Inhaltsverzeichnis

A Funktionen

Seite

B Differenzialrechnung

C Diskussion von Funktionen

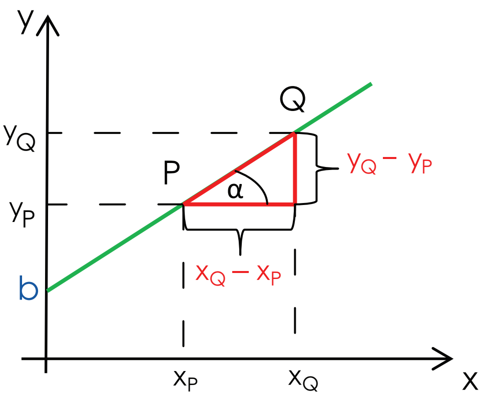
D Folgen, Reihen und Grenzwerte

Funktionen mit der Zuordnungsvorschrift f: $x \rightarrow mx + b$ bzw. mit der Funktionsgleichung $f(x) = mx + b$ nennt man lineare Funktionen. Dabei ist b der y-Achsenabschnitt und m die Steigung oder auch Änderungsrate der Geraden.

Jede Gerade kann mit Hilfe von zwei Punkten eindeutig bestimmt werden. Dafür müssen beide Punkte in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

$y_Q = mx_Q + b$ und $y_P = mx_P + b$

Ist m bereits bestimmt, können beide Gleichungen für sich gelöst werden. Ist dies nicht der Fall, so kann das Gleichungssystem mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden.



Winkelbeziehung Tangens:

$$m = \tan(\alpha) = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Der Benzinverbrauch eines Autos kann vereinfacht mit einer Geraden beschrieben werden. Es sind zwei verschiedene Angaben gegeben. Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h soll ein Verbrauch von 3 Liter pro 100 km vorliegen. Bei 170 km/h soll er bei 10 Liter pro 100 km liegen. Bestimme die Funktionsgleichung und zeichne anschließend den Graphen.

In der Aufgabenstellung ist bereits gegeben, dass es sich bei der Zuordnung um eine lineare Funktion handelt. Deshalb kann als Erstes die allgemeine Funktionsgleichung aufgestellt werden: $f(x) = mx + b$

zum Video

In diesem Beispiel soll der Kraftstoffverbrauch f(x) in [l/100km] als Funktion der Geschwindigkeit x in [km/h] aufgestellt werden. Dafür sind zwei Verbräuche zu einer bestimmten Geschwindigkeit gegeben. P(30 ; 3) und Q(170 ; 10)

Variante 1:
Diese beiden Punkte können in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt werden. Daraus entstehen zwei Gleichungen, die gleichzeitig gelten müssen.

(I) $3 = m \cdot 30 + b$ und (II) $10 = m \cdot 170 + b$

Da es sich bei diesen beiden Gleichungen nun um ein Gleichungssystem handelt, kann zum Beispiel das Einsetzungsverfahren verwendet werden. Man stellt die erste Gleichung nach b frei.

$b = 3 - m \cdot 30$

Anschließend wird b in Gleichung (II) eingesetzt.

(II) $10 = m \cdot 170 + 3 - m \cdot 30$

Jetzt muss diese Gleichung lediglich nach m freigestellt werden.

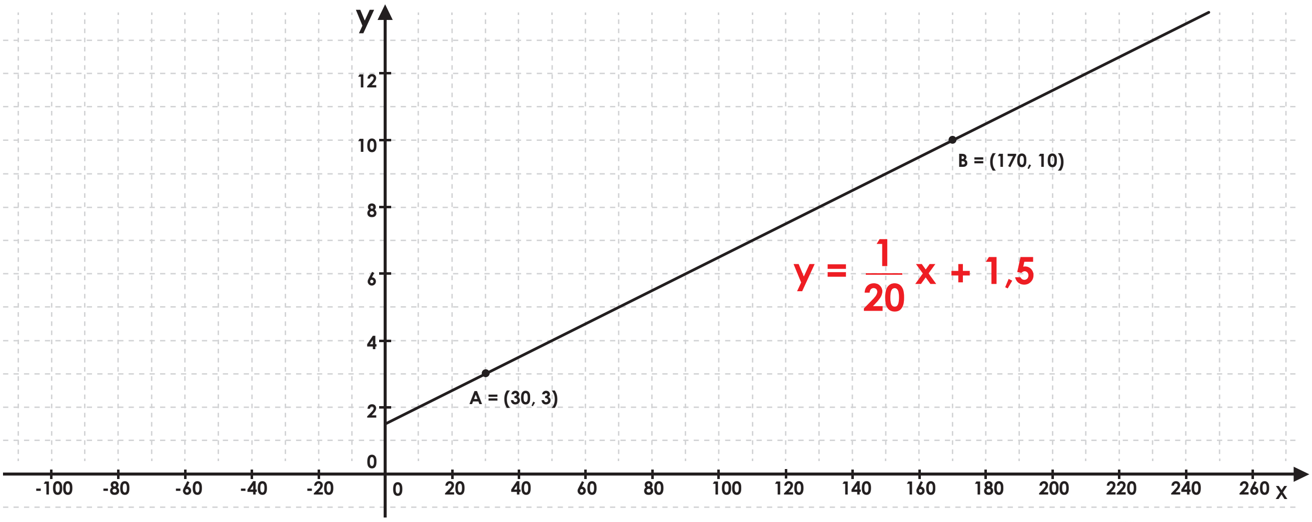
$$\Rightarrow 7 = m \cdot 140 \quad \longrightarrow \quad m = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Mit Gleichung (I) oder (II) kann dann b durch Einsetzen bestimmt werden.
In beiden Fällen folgt $b = 1{,}5$.

Variante 2:
Die Steigung bzw. Änderungsrate m kannst du direkt mit der Gleichung

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{10 - 3}{170 - 30} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$ bestimmen.

Diese Änderungsrate kann nun direkt in Gleichung (I) oder (II) eingesetzt werden. Dadurch ergibt sich b= 1,5 und die Funktionsgleichung ist vollständig aufgestellt. Beide Varianten können zur Bestimmung der Funktionsgleichung benutzt werden. Für andere Funktionsarten sollte Variante 1 jedoch in Erinnerung bleiben. Der Graph kann nun mit Hilfe der Funktionsgleichung erstellt werden.



Wenn du die Formel zur Änderungsrate vergessen hast, setze beide Punkte einfach für sich in die allgemeine Geradengleichung ein. Dadurch entsteht ein Gleichungssystem, das mit verschiedenen Ansätzen gelöst werden kann.

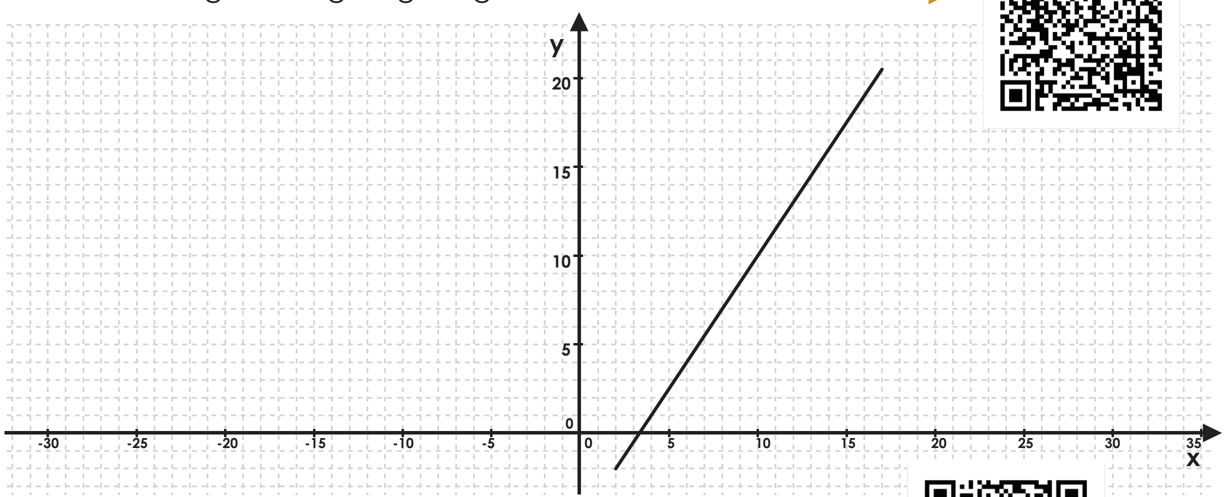
Übungen

1.

Bestimme mit Hilfe der Punkte P(-4; 2) und Q(8; 12) die Geradengleichung der linearen Funktion.

2.

Erstelle die Geradengleichung im gezeigten Intervall.



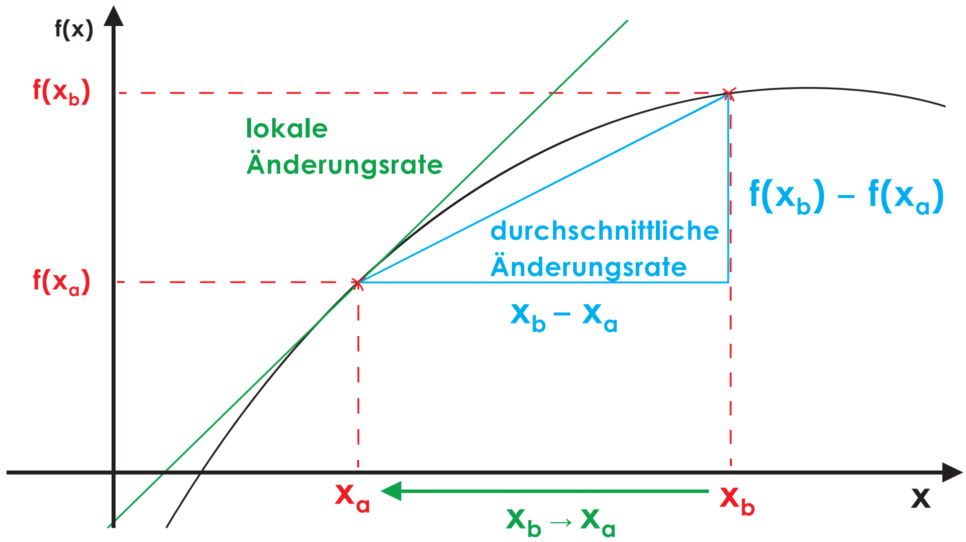
3.

Bestimme den Steigungswinkel der Geraden $f(x) = -2{,}4x + 17{,}5$.

Die mittlere Änderungsrate m einer Funktion f(x) in einem bestimmten Intervall $[x_a\ ;\ x_b]$ berechnet sich nach der Formel:

$$m = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

Man spricht dabei von der durchschnittlichen Änderungsrate zwischen zwei Punkten. Wenn $x_b \to x_a$ strebt, erhält man als Grenzwert die lokale Änderungsrate an der Stelle x_a.



Der zurückgelegte Weg f [in m] eines Motorrads beim Start eines Rennens lässt sich in Abhängigkeit der Zeit t [in s] ungefähr durch folgende Funktion beschreiben: $f(t) = 4\ ^m/_{s^2} \cdot t^2$

Welche Geschwindigkeit (Änderungsrate des Weges) hat das Motorrad
a) durchschnittlich in den ersten drei Sekunden **b)** nach 3 Sekunden ?

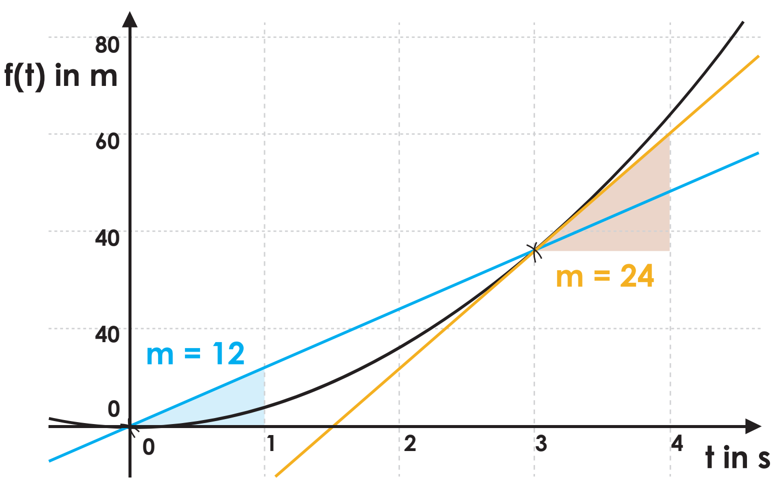
Lass dich zunächst nicht von den Einheiten (z.B. $^m/_{s^2}$) beirren. Führe sie einfach beim Rechnen sauber mit und kürze, wenn möglich, damit zum Schluss ein sinnvolles Ergebnis in Metern entsteht.

zum Video

Wie du sicherlich schon erkannt hast, sollst du bei Teilaufgabe a) die durchschnittliche Änderungsrate in dem Zeitintervall [0 s ; 3 s] bestimmen, sprich die Durchschnittsgeschwindigkeit. Wende hierfür einfach die Formel von oben an, indem du für $x_a = 0$ s und für $x_b = 3$ s einsetzt:

$$m = \frac{f(3\,s) - f(0\,s)}{3\,s - 0\,s} = \frac{(4\ ^m/_{s^2} \cdot (3\,s)^2) - (4\ ^m/_{s^2} \cdot (0\,s)^2)}{3\,s - 0\,s} = \frac{36\,m - 0\,m}{3\,s}$$

$$m = 12\ ^m/_s$$



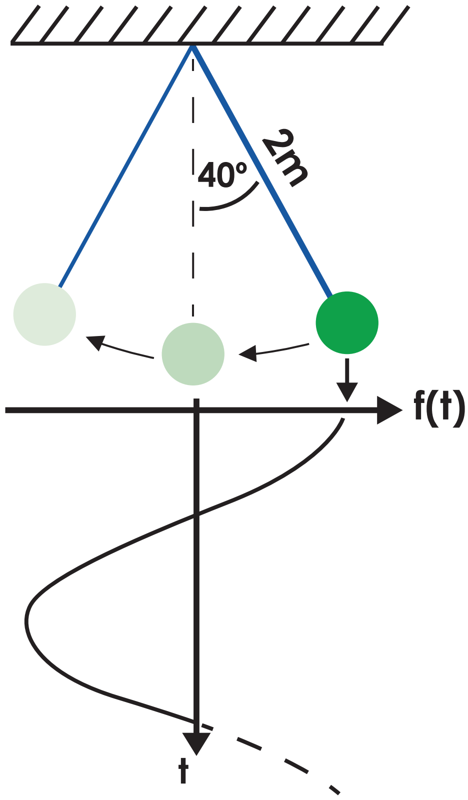
Bei Aufgabenteil b) sollen wir die lokale Änderungsrate bei 3 s bestimmen. Diese entspricht eben der Geschwindigkeit in dem Zeitpunkt (und nicht Zeitintervall). Wie oben beschrieben, wählt man dazu eine zweite Stelle, die sehr dicht an dem Punkt liegt. Dafür setzen wir dieses Mal für $x_b = 3{,}01$ s und für $x_a = 3$ s .

$$m = \frac{f(3{,}01\,s) - f(3\,s)}{3{,}01\,s - 3\,s} = \frac{36{,}24\,m - 36\,m}{0{,}01\,s} = 24\ ^m/_s$$

Auch für Funktionen, bei denen es sich nicht um Polynome handelt, kann man Ableitungen bestimmen. Bei den trigonometrischen Funktionen liegt zwischen einer Funktion und seiner Ableitung genau eine Phasenverschiebung von 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ nach links. Es ergibt sich daher folgende, wiederkehrende Reihe:

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$

Das Schwingen des Pendels in der Abbildung lässt sich als Funktion der Form $f(t) = a_{max} \cdot \cos(t)$ beschreiben. Bestimme zunächst die maximale Auslenkung a_{max}. An welcher Stelle weist das Pendel die höchste Geschwindigkeit auf und welchen Betrag hat sie?



In der Abbildung kannst du hoffentlich erkennen, wie sich aus der Bewegung des Pendels eine Kosinuskurve ergibt. Drehst du den Graphen gegen den Uhrzeigersinn, solltest du den Zusammenhang sehen. Die maximale Auslenkung entspricht zugleich der Amplitude a_{max}, die wir für die Funktion benötigen. Erinner dich hierbei nochmal an die verschiedenen Parameter, die Einfluss auf den Verlauf einer trigonometrischen Funktion nehmen. Mit einem scharfen Blick lässt sich die Länge a_{max} aus der Winkelbeziehung bestimmen:

$$\sin(40°) = \frac{a_{max}}{2m} \quad \rightarrow \quad a_{max} = 2\,m \cdot \sin(40°) = 1{,}29\,m$$

Hat man einen Graphen gegeben, der einen Weg in Abhängigkeit der Zeit abbildet, entspricht die Steigung in einem Punkt genau der Geschwindigkeit. Folglich müssen wir die Steigungen der Funktion $f(t) = 1{,}29 \cdot \cos(t)$ bestimmen. Da die Ableitungsfunktion eben diese Eigenschaft hat, bilden wir die Ableitung.

Abgesehen von den Gesetzmäßigkeiten beim Ableiten einer trigonometrischen Funktion, gilt auch weiterhin die Faktorregel. Die 1,29 bleibt entsprechend als Vorfaktor erhalten und aus cos(t) wird in der Ableitung -sin(t). Somit ergibt sich insgesamt als Ableitungsfunktion:

zum Video

$$f'(t) = 1{,}29 \cdot (-\sin(t)) = -1{,}29 \cdot \sin(t)$$

Für die betragsmäßig höchste Geschwindigkeit müssen die Punkte größter Steigung, also Hoch- und Tiefpunkte in der Ableitungsfunktion, bestimmt werden. Dafür ist es oft hilfreich, den Verlauf der trigonometrischen Funktionen vor Augen zu haben oder sich eine Skizze als Hilfestellung zu erstellen.

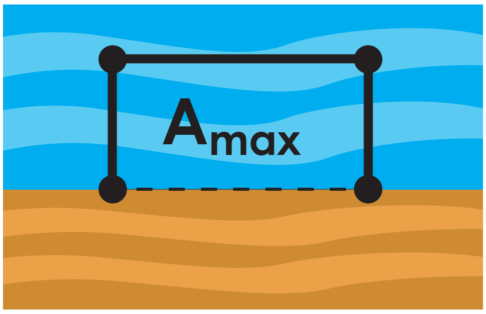
Die Skizze verdeutlicht, dass sich das Pendel nach $\frac{\pi}{2}$ Sekunden, also ungefähr 1,5 Sekunden, am schnellsten bewegt mit einer Geschwindigkeit von

$$f'(t) = -1{,}29 \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1{,}29 \cdot 1 = -1{,}29 = |-1{,}29|\ ^{m}/_{s}$$

Bei Extremwertaufgaben gilt es, einen Sachverhalt mathematisch zu formulieren und durch Funktionsuntersuchungen das Minimum oder Maximum einer gesuchten Größe zu finden.

Dafür stellt man zunächst Gleichungen auf, in denen die Bedingungen festgehalten werden. Dabei können auch mehrere Variablen vorliegen. Durch Umformen bestimmt man eine Zielfunktion, die auf Extremwerte untersucht wird.

Mit Hilfe einer 200 Meter langen Leine sollen drei Seiten eines rechteckigen, überwachten Schwimmbereichs an einem Strandabschnitt markiert werden. Die vierte Seite der Begrenzung ist das Strandufer. Welche Fläche kann maximal eingeschlossen werden?



Um dir das Problem besser vor Augen zu führen, solltest du bei solchen Aufgaben zunächst immer eine Skizze erstellen, sofern diese nicht gegeben ist. In unserem Beispiel siehst du nochmal deutlich, dass die Länge der Leine L als Begrenzung nur durch die zwei kurzen Seiten a und eine lange Seite b zusammengesetzt wird. Aus dieser Information können wir bereits die erste Beziehung für das Problem aufstellen:

zum Video

$L = 200 = 2a + b$

Wie bei jedem Rechteck gilt für den Flächeninhalt weiterhin:

$A = a \cdot b$

Du siehst vermutlich auch, dass wir nun zwei Gleichungen und zwei Variablen haben. Man braucht immer dieselbe Anzahl an Gleichungen wie man Unbekannte (Variablen) hat, um diese eindeutig lösen zu können. Man formt nun die Nebenbedingung (obere Gleichung) so um, dass eine Variable freigestellt wird, und setzt dies in die Hauptbedingung ein (Fläche), die es zu optimieren gilt.

Freistellen: $200 - 2a = b$
Einsetzen: $A = a \cdot (200 - 2a)$
Ausmultiplizieren: $A = 200a - 2a^2$

Nun haben wir eine Funktion für die Fläche A in Abhängigkeit der Seitenlänge a. Die Fläche ist genau dann maximal, wenn ein Hochpunkt vorliegt. Dafür bildest du die 1. Ableitung und suchst nach Nullstellen als notwendiges Kriterium für einen Extrempunkt.

$f(a) = 200a - 2a^2$ und $f'(a) = 200 - 4a$

$0 = 200 - 4a_E \rightarrow a_E = 50$

Die Lösung ist a = 50 m. Normalerweise überprüfen wir den Extrempunkt noch mit der zweiten Ableitung. Wer sich allerdings die Funktionsgleichung genauer anschaut, stellt fest, dass es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt (Minus vor dem a^2), sodass nur ein Hochpunkt in Frage kommt.

Des Weiteren ist b = 100 m und für die maximale Fläche ergibt sich $A = 5000\ m^2$.

Der Ablauf ist immer sehr ähnlich: Gleichungen aufstellen, umformen und Extrempunkte bestimmen. Wichtig ist jedoch, mit Hilfe einer Skizze das Problem richtig zu verstehen.