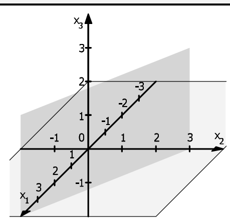
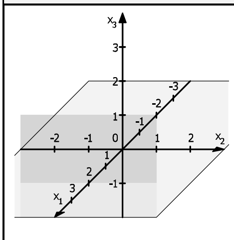
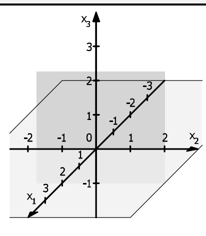
$\text{E: } 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$

mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

welcher senkrecht auf der Ebene steht.

Hinweis: Auch die Koordinatengleichung einer Ebene ist nicht eindeutig. Beispielsweise stellt $\text{E: } 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = -8$ eine weitere Koordinatengleichung der oberen Ebene E dar, da sie ein Vielfaches (2-faches) ist.

Beispiele und Lage im Koordinatensystem

1. „Normalfall“: 3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	2. Parallel zu einer Achse (x_3-Achse)
 $\text{E: } ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$	 $\text{E: } ax_1 + bx_2 = d$
3. Parallel zu 2 Achsen (x_2 und x_3-Achse) bzw. einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)	4. Ebene liegt in einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)
 $\text{E: } ax_1 = d$	 $\text{E}: x_1 = 0$ (x_2x_3-Ebene) Zusatz: $\text{E}: x_3 = 0$ (x_1x_2-Ebene) $\text{E}: x_2 = 0$ (x_1x_3-Ebene)

www.mvurl.de/m49q

Elementare Aufgabenstellungen in der Koordinatenform

- **Überprüfen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt (Punktprobe)**

Beispiel: Liegt $Q(2|2|0)$ in der Ebene $E:\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$?

Einsetzen: $2\cdot 2 - 3\cdot 2 + 4\cdot 0 = -4 \iff -2 \neq -4$
Falsche Aussage. Somit liegt Q nicht in der Ebene.

Koordinatenform, geeignet für: **die meisten Rechnungen**

- **Ebenengleichung aufstellen aus 3 Punkten**

Beispiel: Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene, in welcher die 3 Punkte $A(0|1|2), B(3|2|2)$ und $C(-1|1|0)$ liegen.

Zunächst Normalenvektor der Ebene bestimmen (siehe Normalenform, S. 89): $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einträge des Normalenvektors in Koordinatenform übernehmen: $E:\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = d$;
Z.B. Koordinaten von $A(0|1|2)$ einsetzen: $-2\cdot 0 + 6\cdot 1 + 1\cdot 2 = d \iff 8 = d$
Man erhält $E:\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 8$.

3.4 Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem

Beim Einzeichnen einer Ebene in das Koordinatensystem orientiert man sich an den **Spurpunkten** (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) und den **Spurgeraden** (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen).

Die Spurpunkte einer Ebene können in der Koordinatenform schnell bestimmt werden.

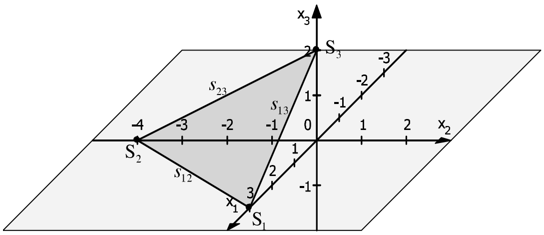
$\mathbf{E:}\ \boldsymbol{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$ hat die Spurpunkte $\mathbf{S_1}\left(\boldsymbol{\frac{d}{a}}\mathbf{|0|0}\right)$, $\mathbf{S_2}\left(\mathbf{0|}\boldsymbol{\frac{d}{b}}\mathbf{|0}\right)$, $\mathbf{S_3}\left(\mathbf{0|0|}\boldsymbol{\frac{d}{c}}\right)$

Beispiel: Geben Sie die Spurpunkte der Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 12$ an.

$S_1\left(\frac{12}{4}|0|0\right) = S_1(3|0|0)$,

$S_2\left(0|\frac{12}{-3}|0\right) = S_2(0|-4|0)$,

$S_3\left(0|0|\frac{12}{6}\right) = S_3(0|0|2)$

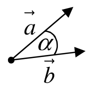
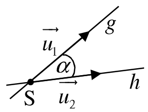
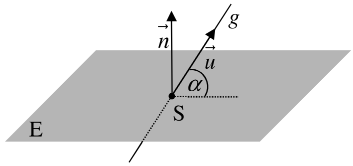
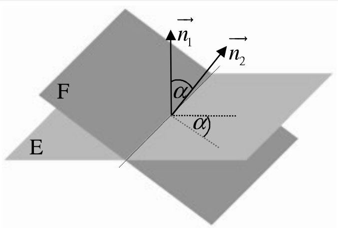


Zusatz („Achsenabschnittsform" einer Ebene, immer mit $\boldsymbol{d = 1}$)

Umgekehrt kann aus den Spurpunkten direkt die zugehörige Ebene angegeben werden:

$S_1(3|0|0),\ S_2(0|-4|0),\ S_3(0|0|2) \Rightarrow E:\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \mathbf{1}$

5. Schnittwinkel

Zwischen	**Formel**	**senkrecht** ($\alpha = 90°$)
Vektor $\vec{a}$ und **Vektor** $\vec{b}$		
	$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$	falls $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$
Gerade g mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u_1}$ und **Gerade** h mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u_2}$		
	$\cos(\alpha) = \left\lvert \dfrac{\overrightarrow{u_1} \circ \overrightarrow{u_2}}{\lvert\overrightarrow{u_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{u_2}\rvert} \right\rvert$	falls $\overrightarrow{u_1} \circ \overrightarrow{u_2} = 0$
Gerade g mit Richtungsvektor $\vec{u}$ und **Ebene** E mit Normalenvektor $\vec{n}$		
	$\sin(\alpha) = \left\lvert \dfrac{\vec{u} \circ \vec{n}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert} \right\rvert$	falls $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$ (mit $k \in \mathbb{R}$) (kollinear)
Ebene E mit Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ und **Ebene** F mit Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$		
	$\cos(\alpha) = \left\lvert \dfrac{\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert} \right\rvert$	falls $\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2} = 0$

Beispiel: Schnittwinkel zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3$.

$$\sin(\alpha) = \left\lvert \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\rvert} \right\rvert = \left\lvert \frac{4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} \right\rvert = \frac{8}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 27{,}81°$$

(TR-Einstellung: *deg*)

Hinweis: Mit dem Schnittwinkel ist stets der spitze Winkel ($0 \le \alpha \le 90$) gemeint.

www.mvurl.de/lawk

Aufgabe 25 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Schaubildes mit der x-Achse.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Schaubildes mit der y-Achse.
c) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

Aufgabe 26 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-2e^{-x}-4x$.
Untersuchen Sie das zugehörige Schaubild auf Extrem- und Wendepunkte.

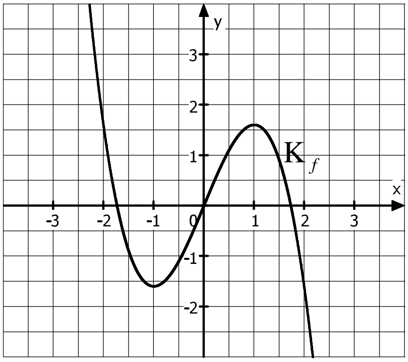
Aufgabe 27 : Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x)=\frac{1}{3}x^3-tx^2-3t^2x$ mit $t>0$.

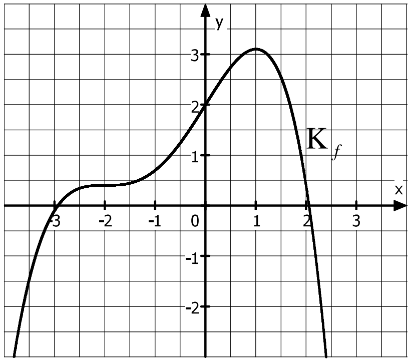
a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Schaubildes mit der x-Achse.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt des Schaubildes mit der y-Achse.
c) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

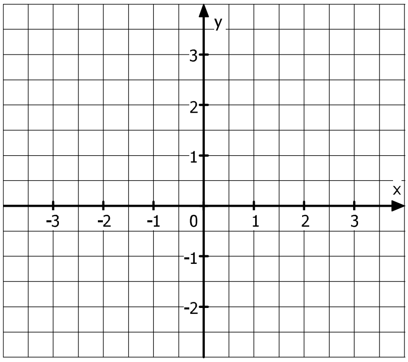
Aufgabe 28 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=e^{2x}\cdot(x-1)$.

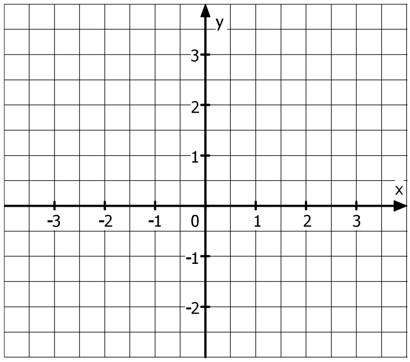
a) Berechnen Sie den Schnittpunkt des Schaubildes mit der y-Achse.
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt des Schaubildes mit der x-Achse.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes.
d) Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle an.
e) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
f) Geben Sie die maximalen Krümmungsintervalle an.
g) Skizzieren Sie das Schaubild in ein Koordinatensystem.
Lösung auf S. 64.

Aufgabe 29 : Skizzieren Sie jeweils das Schaubild der zugehörigen Ableitungsfunktion.









2. Geraden

Aufgabe 12 : Untersuchen Sie, ob die Punkte auf der Geraden g mit

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ liegen.

a) $A(6 \mid -5 \mid -26)$ **b)** $B(-12 \mid 13 \mid 30)$

Aufgabe 13 : Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Ermitteln die Koordinaten des gesuchten Punktes auf der Geraden g.

a) Punkt mit x_3-Koordinate -9: $A(\_\_ \mid \_\_ \mid \_\_)$

b) Punkt mit x_1-Koordinate -2: $B(\_\_ \mid \_\_ \mid \_\_)$

c) Spurpunkt mit der x_1x_2-Ebene: $C(\_\_ \mid \_\_ \mid \_\_)$

d) Spurpunkt mit der x_2x_3- Ebene: $D(\_\_ \mid \_\_ \mid \_\_)$

e) Spurpunkt mit der x_1x_3-Ebene: $E(\_\_ \mid \_\_ \mid \_\_)$

Aufgabe 14: Die gegebenen Punkte liegen auf der Geraden g. Bestimmen Sie eine mögliche Geradengleichung von g.

a) $A(-2 \mid 1 \mid 5); B(5 \mid -7 \mid 1)$ **b)** $C(0 \mid 4 \mid -1); D(2 \mid -1 \mid 3)$

Aufgabe 15

Die Gerade h schneidet die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

in deren Aufpunkt (Stützpunkt) senkrecht.

Ermitteln Sie eine mögliche Geradengleichung der Geraden h.

Aufgabe 16: Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Aufgabe 17: Sind die Aussagen wahr oder falsch?

a) Das Vervielfachen des Richtungsvektors einer Geraden ändert die Lage der Geraden.	☐ wahr ☐ falsch
b) Zu jeder Geraden gehört eine eindeutige Geradengleichung.	☐ wahr ☐ falsch
c) Falls der Richtungsvektor einer Geraden keine 0 enthält, durchquert die Gerade jede Koordinatenebene ein Mal.	☐ wahr ☐ falsch
d) Falls der Richtungsvektor einer Geraden ein Mal den Eintrag 0 hat, verläuft die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.	☐ wahr ☐ falsch
e) Die Richtungsvektoren paralleler Geraden sind kollinear.	☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 26

Untersuchung auf Extrempunkte:

$f(x) = -2e^{-x} - 4x$

$f'(x) = -2e^{-x} \cdot (-1) - 4 = 2e^{-x} - 4$

$f''(x) = -2e^{-x}$

1. Schritt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2e^{-x} - 4 &= 0 && |+4 \\ 2e^{-x} &= 4 && |:2 \\ e^{-x} &= 2 && |\ln \\ -x &= \ln(2) && |\cdot(-1) \\ x &= -\ln(2) \approx -0,69 \end{aligned}$$

2. Schritt:

$$\begin{aligned} f''(-\ln(2)) &= -2e^{-(-\ln(2))} = -2e^{\ln(2)} \\ &= -2 \cdot 2 = -4 \quad < 0 \;\rightarrow\; \text{H} \end{aligned}$$

3. Schritt:

$$\begin{aligned} f(-\ln(2)) &= -2e^{-(-\ln(2))} - 4 \cdot (-\ln(2)) \\ &= -2e^{\ln(2)} + 4 \cdot \ln(2) = -2 \cdot 2 + 4 \cdot \ln(2) \\ &= -4 + 4 \cdot \ln(2) \approx -1,23 \end{aligned}$$

$\rightarrow \text{H}\left(-\ln(2) \,|\, -4 + 4 \cdot \ln(2)\right) \approx \text{H}\left(-0,69 \,|\, -1,23\right)$

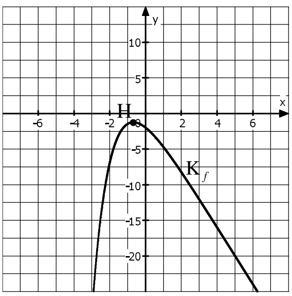
Untersuchung auf Wendepunkte:

1. Schritt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -2e^{-x} &= 0 && |:(-2) \\ e^{-x} &= 0 && |\ln \end{aligned}$$

keine Lösung

Schaubild hat also keinen Wendepunkt



Aufgabe 27

a) Ansatz: $\frac{1}{3}x^3 - tx^2 - 3t^2x = 0$

$$x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - tx - 3t^2\right) = 0$$

S. v. Nullpr.

$x_1 = 0 \qquad \frac{1}{3}x^2 - tx - 3t^2 = 0$

$$x_{2/3} = \frac{-(-t) \pm \sqrt{(-t)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3t^2)}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4t^2}}{\frac{2}{3}} = \frac{t \pm \sqrt{5t^2}}{\frac{2}{3}} \approx \frac{t \pm 2,24t}{\frac{2}{3}}$$

$$x_2 \approx \frac{t - 2,24t}{\frac{2}{3}} = -1,86t;$$

$$x_3 \approx \frac{t + 2,24t}{\frac{2}{3}} = 4,86t$$

$\rightarrow \text{N}_1(0\,|\,0);\ \text{N}_2(-1,86t\,|\,0);\ \text{N}_3(4,86t\,|\,0)$

b) Ansatz: $f_t(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - t \cdot 0^3 - 3t^2 \cdot 0^3 = 0$

$\rightarrow \text{S}_y(0\,|\,0)$

c) $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - tx^2 - 3t^2x$

$f_t'(x) = x^2 - 2tx - 3t^2$

$f_t''(x) = 2x - 2t$

1. Schritt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 2tx - 3t^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-2t) \pm \sqrt{(-2t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3t^2)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 + 12t^2}}{2} = \frac{2t \pm \sqrt{16t^2}}{2}$$

$$= \frac{2t \pm 4t}{2}$$

$$x_1 = \frac{2t - 4t}{2} = \frac{-2t}{2} = -t;$$

$$x_2 = \frac{2t + 4t}{2} = \frac{6t}{2} = 3t$$

Aufgabe 6

Ansatz: $\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$ mit $k, l \in \mathbb{R}$

Die 1. Zeile: $3 = k + 2l$ und die 3. Zeile: $4 = k + 2l$ führen auf einen Widerspruch.

Aufgabe 7

$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$; $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

Aufgabe 8

a) $A(4|-1|1)$; $B(0|3|3)$;

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0-4\\3-(-1)\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = 6$

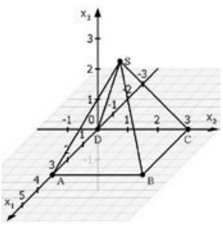
b) $C(-1|0|3)$; $D(-4|2|0)$;

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$

Aufgabe 9

a) $B(3\,|\,3\,|\,0)$; $S(1{,}5|1{,}5|3)$

oder $S(1{,}5|1{,}5|-3)$



b) $M(1{,}5\,|\,3\,|\,0)$

c) $d = \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18}$ VE

d) $V = \frac{1}{3}\cdot 3^2 \cdot 3 = 9$ FE

Aufgabe 10

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$;

$4\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 = 0$,

somit orthogonal.

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$;

$(-1)\cdot 5 + 2\cdot 1 + 4\cdot 0 = -3 \neq 0$,

somit nicht orthogonal.

Aufgabe 11

a) Vektorprodukt: $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\7\\-1\end{pmatrix}$;

Proben: $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}11\\7\\-1\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}11\\7\\-1\end{pmatrix} = 0$

b) Vektorprodukt: $\begin{pmatrix}-7\\1\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-35\\-7\end{pmatrix}$;

Proben: $\begin{pmatrix}-7\\1\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\-35\\-7\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\-35\\-7\end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 12

a) $A(6\,|-5\,|-26)$

$$\begin{pmatrix}6\\-5\\-26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 6 = -2 + 2r & \Leftrightarrow & r = 4 \\ -5 = 3 - 2r & \Leftrightarrow & r = 4 \\ -26 = 2 - 7r & \Leftrightarrow & r = 4 \end{array}$$

Gleiche Werte für r. Somit liegt A auf g.

b) $B(-12\,|\,13\,|\,30)$

$$\begin{pmatrix}-12\\13\\30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} -12 = -2 + 2r & \Leftrightarrow & r = -5 \\ 13 = 3 - 2r & \Leftrightarrow & r = -5 \\ 30 = 2 - 7r & \Leftrightarrow & r = -4 \end{array}$$

Verschiedene Werte für r. Somit liegt B nicht auf g.