

1 Einleitung und Übersicht

1.1 Erforderliche Nachweise und Nachweisverfahren

Für Tragwerke des Bauwesens sind die Tragfähigkeit, die Gebrauchstauglichkeit, die Dauerhaftigkeit bzw. die Ermüdungsfestigkeit und die Lagesicherheit nachzuweisen. Da die Bauteile im Stahlbau in der Regel schlank und dünnwandig sind, haben Tragfähigkeitsnachweise für stabilitätsgefährdete Konstruktionen bezüglich Biegeknicken, Biegedrillknicken und Plattenbeulen große Bedeutung und bilden daher einen wichtigen Schwerpunkt in statischen Berechnungen. In diesem Zusammenhang ist die Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen und Verzweigungslasten eine zentrale Aufgabe, deren Lösung in dem vorliegenden Buch mithilfe der Finiten-Elemente-Methode (FEM) behandelt wird.

Die Berechnungen und Nachweise müssen die gesetzlichen Anforderungen erfüllen und dem Stand der Technik entsprechen. Für Stahlkonstruktionen bilden die Normen DIN EN 1990, DIN EN 1991 und insbesondere DIN EN 1993 die wesentliche Grundlage. Tabelle 1.1 enthält eine Zusammenstellung der *Nachweise* zur Tragfähigkeit nach DIN EN 1993-1-1, [5].

Tabelle 1.1 Nachweise nach DIN EN 1993-1-1 zur Tragfähigkeit mit $E_d \leq R_d$

Nachweis-methode	Tragwerksberechnung ⇒ Beanspruchungen E_d	Querschnittsausnutzung ⇒ Beanspruchbarkeiten R_d
NW 1 (sehr häufig) Querschnitte der Klassen 1 bis 3	nach der Elastizitätstheorie ⇒ Schnittgrößen N, M_y usw.	nach der Elastizitätstheorie ⇒ Bemessungswert der Streckgrenze f_y, R_d
NW 2 (häufig) Querschnitte der Klassen 1 und 2	nach der Elastizitätstheorie ⇒ Schnittgrößen N, M_y usw.	nach der Plastizitätstheorie ⇒ Ausnutzung der plastischen Querschnittstragfähigkeit
NW 3 (selten) Querschnitte der Klasse 1	nach der Plastizitätstheorie ⇒ Schnittgrößen nach der Fließgelenk- oder Fließzonentheorie	nach der Plastizitätstheorie ⇒ Ausnutzung der plastischen Querschnittstragfähigkeit
NW 4 (selten) Querschnitte der Klasse 4	nach der Elastizitätstheorie ⇒ Schnittgrößen N, M_y usw.	nach der Elastizitätstheorie unter Berücksichtigung des Beulens

Die Verwendung einer *Nachweismethode* setzt voraus, dass die einzelnen Querschnittsteile (Stege und Gurte) die Druckspannungen aufnehmen können, so dass kein Beulen auftritt und eine ausreichende Rotationskapazität vorhanden ist, s. Abschnitt 5.1.2. Hilfen für die Überprüfung der c/t -Verhältnisse finden sich in Profiltabellen, s. z. B. [15]. Vollplastische Schnittgrößen für Walzprofile finden sich in den Profiltabellen.

bellen von [15], Interaktionsbeziehungen und Nachweise mit dem Teilschnittgrößenverfahren im Abschnitt 5.1.2 und in [15] und [12].

Der Index „d“ bei E_d und R_d in Tabelle 1.1 kennzeichnet, dass die **Beanspruchungen mit den Bemessungswerten** der Einwirkungen zu berechnen sind und es sich um die **Bemessungswerte der Beanspruchbarkeiten** handelt. Auf die Berechnung der Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten wird im Abschnitt 1.4 „Lineare und nichtlineare Berechnungen“ näher eingegangen. In Tabelle 1.2 wird erläutert, wie die Nachweise in der Regel geführt werden.

Tabelle 1.2 Hinweise zur Durchführung der Tragfähigkeitsnachweise

Nachweismethode	Nachweise
NW 1 (QK 1 bis 3)	mit Spannungen und der Streckgrenze bzw. dem Fließkriterium
NW 2 (QK 1 und 2)	mit plastischen Grenzschnittgrößen bzw. Interaktionsbeziehungen
NW 3 (QK 1)	nach der Fließgelenktheorie mit kinematischen Ketten oder schrittweise elastischen Berechnungen; nach der Fließzonentheorie mit EDV-Programmen
NW 4 (QK 4)	mit Spannungen unter Berücksichtigung des Beulens

1.2 Verfahren zur Schnittgrößenermittlung

Bekanntlich können die Schnittgrößen in statisch bestimmten Systemen mithilfe von **Gleichgewichtsbedingungen** und Schnittpunktprinzipien ermittelt werden. Dies ist bei statisch **unbestimmten** Systemen nicht möglich und man benötigt daher andere Lösungsverfahren, wie z. B. das **Kraftgrößenverfahren**, das das klassische Verfahren der Baustatik ist. Es ist für die Handrechnung gut geeignet und sehr anschaulich, da es dem ingeniermäßigen Verständnis unmittelbar zugänglich ist. Der Nachteil ist jedoch, dass man für die unterschiedlichen baustatischen Systeme stets einen neuen Lösungsansatz entwickeln muss und es darüber hinaus für viele Aufgabenstellungen gänzlich ungeeignet ist.

Bild 1.1 zeigt als Beispiel einen **einfach** statisch unbestimmten Biegeträger. Beim Kraftgrößenverfahren muss daher **eine** unbekannte Kraftgröße bestimmt werden. Danach kann der Momentenverlauf unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Ausgangspunkt des Verfahrens ist stets die Wahl eines statisch bestimmten Hauptsystems. Da man dabei mehrere Möglichkeiten hat, sind die beiden Systeme in Bild 1.1 ausgewählte Beispiele. Allgemein werden drei Verfahren für die Schnittgrößenermittlung unterschieden:

- *Kraftgrößenverfahren*
- *Weggrößenverfahren* → FEM
- *Übertragungsmatrizenverfahren* → FEM

Während beim *Kraftgrößenverfahren* die **Kraftgrößen** die Unbekannten des entstehenden Gleichungssystems sind, sind es beim *Weggrößenverfahren* die **Weggrößen**, d. h. die Verschiebungen und Verdrehungen, weshalb es auch Verformungsgrößenverfahren genannt wird. Wenn man die baustatischen Systeme in finite Elemente (Stabelemente) einteilt, ist das Weggrößenverfahren in hervorragender Weise für eine verallgemeinerte Formulierung geeignet und daher universell in einem weiten Anwendungsbereich einsetzbar. Ingenieurmäßig anschaulich ist es nicht und es ist stark mathematisch-mechanisch ausgerichtet, weil häufig große Datenmengen zu verarbeiten und große Gleichungssysteme zu lösen sind. Dies hängt natürlich vom statischen System und der FE-Modellierung ab.

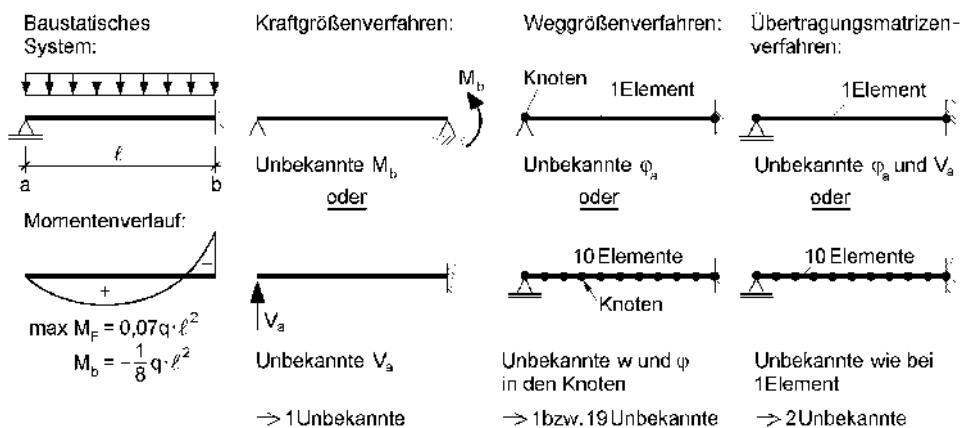


Bild 1.1 Unbekannte Größen beim Kraftgrößen-, Weggrößen- und Übertragungsmatrizenverfahren für ein ausgewähltes Beispiel

Bild 1.1 zeigt beispielhaft die Anwendung des *Weggrößenverfahrens*. Unbekannte Größen sind bei diesem Verfahren die Verformungsgrößen in den Knoten, d. h. beim untersuchten Biegeträger die Verschiebung w und die Verdrehung φ . Pro Knoten treten also zwei Unbekannte auf. Für das Beispiel ergeben sich dann unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen **eine** bzw. 19 Unbekannte. Bei der FE-Modellierung mit zehn Elementen treten relativ viele Unbekannte auf (19). Vorteilhaft ist dabei aber, dass keine weiteren Handrechnungen erforderlich sind, weil verfahrensbedingt alle Zustandsgrößen (Biegemomente, Querkräfte, Durchbiegungen, Verdrehungen) in den Knoten, d. h. praktisch im gesamten Träger, berechnet werden.

Aufgrund des numerischen Aufwandes ist die weite Verbreitung der FEM unter Verwendung des *Weggrößenverfahrens* eng mit der stürmischen Entwicklung leistungsfähiger Computer verbunden. Noch bis etwa 1985 war es eine wichtige Aufgabe, Tragwerke so durch finite Elemente zu modellieren, dass der begrenzte Speicherplatz ausreichte und Rechenzeiten nicht ausuferten. Heutzutage sind derartige Überlegungen nur noch bei außergewöhnlichen Tragwerken und Berechnungen von Bedeutung. Andererseits stellt man häufig bei statischen Berechnungen fest, dass mit übertrieben feinen FE-Modellierungen oder ungeeigneten finiten Elementen „überflüssig viel Pa-

pier erzeugt wird“. Wie Bild 1.1 zeigt, kann es durchaus sinnvoll sein, Einfeldträger mit einem FEM-Programm zu berechnen, weil vom Programm direkt alle Größen für die erforderlichen Nachweise ermittelt werden und man mit geringem Aufwand die entsprechenden Seiten für die statische Berechnung ausdrucken kann.

Als drittes Verfahren ist in der obigen Aufzählung das **Übertragungsmatrizenverfahren** aufgeführt. Es wird auch *Reduktionsverfahren* genannt und eignet sich für durchgehende Stabzüge, wie z. B. Durchlaufträger. Unbekannte des entstehenden Gleichungssystems sind die unbekannten Schnitt- und Weggrößen **am Beginn** des Stababzuges (siehe auch Bild 1.1), so dass sich bei Stäben maximal sieben Unbekannte ergeben. Entsprechend gering ist der Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit. Man hat mit dem *Übertragungsmatrizenverfahren* früher häufig Vollwandträgerbrücken bemessen, da sich selbst bei Durchlaufträgern über mehrere Felder nur zwei Unbekannte ergeben (Hauptträger, Abtragung der Vertikallasten). EDV-Programme, die dieses Verfahren verwenden, sind heutzutage selten. Es findet sich aber teilweise in aktuellen FEM-Programmen für Stäbe und Stabwerke, wobei jedoch zuerst mit einer relativ groben Einteilung in finite Elemente nach dem *Weggrößenverfahren* gerechnet wird. Anschließend werden die einzelnen Stäbe meist in fünf bis zehn Elemente aufgeteilt und detaillierter mit dem *Übertragungsmatrizenverfahren* untersucht. Weitere Einzelheiten zu diesem Verfahren finden sich in Abschnitt 3.13.

1.3 Elementtypen und Anwendungsbereiche

Bei Berechnungen mit der FEM werden Tragwerke durch möglichst zutreffende **bau-statische Systeme** (Stabwerke, Platten, Scheiben usw.) idealisiert und dann in geeigneter Weise in finite Elemente eingeteilt, s. Bild 1.3. Man unterscheidet:

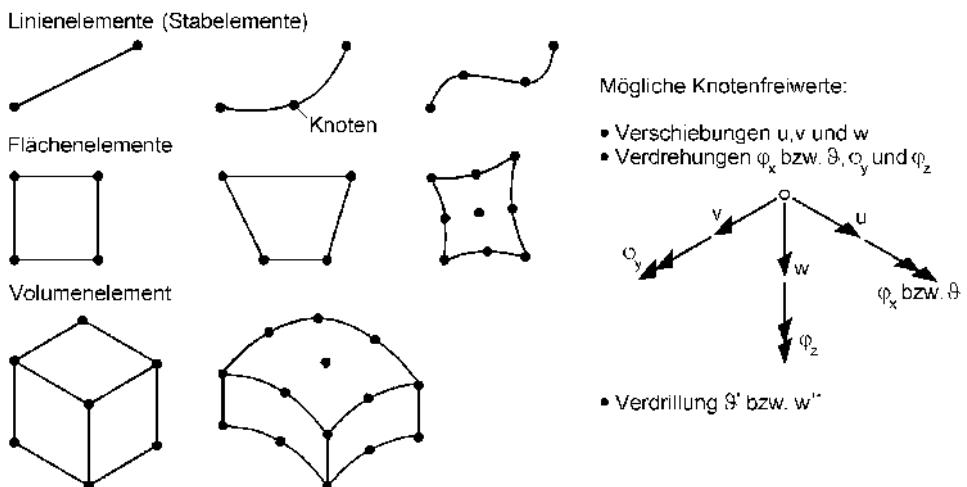


Bild 1.2 Elementtypen und mögliche Knotenfreiwerke

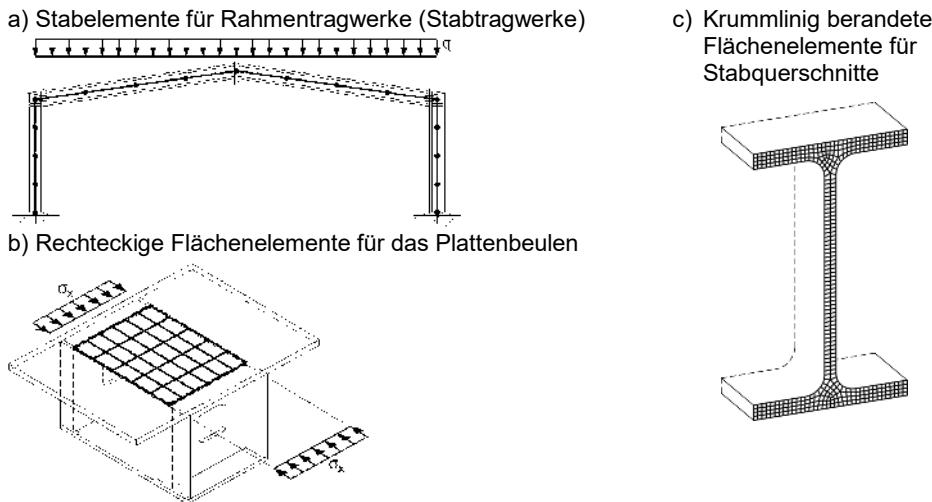


Bild 1.3 Beispiele zur Diskretisierung unterschiedlicher Problemstellungen des Stahlbaus mit finiten Elementen

- *Linienelemente* (gerade oder gekrümmmt)
- *Flächenelemente* (eben oder gekrümmmt)
- *Volumenelemente* (quaderförmig oder mit gekrümmten Oberflächen)

In Bild 1.2 sind entsprechende Elemente beispielhaft dargestellt. Sofern Stäbe oder Stabwerke untersucht werden, kann es in einigen Anwendungsfällen sinnvoll sein, die **Stabquerschnitte** mithilfe der FEM zu untersuchen.

Dabei werden je nach Aufgabenstellung

- *Linienelemente* (gerade oder gekrümmmt) oder
- *Flächenelemente* (viereckig oder dreieckig, gerade oder gekrümmte Ränder)

verwendet.

Für die Berechnung von Tragwerken aus Baustahl werden fast ausschließlich **Stabelemente** verwendet (s. Bild 1.3a), die häufig Bestandteil der folgenden baustatischen Systeme sind:

- einfeldrige und durchlaufende Biegeträger
- Stützen und ebene Rahmen
- ebene und räumliche Fachwerke
- räumliche Stabtragwerke
- Trägerroste

Die hier aufgeführten baustatischen Systeme kommen vornehmlich im **Hoch-, Industrie- und Anlagenbau** vor. Sie erfordern aufgrund unterschiedlicher Beanspruchungen Stabelemente mit bis zu sieben Verformungsgrößen in den Knoten (Knotenfrei-

werte). Auf die Anzahl der erforderlichen Verformungsgrößen pro Knoten wird in den Kapiteln 3 und 5 näher eingegangen.

Stabelemente sind auch für die Berechnung von **Brücken** die üblichen finiten Elemente. Ob Vollwandträger-, Fachwerk balken-, Stabbogen- oder Schrägschiffbrücken, Flächenelemente (Scheiben, Platten, Schalen) werden nur selten verwendet. Ein wesentlicher Hintergrund dazu ist, dass die aktuellen Vorschriften fast ausschließlich auf die Berechnung mit Stabtragwerken abgestimmt sind. Hinzu kommt, dass die Genauigkeit dieser Berechnungen von Ausnahmen abgesehen völlig ausreichend ist.

Ein durchaus interessanter Anwendungsbereich von finiten **Flächenelementen** im Stahlbau ist das Plattenbeulen. Bild 1.3b zeigt beispielhaft den Obergurt eines Stabes, der für die Untersuchung des Plattenbeulens in finite Elemente eingeteilt worden ist. Das Thema wird in Kapitel 5 behandelt und dort ein rechteckiges Plattenelement für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenformen hergeleitet. Ansonsten werden Flächenelemente bei wissenschaftlichen Untersuchungen und Entwicklungen gezielt eingesetzt. Da, wie erwähnt, Flächenelemente nur selten und **Volumenelemente** praktisch gar nicht im Stahlbau zum Einsatz kommen, soll hier zusammenfassend Folgendes festgehalten werden:

- **Tragwerke des Stahlbaus** werden fast ausschließlich mithilfe von **Stabelementen** berechnet.
- Es werden unterschiedliche Stabelemente benötigt, damit alle vorkommenden Tragwerks- und Beanspruchungsarten zutreffend untersucht werden können.

Finite Elemente für die Untersuchung von **Stabquerschnitten** werden in Kapitel 7 behandelt. Als Beispiel dazu ist in Bild 1.3c die FE-Modellierung eines gewalzten I-Querschnitts durch krummlinig berandete Flächenelemente dargestellt.

1.4 Lineare und nichtlineare Berechnungen

Lineare Berechnungen (Theorie I. Ordnung) bilden in der Regel gedanklich und rechnerisch den Ausgangspunkt. Grundlage sind dabei folgende Annahmen:

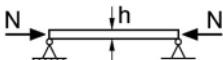
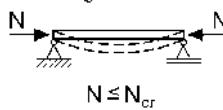
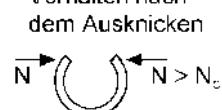
- Der Werkstoff verhält sich im gesamten Tragwerk linearelastisch, d. h., es gilt uneingeschränkt das *Hooke'sche Gesetz*.
- Der Einfluss von Tragwerksverformungen ist so gering, dass sie vernachlässigt werden können und die Gleichgewichtsbeziehungen am **unverformten System** formuliert werden dürfen.
- Strukturelle und geometrische Imperfektionen, d. h. Eigenspannungen, Vorkrümmungen und Vorverdrehungen, können vernachlässigt werden.

Nichtlineare Berechnungen erfordern in der Regel einen höheren Aufwand als lineare. Man unterscheidet **physikalische und geometrische Nichtlinearitäten**. Bei der **physikalischen Nichtlinearität** wird die Annahme „linearelastisches Werkstoffver-

halten“ aufgegeben und das Plastizieren von Tragwerksteilen berücksichtigt, weil dann wirtschaftlichere, d. h. leichtere Konstruktionen ausgeführt werden können. Sofern das Plastizieren nur bei der Tragfähigkeit der Querschnitte ausgenutzt wird, ist diese Vorgehensweise der **Nachweismethode 2** in Tabelle 1.1 zuzuordnen. Die Schnittgrößen werden nach der Elastizitätstheorie berechnet („elastische“ Tragwerksberechnung) und maximal ein Lastzustand zugelassen, bei dem sich **ein** Fließgelenk bildet. Im Gegensatz dazu werden bei der **Nachweismethode 3** plastische Tragfähigkeiten der Querschnitte und des Systems ausgenutzt, d. h. es wird die Ausbreitung von Fließzonen oder die Ausbildung mehrerer Fließgelenke zugelassen.

Während das physikalisch nichtlineare Werkstoffverhalten überwiegend aus wirtschaftlichen Gründen berücksichtigt wird, muss die **geometrische Nichtlinearität** bei Stabilitätsgefährdeten Stahlkonstruktionen unter Sicherheitsaspekten unabdingbar erfasst werden. Relativ große Verformungen führen dabei zu größeren Schnittgrößen und höheren Beanspruchungen im Vergleich zu linearen Berechnungen, so dass entsprechende Nachweise zum Biegeknicken, Biegedrillknicken oder Plattenbeulen geführt werden müssen.

Tabelle 1.3 Unterschiede zwischen Theorie I. und II. Ordnung sowie der geometrisch nichtlinearen Theorie nach [31]

	Theorie I. Ordnung (geometrisch lineare Theorie)	Theorie II. Ordnung	Geometrisch nichtlineare Theorie
Gleichgewicht	am unverformten System	am schwach verformten System	am stark verformten System
Stab unter Druckbelastung			
Stab unter Druck- und Querbelastung			
Wirkliche Verzerrungen	Lineare kinematische Beziehungen		Nichtlineare kinematische Beziehungen
Virtuelle Verzerrungen	Aus linearen kinematischen Beziehungen	Aus nichtlinearen kinematischen Beziehungen - linearisiert -	- nichtlinear -

Die Unterschiede zwischen der geometrisch linearen und nichtlinearen Theorie werden mithilfe von Tabelle 1.3 erläutert. Bei der geometrisch nichtlinearen Theorie wird das Gleichgewicht am **verformten** System formuliert und es werden dabei große Verformungen berücksichtigt. Mit dieser Theorie erhält man genaue Lösungen, die

aber auch einen hohen Rechenaufwand erfordern. Mit der geometrisch nichtlinearen Theorie können sehr große Verformungen zutreffend berechnet und beschrieben werden, die jedoch im Zusammenhang mit Baukonstruktionen schon aus Gründen der Gebrauchstauglichkeit i. A. nicht auftreten und daher in der Regel ohne Bedeutung sind. Im Stahlbau wird daher eine „Theorie II. Ordnung“ eingesetzt, die eine Näherung der geometrisch nichtlinearen Theorie darstellt. Dabei werden das Gleichgewicht am **verformten** System formuliert und aufgrund von Linearisierungen näherungsweise nur mäßige Verformungen berücksichtigt. Die Skizzen in Tabelle 1.3 vermitteln anschaulich die Unterschiede bei den Verformungen. Darüber hinaus werden mit den letzten Zeilen Hinweise für theoretische Grundlagen gegeben. Sie beschreiben, wie die Verzerrungen bestimmt werden, wobei Spannungen mit den „wirklichen Verzerrungen“ ermittelt werden und die „virtuellen Verzerrungen“ zur Formulierung der virtuellen Arbeit in den Abschnitten 2.4.2 und 4.3 dienen. Die Zusammenhänge zwischen linearen, linearisierten und nichtlinearen Beziehungen werden in Abschnitt 1.7 veranschaulicht.

Im Zusammenhang mit geometrisch nichtlinearen Berechnungen ist zu erwähnen, dass die Nachweise in den geltenden Vorschriften, wie z. B. DIN EN 1993-1-1, auf einer Linearisierung nach Theorie II. Ordnung basieren. Diese Näherung ist daher die Grundlage für die vorschriftengerechte Ermittlung von Verformungen, Schnittgrößen und Verzweigungslasten (Eigenwerten). In der Regel sind Berechnungen nach Theorie II. Ordnung im Hinblick auf baupraktische Anwendungsfälle ausreichend genau, da die Verformungen bei Tragwerken aus Stahl normalerweise relativ klein sind. In seltenen Ausnahmefällen können jedoch auch geometrisch nichtlineare Berechnungen erforderlich sein. Dies ist immer dann der Fall, wenn große oder sogar sehr große Verformungen auftreten. Beispiele dazu sind Kunstwerke, die sich im Wind bewegen und bei denen sich die Einzelteile stark verformen.

Zusammenfassend soll hier Folgendes festgehalten werden:

- Nach wie vor wird die **Nachweismethode 1** gemäß Tabelle 1.1 am häufigsten verwendet. Für die Systemberechnungen wird dabei linearelastisches Werkstoffverhalten angenommen, auf dieser Grundlage Schnittgrößen und Spannungen ermittelt und dann Spannungsnachweise geführt.
- Vermehrt kommt auch **Nachweismethode 2** zum Einsatz, bei der die Tragfähigkeit bis zum Erreichen des ersten Fließgelenkes gesteigert werden kann.
- Bei Stabilitätsgefährdeten Stahlkonstruktionen werden das geometrisch nichtlineare Problem linearisiert und die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung berechnet. Diese Linearisierung wird auch bei der Ermittlung von Verzweigungslasten (Eigenwerten) verwendet.

1.5 Bezeichnungen und Annahmen

Im Folgenden werden Bezeichnungen und Annahmen zusammengestellt, die für **Stabtragwerke** benötigt werden. Teilweise gelten sie auch für Flächentragwerke und die FE-Untersuchung von Querschnitten. Zu diesen Themen werden in den Kapiteln 6 und 7 weitere Bezeichnungen und Annahmen ergänzt. Grundlage für die Bezeichnungen sind DIN 1080 und DIN EN 1993.

Größen im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem

Stabtragwerke werden in Stabelemente eingeteilt, die in den **Knoten** miteinander verbunden sind. Gemäß Bild 1.2 können auch innerhalb der Stabelemente Knoten angeordnet werden (Zwischenknoten). Knoten werden im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem (KOS) durch ihre Koordinaten X_k , Y_k und Z_k gemäß Bild 1.4 definiert. Darüber hinaus werden auf dieses KOS alle globalen Verformungs- und Lastgrößen in den Knoten bezogen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist der Index k bei diesen Größen in Bild 1.4 weggelassen worden.

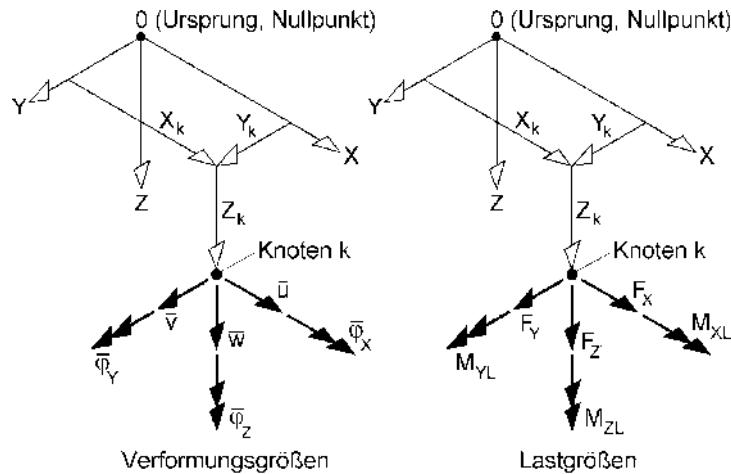


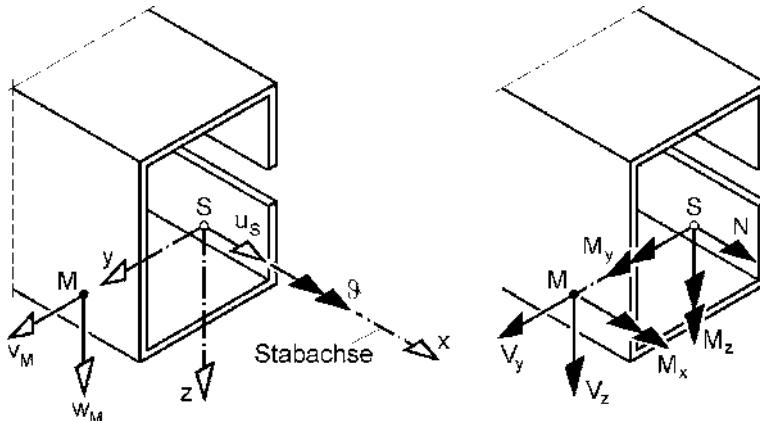
Bild 1.4 Definition von Verformungs- und Lastgrößen im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem

Die Verformungsgrößen im **globalen KOS** werden durch einen **Querstrich** gekennzeichnet, der über den Größen steht. Dieser Querstrich wird auch bei Vektoren und Matrizen verwendet, sofern sie für das globale KOS gelten.

Größen in lokalen x-y-z-Koordinatensystemen

Stabelemente werden auf lokale x-y-z-KOS bezogen und als Stabachse die x-Achse durch den Schwerpunkt S definiert. Die Achsen y und z sind die Hauptachsen des Querschnitts. Gemäß Bild 1.5 werden einige Verschiebungs- und Schnittgrößen auf

den Schwerpunkt S und andere auf den Schubmittelpunkt M ($y = y_M$, $z = z_M$) bezogen. Für die Wölbkrafttorsion wird eine normierte Wölbordinate ω verwendet.



Stabachse x, Hauptachsen y und z, Schwerpunkt S, Schubmittelpunkt M

Bild 1.5 Stab im lokalen Koordinatensystem mit Verschiebungs- und Schnittgrößen

Koordinaten, Ordinaten und Bezugspunkte

- x Stablängsrichtung im lokalen KOS
- y, z Hauptachsen in der Querschnittsebene (lokales KOS)
- ω normierte Wölbordinate
- S Schwerpunkt
- M Schubmittelpunkt

Verschiebungsgrößen

- u, v, w Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung (lokales KOS)
- $\varphi_x = \vartheta$ Verdrehung um die x-Achse
- $\varphi_y \cong -w'$ Verdrehung um die y-Achse
- $\varphi_z \cong v'$ Verdrehung um die z-Achse
- $\psi \cong \vartheta'$ Verdrillung der x-Achse

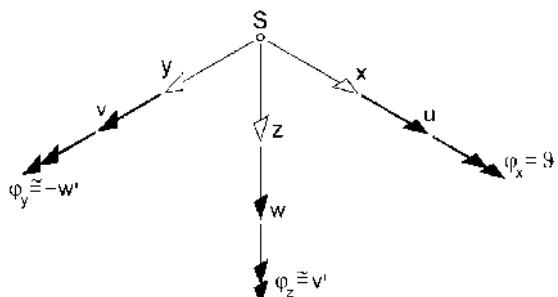


Bild 1.6 Definition positiver Verschiebungsgrößen im lokalen KOS

w', v' und ϑ' sind Ableitungen der Verschiebungsfunktionen nach x, s. Bild 1.6.

Spannungen

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Schubspannungen
σ_v	Vergleichsspannung

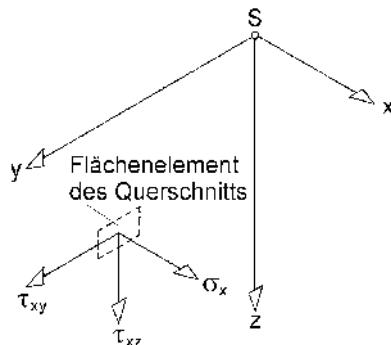
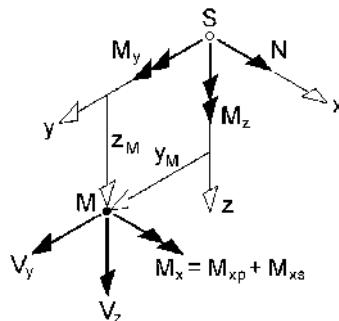


Bild 1.7 Positive Spannungen

Schnittgrößen

Bei der üblichen Definition positiver Schnittgrößen (*Schnittgrößendefinition I*) haben die Schnittgrößen an der **negativen Schnittfläche** Wirkungsrichtungen, die zu den in Bild 1.8 festgelegten Richtungen entgegengesetzt sind. Bei der **Schnittgrößendefinition II** sind die Wirkungsrichtungen an **beiden Schnittflächen** wie in Bild 1.8 definiert. Die beiden Schnittgrößendefinitionen sind in Bild 1.9 für einachsige Biegung mit Normalkraft an einem Stabelement dargestellt. Dabei werden, wie bei der FEM üblich, zur Unterscheidung der Stabelemente und Knoten weitere Indizes verwendet.

N	Längskraft, Normalkraft
V_y, V_z	Querkräfte
M_y, M_z	Biegemomente
M_x	Torsionsmoment DIN EN 1993: T
M_{xp}, M_{xs}	primäres und sekundäres Torsionsmoment DIN EN 1993: T_t, T_w
M_{ω}	Wölbmoment DIN EN 1993: B
M_{rr}	siehe Tabelle 4.1
Index el:	Grenzschnittgröße nach der Elastizitätstheorie
Index pl:	Grenzschnittgröße nach der Plastizitätstheorie
Index d:	Bemessungswert (design)



zusätzliche Schnittgröße M_{ω} in M!

Bild 1.8 Schnittgrößen an der positiven Schnittfläche eines Stabes

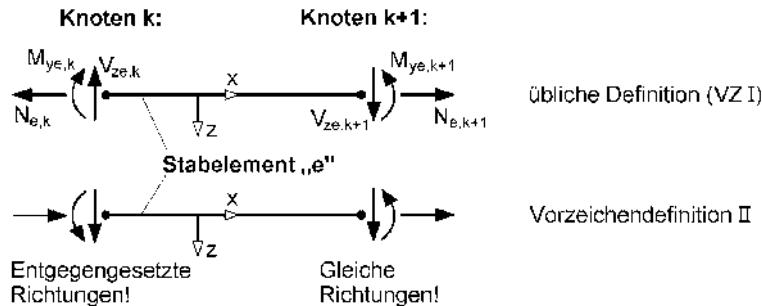


Bild 1.9 Schnittgrößen am Stabelement „e“ für einachsige Biegung mit Normalkraft, Schnittgrößendefinitionen I und II

Lastgrößen

- | | |
|-----------------|-------------------------------------|
| q_x, q_y, q_z | Gleichstreckenlasten im lokalen KOS |
| F_x, F_y, F_z | Einzellasten im globalen KOS |
| m_x | Streckentorsionsmoment (konstant) |
| M_{OL} | Lastwölbbimoment |

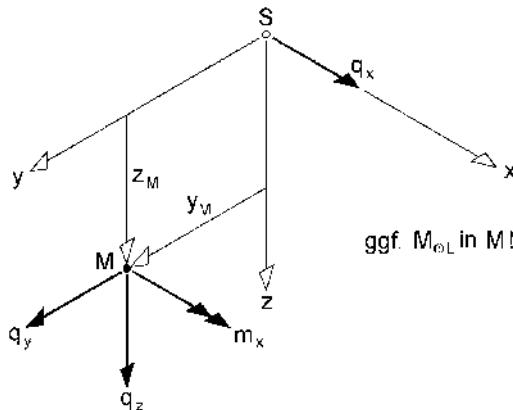


Bild 1.10 Positive Wirkungsrichtungen und Angriffspunkte der lokalen Lastgrößen

Querschnittskennwerte

- | | |
|----------------|------------------------------------|
| A | Fläche |
| I_y, I_z | Hauptträgheitsmomente |
| I_{w} | Wölbwiderstand, DIN EN 1993: I_w |
| I_T | Torsionsträgheitsmoment |
| W_y, W_z | Widerstandsmomente |

S_y, S_z statische Momente

i_M, r_y, r_z, r_ω Größen für Theorie II. Ordnung und Stabilität, s. Tabelle 4.1

$i_p = \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A}}$ polarer Trägheitsradius

Biegeknicken und Biegedrillknicken

N_{cr} ideale Drucknormalkraft (Elastizitätstheorie, Eigenwert)

L_{cr} Knicklänge für Biegeknicken

ε Stabkennzahl für Biegeknicken

α_{cr} Verzweigungslastfaktor des Systems (Eigenwert)

$M_{cr,y}$ ideales Biegedrillknickmoment (Elastizitätstheorie, Eigenwert)

$\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_M$ bezogene Schlankheitsgrade

χ, χ_{LT} Abminderungsfaktoren (LT: Lateral Torsional Buckling)

Weitere Bezeichnungen und Annahmen

Werkstoffkennwerte (isotroper Werkstoff) und Teilsicherheitsbeiwerte

E Elastizitätsmodul $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$

G Schubmodul $G = E/(2 \cdot (1 + \nu)) \approx 8100 \text{ kN/cm}^2$

ν Querdehnzahl, Poissonsche Zahl $\nu = 0,3$

α Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ je K}$ (für $T \leq 100 \text{ }^\circ\text{C}$)

ρ Dichte $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

Die als Bemessungswerte angegebenen *Materialkonstanten* sind in der Regel für Berechnungen anzunehmen.

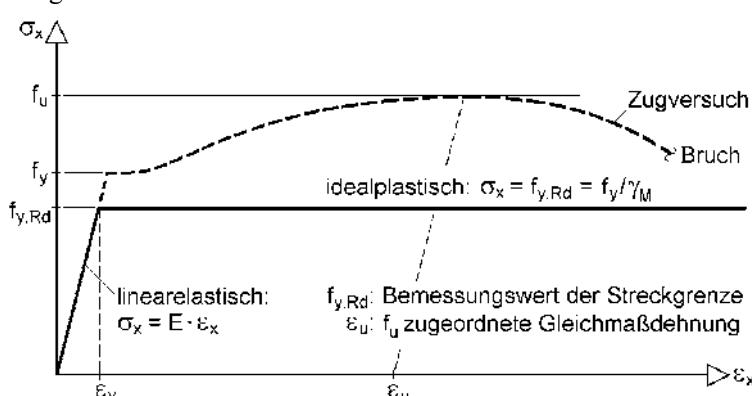


Bild 1.11 Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Baustahl

f_y	Streckgrenze
f_u	Zugfestigkeit
ε_u	Gleichmaßdehnung
ε_{ult}	Bruchdehnung
γ_M	Beiwert für die Widerstandsgrößen (Material)
γ_F	Beiwert für die Einwirkungen (Force)

Die Bezeichnungen f_y , f_u , ε_u und γ_M werden in Bild 1.11 anhand der Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Baustahl erläutert. Bei Stabilitätsnachweisen in Form von Querschnittsnachweisen mit Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung ist bei der Ermittlung der Beanspruchbarkeit von Querschnitten der Wert $\gamma_M = 1,1$ anzusetzen, s. auch Abschnitt 5.1.2.

Matrizen und Vektoren

\underline{s}	Schnittgrößenvektor
\underline{K}	Steifigkeitsmatrix
\underline{G}	geometrische Steifigkeitsmatrix
\underline{v}	Verformungsgrößenvektor
\underline{p}	Lastgrößenvektor

Index e: Element

Ein Querstrich über den Matrizen und Vektoren weist darauf hin, dass sie für das globale Koordinatensystem (X, Y, Z) gelten.

Annahmen und Voraussetzungen

Sofern nicht anders angegeben, gelten folgende Annahmen und Voraussetzungen:

- Es wird ein linearelastisches-idealplastisches *Werkstoffverhalten* gemäß Bild 1.11 vorausgesetzt.
- Auftretende Verformungen sind im Sinne der Stabtheorie klein, so dass geometrische Beziehungen linearisiert werden können.
- Die Querschnittsform eines Stabes bleibt bei Belastung und Verformung erhalten.
- Für zweiachsige Biegung mit Normalkraft werden die *Bernoulli*-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt und der Einfluss von Schubspannungen infolge von Querkräften auf die Verformungen vernachlässigt (schubstarre Stäbe).
- Bei der Wölbkrafttorsion werden die *Wagner*-Hypothese vorausgesetzt und der Einfluss von Schubspannungen infolge des sekundären Torsionsmomentes auf die Verdrehung vernachlässigt.

1.6 Grundlegende Beziehungen

Verschiebungen (lineare Stabtheorie)

Wie bei Stäben allgemein üblich sind y und z die Hauptachsen des Querschnitts und ω ist die normierte Wölbordinate, [12]. Die Längsverschiebung u_s bezieht sich auf den Schwerpunkt S und die Verschiebungen v_M sowie w_M beschreiben die Verschiebung des Schubmittelpunktes M . Für die Stablängsverschiebung u eines beliebigen Querschnittspunktes gilt folgende Beziehung:

$$u = u_s - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y - \omega \cdot \psi \quad (1.1)$$

Der erste Anteil ist die Verschiebung infolge einer Normalkraftbeanspruchung, der zweite und dritte resultiert aus den Biegemomenten und stellt die Verschiebung aufgrund von Querschnittsverdrehungen φ_y und φ_z dar. Dabei können mit Gl. (1.1) nur Verschiebungen erfasst werden, bei denen der Querschnitt eben bleibt. Der vierte Anteil erfasst die Stablängsverschiebung aus Torsionsbeanspruchungen in Abhängigkeit von der Verdrillung ψ . Bild 1.12 veranschaulicht die mit Gl. (1.1) verbundenen Verformungen u des Querschnitts für positive Größen φ_y , φ_z und ψ .

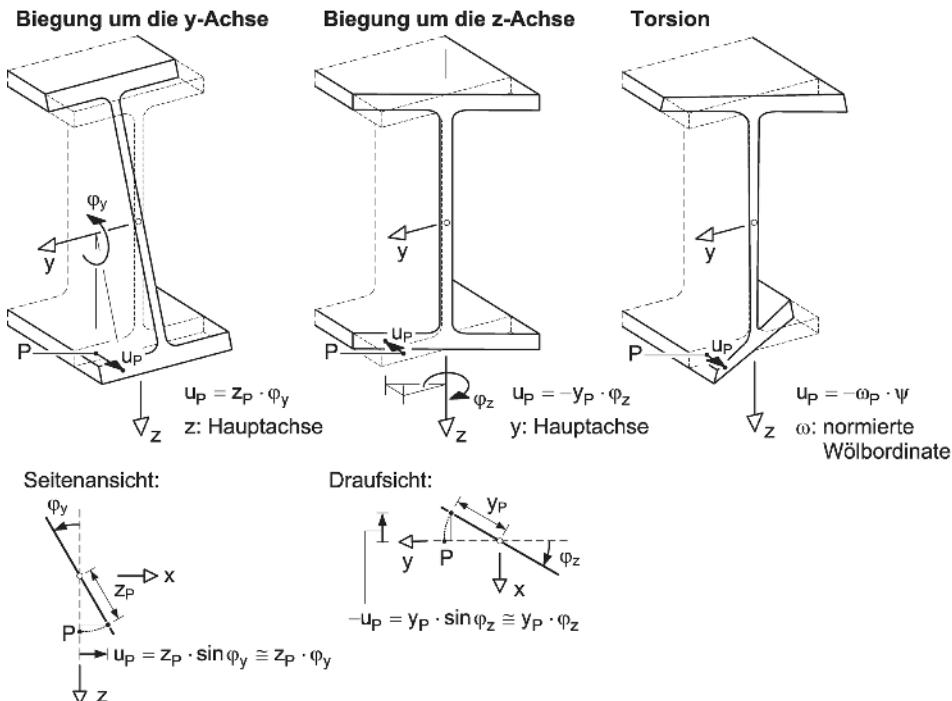


Bild 1.12 Längsverschiebung u eines Punktes P infolge zweiachsiger Biegung und Torsion

Die Verformungen v und w in der Querschnittsebene ergeben sich aus der Verschiebung des Schubmittelpunktes M sowie aus zusätzlichen Verschiebunganteilen, die aus der Verdrehung ϑ resultieren, s. Bild 1.13:

$$v = v_M - (z - z_M) \cdot \vartheta \quad (1.2)$$

$$w = w_M + (y - y_M) \cdot \vartheta \quad (1.3)$$

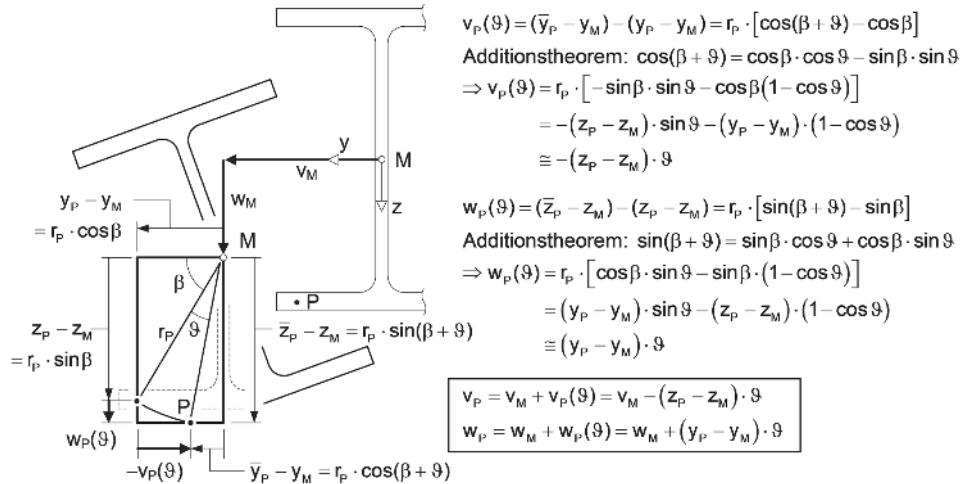


Bild 1.13 Verschiebungen v und w eines Punktes P

Verzerrungen (lineare Stabtheorie)

Die Verzerrungen werden durch geometrische Beziehungen mit den Verschiebungsgrößen verknüpft. Nach [12] gelten für die lineare Stabtheorie die nachstehenden Beziehungen, wobei für die Verschiebungen die Gln. (1.1) bis (1.3) berücksichtigt werden. Außerdem gilt wegen der Vernachlässigung sekundärer Schubverformungen $v'_M = \varphi_z$, $w'_M = -\varphi_y$ und $\psi = \vartheta'$.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_s - y \cdot \varphi'_z + z \cdot \varphi'_y - \omega \cdot \vartheta'' \quad (1.4a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[-(z - z_M) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.4d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[(y - y_M) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.4e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\vartheta + \vartheta = 0 \quad (1.4f)$$

Werkstoffgesetz und Spannungen

Mit dem *Werkstoffgesetz* wird der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen beschrieben. Unter Vernachlässigung der Querdehnungen ergeben sich mit dem *Hooke'schen* Gesetz, also dem Materialgesetz für isotropes, linearelastisches *Werkstoffverhalten*, und den Verzerrungen der Gln. (1.4) folgende Spannungen:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot (u'_s - y \cdot \varphi'_z + z \cdot \varphi'_y - \omega \cdot \vartheta'') \quad (1.5)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \left[-(z - z_M) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.6)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \left[(y - y_M) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.7)$$

Schnittgrößen

Die Spannungen können zu resultierenden Schnittgrößen zusammengefasst werden. Dabei ist zu beachten, dass die Normalkraft und die Biegemomente im Schwerpunkt angreifen, während die Querkräfte, die Torsionsmomente und das Wölbmoment im Schubmittelpunkt wirken, vgl. Bild 1.8.

Tabelle 1.4 Schnittgrößen als Resultierende der Spannungen

Bedingung	Schnittgröße	Definition
$\sum F_x = 0$:	Normalkraft	$N = \int_A \sigma_x \cdot dA$
$\sum V_y = 0$:	Querkraft	$V_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$
$\sum V_z = 0$:	Querkraft	$V_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$
$\sum M_x = 0$:	Torsionsmoment	$M_x = \int_A [\tau_{xz} \cdot (y - y_M) - \tau_{xy} \cdot (z - z_M)] \cdot dA = M_{xp} + M_{xs}$
$\sum M_y = 0$:	Biegemoment	$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$
$\sum M_z = 0$:	Biegemoment	$M_z = - \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$
	Wölbmoment	$M_\omega = \int_A \sigma_x \cdot \omega \cdot dA$

Aufteilung der linearen Theorie schubstarrer Stäbe in vier Teilprobleme

In Tabelle 1.5 sind vier Teilprobleme – zweiachsige Biegung mit Normalkraft und Wölbkrafttorsion – der linearen Theorie schubstarrer Stäbe zusammengestellt. Die Tabelle enthält eine Zuordnung der Lastgrößen, Verformungen und Schnittgrößen sowie Angaben zum Gleichgewicht am Stabelement und zur Normalspannung σ_x .

Tabelle 1.5 Aufteilung der linearen Stabtheorie nach [12]

	„Normal-kraft“	„Biegung um die z-Achse“	„Biegung um die y-Achse“	„Torsion“
Lastgrößen	$q_x; F_x$	$q_y; F_y; M_{zL}$	$q_z; F_z; M_{yL}$	$m_x; M_{xL}; M_{\omega L}$
Verfor-mungen	$u = u_s$	$v = v_M$ $u = -y \cdot v'_M$	$w = w_M$ $u = -z \cdot w'_M$	ϑ $u = -\omega \cdot \vartheta'$ $v = -(z - z_M) \cdot \vartheta$ $w = (y - y_M) \cdot \vartheta$
Schnitt-größen	N	M_z V_y	M_y V_z	M_ω $M_x = M_{xp} + M_{xs}$
Gleich-gewicht	$N' = -q_x$	$M'_z = -V_y$ $V'_y = -q_y$	$M'_y = V_z$ $V'_z = -q_z$	$M'_{\omega} = M_{xs}$ $M'_{x} = -m_x$
$\sigma_x =$	$\frac{N}{A}$ $= E \cdot u'_s$	$-\frac{M_z}{I_z} \cdot y$ $= -E \cdot y \cdot v''_M$	$\frac{M_y}{I_y} \cdot z$ $= -E \cdot z \cdot w''_M$	$\frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega$ $= -E \cdot \omega \cdot \vartheta''$

1.7 Linearisierung

Wie im Abschnitt 1.4 erläutert, wird das Gleichgewicht bei geometrisch nichtlinearen Berechnungen am verformten System formuliert. Dabei entstehen für die Beschreibung von Verformungen und den damit zusammenhängenden Verzerrungen nichtlineare Beziehungen in Form von trigonometrischen Funktionen. Allgemein lassen sich diese nach [4] durch folgende Reihen entwickeln, was beispielhaft an einer Ver-drehung φ veranschaulicht wird:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, \quad |\varphi| < \infty \quad (1.8)$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots, \quad |\varphi| < \infty \quad (1.9)$$

Bei der Theorie II. Ordnung werden die auftretenden geometrischen (trigonometri-schen) Beziehungen zur Beschreibung der Verformungen linearisiert, so dass die Theorie damit ein Gleichgewicht am „schwach“ verformten System widerspiegelt, s. Tabelle 1.3. Definitionsgemäß werden als Näherung bei der Formulierung entspre-

chender Gleichgewichtsbeziehungen höchstens zweifache Produkte der Verformungen berücksichtigt, so dass im Sinne der Linearisierung maximal quadratische Terme einer Verformung auftreten:

$$\sin \varphi \cong \varphi \quad (1.10)$$

$$\cos \varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad (1.11)$$

Da von kleinen Verformungen ausgegangen wird, entstehen durch die höheren Reihenglieder Ausdrücke, die im Hinblick auf die Genauigkeit von untergeordneter Bedeutung sind. Bei linearen Formulierungen (vgl. Tabelle 1.3) werden die trigonometrischen Beziehungen stets durch das jeweils 1. Reihenglied beschrieben:

$$\sin \varphi \cong \varphi \quad (1.12)$$

$$\cos \varphi \cong 1 \quad (1.13)$$

In den Abschnitten 2.4.2 und 4.3 wird das Gleichgewicht für Stäbe mithilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten formuliert. In den entstehenden Arbeitsgleichungen werden entsprechende Linearisierungen vorgenommen. Um hierzu einen Überblick zu verschaffen, soll am Beispiel der inneren virtuellen Arbeit infolge der Normalspannungen an dieser Stelle vorab die Linearisierung verdeutlicht werden. Gemäß Abschnitt 2.4.2 leisten die Normalspannungen an den virtuellen Verzerrungen Arbeit:

$$\delta W_{\text{int}}(\sigma_x) = - \int_A \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx = - \int_A \delta \varepsilon_x \cdot E \cdot \varepsilon_x \cdot dA \cdot dx \quad (1.14)$$

Die Dehnung einer Faser in der verformten Lage kann nach Abschnitt 4.3 und den Gln. (4.28) bzw. (4.29) durch folgende kinematische Beziehung beschrieben werden:

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + 2u' + u'^2 + v'^2 + w'^2} - 1 \cong u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \quad (1.15)$$

Die in Gl. (1.15) vorgenommene Näherung erfolgt mithilfe einer Reihenentwicklung für die Wurzel und der Berücksichtigung von Reihengliedern, die entsprechend der vorherigen Ausführungen zu maximal zweifachen Produkten der Verformungen führen, vgl. auch Gl. (1.9) mit (1.11). Es handelt sich somit um eine linearisierte kinematische Beziehung. Die lineare Beziehung wird durch den linearen Anteil der Gl. (1.15) beschrieben:

$$\varepsilon_x \cong u' \quad (1.16)$$

Die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_x$ ergeben sich aus der 1. Variation der Gln. (1.15) bzw. (1.16). Da für die Variationsrechnung die Regeln der Differentialrechnung gelten, ergibt sich mit der Produktregel:

$$\delta \varepsilon_x \cong \delta u' + (\delta v' \cdot v' + \delta w' \cdot w') \quad (1.17)$$

$$\delta \varepsilon_x \cong \delta u' \quad (1.18)$$

Wie bei den wirklichen Verzerrungen handelt es sich in Gl. (1.17) um die linearisierte und in Gl. (1.18) um die lineare Beschreibung der virtuellen Verzerrungen.

Gemäß Tabelle 1.3 werden bei der Theorie I. Ordnung (lineare Theorie) die wirklichen und virtuellen Verzerrungen durch die linearen kinematischen Beziehungen nach Gl. (1.16) bzw. (1.18) beschrieben, was mit Gl. (1.14) zur folgenden inneren virtuellen Arbeit der Normalspannungen führt:

$$\delta W_{\text{int}}(\sigma_x) = - \iint_A \delta u' \cdot E \cdot u' \cdot dA \cdot dx \quad (1.19)$$

Im Hinblick auf die Theorie II. Ordnung wird nach Tabelle 1.3 für die wirklichen Verzerrungen der lineare Zusammenhang nach Gl. (1.16) berücksichtigt, während für die virtuellen Verzerrungen der linearisierte Ausdruck nach Gl. (1.17) genutzt wird. Die innere virtuelle Arbeit nach Gl. (1.19) ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}(\sigma_x) &= - \iint_A \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx \\ &= - \iint_A [\delta u' + (\delta v' \cdot v' + \delta w' \cdot w')] \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx \\ &= - \iint_A [\delta u' \cdot \sigma_x + (\delta v' \cdot v' + \delta w' \cdot w') \cdot \sigma_x] \cdot dA \cdot dx \\ &= - \iint_A [\delta u' \cdot E \cdot u' + (\delta v' \cdot v' + \delta w' \cdot w') \cdot \sigma_x] \cdot dA \cdot dx \end{aligned} \quad (1.20)$$

Mit Gl. (1.20) wird deutlich, dass die gewählte Vorgehensweise erneut zu maximal zweifachen Produkten der Verformungen führt. Würden für die wirklichen Verzerrungen ebenfalls linearisierte (und nicht lineare) Ausdrücke berücksichtigt, hätte dies höhere Produkte der Verformungen zur Folge, die im Sinne der Theorie II. Ordnung keine Berücksichtigung fänden. Im Vergleich zu Gl. (1.19) (der Theorie I. Ordnung) sind in Gl. (1.20) zusätzliche Anteile entstanden, die von den Normalspannungen σ_x abhängen. Da im Zusammenhang mit den wirklichen Spannungen σ_x die linearen Verzerrungen definiert sind, handelt es sich dabei formal um den Spannungszustand, der der Theorie I. Ordnung entspricht. Im Zusammenhang mit Abschnitt 4.3 wird deutlich, dass sich durch Lösen der Flächenintegrale dA in Gl. (1.20) entsprechende Schnittgrößen ergeben, die dann auch nach Theorie I. Ordnung in die entstehende Steifigkeitsbeziehung (geometrische Steifigkeitsmatrix) der Theorie II. Ordnung einfließen.

1.8 Software/Downloads

Für die Berechnungsbeispiele in dem vorliegenden Buch und für ergänzende Untersuchungen wurden im Wesentlichen folgende EDV-Programme angewendet:

- FE-STAB
- FE-Rahmen
- FE-Beulen
- FE-STAB-FZ
- QSW-FE
- QSW-FE ML

Hierbei handelt es sich um Programme, die von wissenschaftlichen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Stahl-, Leicht- und Verbundbau der Ruhr-Universität Bochum von 1998 bis 2012 erstellt wurden. Informationen zu *FE-STAB*, *FE-Rahmen*, *FE-Beulen* und vielen weiteren Programmen finden sich auf www.ruhr-uni-bochum.de/stahlbau und www.kindmann.de. Sie stehen dort auch zum kostenlosen Download zur Verfügung. Erläuterungen zum Programm *FE-STAB-FZ* finden sich in Abschnitt 10.7.2. Für Hinweise zu den Programmen *QSW-FE* und *QSW-FE ML* wird auf [37] verwiesen.

Zu Vergleichszwecken und für weiterführende Untersuchungen sind auch Berechnungen mit den folgenden Programmen durchgeführt worden:

- | | |
|------------|---|
| • RSTAB | Ing.-Software Dlubal GmbH, Tiefenbach |
| • RFEM | Ing.-Software Dlubal GmbH, Tiefenbach |
| • BT II | Friedrich + Lochner GmbH, Stuttgart |
| • DRILL | FIDES DV-Partner GmbH, München |
| • ABAQUS | ABAQUS, Inc., Providence, Rhode Island, USA |
| • ANSYS | ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania, USA |
| • SOFiSTiK | SOFiSTiK AG, Oberschleißheim |
| • LTBeam | cticm, St Rémy les Chevreuse, Frankreich |
| • EBPlate | cticm, St Rémy les Chevreuse, Frankreich |

Die Programme LTBeam und EBPlate stehen zum kostenlosen Download zur Verfügung, s. www.cticm.com.

Anmerkung: Das Buch „*Kindmann/Frickel: Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit*“ [12] steht unter www.kindmann.de zum kostenlosen Download zur Verfügung.