

Ulrich Nortmann

Im Kopf die Unendlichkeit

Fesselung und Entfesselung
des Denkens durch
Mathematik

mentis
MÜNSTER

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte
bibliographische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Gedruckt auf umweltfreundlichem, chlorfrei gebleichtem
und alterungsbeständigem Papier ISO 9706

© 2015 mentis Verlag GmbH
Eisenbahnstr. 11, D-48143 Münster
www.mentis.de

Alle Rechte vorbehalten. Dieses Werk sowie einzelne Teile desselben sind
urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich
zulässigen Fällen ist ohne vorherige Zustimmung des Verlages nicht zulässig.

Printed in Germany

Einbandgestaltung: A. Braungart, unter Verwendung des Gemäldes »Liegender
Akt« von H. G. Schirner

Druck: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten

ISBN 978-3-89785-073-6 (Print)

ISBN 978-3-95743-984-0 (E-Book)

Vorwort

Bücher über Mathematik zu schreiben, ist oft eine riskante Sache. Nämlich dann, wenn man sich mit diesen Büchern nicht in erster Linie an Leserinnen und Leser vom Fach wendet. Das ist hier der Fall. Ich habe das unvermeidliche Risiko abzumildern versucht. Zum einen durch eine Organisation des Stoffes, bei der ich kaum etwas an höheren mathematischen Kenntnissen voraussetze. Was ich benötige, wird entwickelt oder mitgeteilt. Zum anderen, indem ich mir so zu schreiben erlaube, dass über weite Strecken die Kluft zu der Art, wie ich über dieselben Dinge auch reden könnte, mündlich reden, nicht zu breit wird.

Auf Fußnoten und eine Literaturliste habe ich bewusst verzichtet. Es muss möglich sein, ein wissenschaftlich gehaltvolles Buch, das im Übrigen einen gewissen Unterhaltungswert haben soll, auch ohne das zu schreiben, was man auf Deutsch ziemlich abschreckend den »formalen wissenschaftlichen Apparat« nennt. Gelegentlich kommen aber im laufenden Text Literaturhinweise vor. Für Leser, die solchen Hinweisen nachgehen und weiterlesen möchten, wird es, in Zeiten der vereinfachten Informationsbeschaffung über das Internet, ein Leichtes sein, sich die vollständigen bibliographischen Angaben zu besorgen. Quellen, von denen die Darstellung darüber hinaus abhängt, nenne ich am Schluss. *Ceterum censeo*: Bei dem, was mehr als schlichte Information ist und denkende Aneignung erfordert, hat auch das Internet nichts einfacher gemacht, als es vorher war. Daher empfiehlt es sich nach wie vor, Bücher zu lesen.

Wenn man das vorliegende Buch einem etablierten Theoriegebiet zuordnen will, dann am ehesten so: Es geht um Philosophie der Mathematik – plus Wissenschaftsgeschichte plus Dichtung plus Bildung plus Sozialpsychologie, nebst Psychopathologie, des Wissenschaftsbetriebs. Und schließlich: Wo Wissenschafts-»Kulturen« in den Blick geraten, da ist dann auch mit kulturkritischen Anmerkungen zu rechnen.

Ein Mangel vieler bekannter Beiträge zu jenem Gebiet der Wissenschaftsphilosophie, der Mathe-Philosophie, liegt darin, dass in ihnen wenig Mathematik vorkommt. Wie soll man es ohne Mathematik vor Augen

anstellen, bestimmten, vielleicht ziemlich abstrakten Reflexionen über Mathematik mit Verständnis zu folgen? Gutes Verständnis braucht an sich immer die Chance zur gedanklichen Veranschaulichung, zur Konkretisierung durch Rückgriff auf das Beispiel, den authentischen Fall. Interessenten, die bereits reichlich Mathematik kennen, werden damit kein Problem haben. Aber alle anderen? Dieses Buch mag seine Defizite haben. Den Mangel des Mathematik-Mangels wird man ihm wohl nicht vorwerfen können.

Allerdings gilt auch hier, wie so oft, *one person's gift is another person's poison*. Es geht in diesem Buch um etwas mehr als eine bloß homöopathische Gift-Dosis an authentischer Mathematik. Als eine gar nicht schädliche Nebenwirkung für den Philosophie-Unterricht an Schulen erhoffe ich mir, dass deutlich wird: Das Fach Philosophie ist durchaus noch etwas anderes als Ethik und Religionsersatz. Viele Fächer des schulischen Kanons, an die im Zusammenhang mit Philosophie in den Gymnasien gewöhnlich nicht gedacht wird, rufen geradezu danach, dem Philosophieren eine Chance zu geben. Warum nicht in den Mathe-Unterricht hinein (oder den Physik-Unterricht oder oder ...) – und dort ab und zu einen gehaltvollen philosophischen Exkurs einbauen? Dies könnte dann auch andere Menschen als die, welche sich üblicherweise für ein Philosophie-Studium entscheiden, neugierig auf das Fach machen. Es täte dem Fach gut.

Während ich das Buch geschrieben habe, stand mir mitunter vor Augen, dass ich rund 50 Jahre älter bin als meine Tochter. Das ist keine Kleinigkeit, und so ist nicht klar, ob ich noch anwesend sein werde, wenn für sie das Erwachsenen-Alter beginnt. Es ist daher schon aus Gründen der Altersdifferenz denkbar, dass es zwischen uns beiden niemals Gespräche über die Themen dieses Buches geben wird. Doch mich erfreut der Gedanke, dass für sie, wenn mit ihrem jungen Leben alles gut weitergeht, immerhin später die Möglichkeit bestehen wird, etwas von dem durch Lektüre aufzunehmen, was ihren Vater zeitweilig intensiv beschäftigt hat. Deshalb widme ich ihr dieses Buch. Ja, kleine Sophia Henrike: für dich. Und klar, auch dann für dich, wenn die Entwicklung deiner Interessen dich irgendwann in eine ganz andere Richtung lenken sollte. Bis vor kurzem sagte sie, achtfährig, sowieso noch: »Ich hasse Mathe.« Warten wir's mal ab.

Bonn, im September 2014

Ulrich E. Nortmann

Die mathematische Begabung zeigt sich meist um das sechzehnte Lebensjahr herum; dies kann aber durch einen Unterricht verzögert werden, welcher dem Beweisbegriff keinen Platz einräumt ...

Jean Dieudonné, *Geschichte der Mathematik 1700–1900. Ein Abriss*, 1978; hier 3 der deutschen Ausgabe 1985.

Sicher war, dass er komplizierte Rechnungen im Kopf ausführte, was selbst Binet entsetzte.

Gustave Flaubert, *Madame Bovary*, 1857; Übers. W. Techtmeier.

1 | Phantasie und Folter

1.1 Goethe, Logik, Gruppentheorie

»Das Beste daran ist, dass man Dinge beweisen kann: kristallklar und absolut zwingend.« – »Zwingend? Ich hasse Zwang. An Tagen, an denen der Zwang auf dem Stundenplan steht, habe ich morgens schon Magendrücken.« Oder, weniger anonym, Elias Canetti (1905–1994) mit einem Wort aus seinen *Aufzeichnungen* 1942: »Der Beweis ist das Erb-Unglück des Denkens.« An der Mathematik scheiden sich schon lange die Geister.

Oft wird sie auch einfach als vernachlässigbare Größe abgetan. Einer, der den Anspruch hatte, genau darüber Bescheid zu wissen, was man wissen muss und was bildungsmäßig unnötig ist, schiebt die Naturwissenschaften mit leichter Hand ins Abseits des Bildungsfeldes. Dabei ist vermutlich die Mathematik, mit den Naturwissenschaften wie so oft im selben Topf gesehen, mitgemeint:

»Naturwissenschaftliche Kenntnisse müssen zwar nicht versteckt werden, aber zur Bildung gehören sie nicht.«

(D. Schwanitz, *Bildung. Alles, was man wissen muss*, 1999; Zweiter Teil, Kap. V, »Was man nicht wissen sollte.«)

So so, man staunt. Und es ist, man muss es zugeben, in seiner frechen Apodiktik irgendwie sogar beeindruckend. Du hast aber vielleicht doch das unbestimmte Gefühl, es sollte so etwas wie einen überzeugenden Anti- oder Komplementär-Schwanitz geben? Ein Buch, mit dem nicht der Eindruck vermittelt wird, lebendige Bildung, Kultiviertheit und intellektuelle Kreativität hätten ihren Stammsitz im »Fürstentum« Geisteswissenschaften und nur dort? Gut, dann lass' uns über Mathematik reden. Die Frage, ob nicht Mathematik selbst eine Geisteswissenschaft ist, kommt später dran. – Sie ist es nicht (was jedoch keinen Grund zur Beunruhigung darstellt), ebenso wenig wie eine Naturwissenschaft.

Kreative Freiheit also, ja oder nein? Im Untertitel unseres Buches ist immerhin auch von einer Entfesselung des Denkens die Rede. Und der andere Begriff, *Fesselung*, gibt sich vorerst nicht eindeutig zu erkennen: In Fesseln zu liegen wäre schlecht; andererseits, etwas Spannendes kann dich im positiven Sinne, ohne unangenehmen Zwang, fesseln. Aber erscheint jene Entfesselungs-Idee nicht doch ziemlich abwegig? Ausgerechnet durch Mathematik soll das Denken entfesselt werden? Wird es nicht eher, nur im negativen Sinne, in Fesseln gelegt, kannst du nicht geradezu erdrosselt werden durch Mathe? Beim mathematischen Argumentieren, sagt man, geht es »stringent« zu. Aber lateinisch *stringere* heißt leider unter anderem: zusammenziehen. Was wird zusammengezogen, die drosselnde Schnur etwa?

Die Mathematik und ihre ehrenwerte Verwandtschaft: Logik, Physik, mathematische Ökonomie ... haben in der Tat, wenn man sich z. B. die »schöne« Weltliteratur ansieht, im Allgemeinen keine sonderlich gute Presse. Drossel-, Folter- und Deformationsideen spielen eine erhebliche Rolle. An den entsprechenden Literaturstellen geht es oft eher gruselig als schön zu.

Nehmen wir zuerst ein schon recht altes und noch eher heiter daherkommendes Beispiel, datierend von irgendwann zwischen 1770 und 1830. Der in Goethe *et al.* bewanderte Bildungsbürger kennt es unter der Losung »Zuerst *Collegium logicum*«:

»Da wird der Geist euch wohl dressiert,
In Spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz' und Quer,
Irrlichteliere hin und her.«

Johann Wolfgang (von) Goethe starb in dem thüringischen Provinzstädtchen Weimar am 22. März 1832, hochbetagt im Alter von 82 Jahren. Ein ungewöhnlich schwerer Brocken, die *Faust*-Dichtung, hat ihn über einen Zeitraum von insgesamt rund 60 Jahren, noch bis kurz vor seinem Tode, beschäftigt. Daher eben die ziemlich unbestimmte Datierung. Hier haben wir nun die Verse 1912 bis 1917 aus »Faust. Der Tragödie erster Teil« gesehen. Das Ganze ist keine spezielle Mathematik-Tragödie. Es hat allerdings ziemlich viel mit dem Bemühen um Erkenntnis zu tun (im *Faust* ist das am ehesten: die Naturerkenntnis), mit den dabei auftretenden Schwierigkeiten und Frustrationen. Entscheidend sind in diesem Fall, da wir von Folterphantasien sprechen, natürlich die Spanischen Stiefel; und die sind kein Modegag.

Jedoch der Reihe nach! Der Dr. Heinrich Faust, Naturwissenschaftler, Arzt und Privatlehrer, ist des Lebens ziemlich überdrüssig. Er wollte in geistigen Höhenflügen zu aufregenden Wahrheiten vorstoßen. Etwas hat ihn aber fertiggemacht: täglicher Kleinkram (dieser »mag als Haus und Hof, als Weib und Kind erscheinen«, Vers 648); dauernde Hemmung durch die Eigengesetzlichkeit immer störend sich hineindrängender Materie (es »drängt immer fremd und fremder Stoff sich an«, Vers 635). Es hat ihn bis in die Nähe des Suizids getrieben. Da tritt der Teufel in Gestalt eines gewissen lichtscheuen »Mephistopheles«, kurz »Mephisto«, auf den Plan.

Wenn es eine kleine bildungshuberische Zwischenbemerkung sein darf: »Mephistopheles« bzw. »Mephisto« ist ein merkwürdiges Wort. Erscheint vertraut nur durch die Verwendung als Markenname von Schuhen eher biederer als teuflischer Art. Auf die Schuhe kommen wir sehr viel später zurück. Möglicherweise ist Folgendes die Etymologie: Nimm griechisch *mē* (= nicht) plus griechisch *phōs* (= Licht, Genitiv: *phōtos*) plus griechisch *philēsas* (= Liebender), ergibt zunächst *mē-phōtos-philēs(-as)*, also *mephotosphiles*, gleich: »einer, der kein Liebender des Lichts ist«. Mit etwas Lautverschiebung und s-Umsetzung erhältst du schließlich den Mephistopheles. Passend zur Dunkelbeziehung ist Mephisto im *Faust* der Verwandlung in einen schwarzen Pudel fähig. – Was ein Schwanitz-Musterschüler ist, sollte sowas können. Können wir's auch?

Die dunkle Gestalt unterbreitet dem Doktor das Angebot, ihm das Leben, das irdische, durch allerlei geeignete zauberische Dienstleistungen wieder schmackhaft werden zu lassen. Für angemessene Gegenleistungen, versteht sich, die Faust – d. h. die Seele Fausts – nach seinem Tod erbringen soll. Der gelehrte und gequälte Mann schlägt ein. Er bringt in der durch Mephisto neu geweckten Hoffnung auf ein weniger ödes Leben gleich schon einmal nicht mehr den Nerv auf, den nächsten sich ankündigenden Schüler im Arbeitszimmer zum Privatunterricht zu empfangen. Daher verkleidet sich dann Mephisto als Faust, nimmt den Schüler, der sich voll der Ehrfurcht dem vermeinten Tempel der Wissenschaft nähert, in Empfang und macht sich einen Spaß daraus, den ziemlich Wehrlosen systematisch durch den Kakao zu ziehen. In dieser Stimmung bringt Mephisto die *Collegium-logicum*-Verse heraus.

»Collegium logicum«, das ist die Logik-Vorlesung. »Kolleg« ist ein altmodisches Wort für Universitäts-Vorlesungen. Aber nicht gar so alt. Ich z. B. habe in den 1970er Jahren, in der relativ traditionsbewussten Philosophie, noch »Kollegs« gehört. In diesen Kontext gehören auch »Kolleggelder«, wie sie in den Jenaer Impressionen eines späteren Abschnitts des Buches auftauchen: von den Teilnehmern an Vorlesungen erhobene Gebühren, die

den Dozenten eine willkommene Nebeneinnahme verschafften. Goethe, der dem Wunsch seines Vaters gemäß Jurist werden sollte, kannte diese Art von Veranstaltungen durch sein Studium der Rechtswissenschaft, dem er in den 1760er Jahren in Leipzig nachging. Dort gehörten damals auch Philosophie und Logik, man kann sagen: Argumentationslehre, zum Studienprogramm. Nicht also geradezu Mathematik, jedenfalls nicht für Johann Wolfgang in der von ihm gewählten Fakultät. Doch wird nicht gerade in der Mathematik, beim Aufziehen komplexer Beweis-Argumentationen, in paradigmatischer Weise Schritt für Schritt streng *logisch* argumentiert?

In einem weiteren, eher umgangssprachlichen Sinn des Wortes »logisch« ist das sicher richtig. Aber wir sind damit schon bei einer Mathematik-epistemologischen Hauptfrage. »Epistemologisch« heißt: erkenntnistheoretisch. Das deutsche Wort, an sich vorzuziehen, gibt sich nicht so gut für Zusammensetzungen her. – Ob es nämlich mit dem streng logischen Argumentieren in der Mathematik auch im engeren Sinne des Wortes »logisch« stimmt, das ist die Frage; was eine gar nicht so einfache zu klärende Sache ist. Das Problem hat unter der Überschrift »Logizismus oder Nicht-Logizismus?« eine Menge Denk-Anstrengung von Leuten auf sich gezogen, die sich dem verschrieben hatten, was man mathematische Grundlagenforschung nennen kann. Wir werden uns damit noch ausgiebig beschäftigen – und dabei deutlich zu machen haben, warum der Logizismus wahrscheinlich falsch ist: Kapitel 3.

Aber egal, es gibt diese auffallende Eigentümlichkeit des mathematischen Argumentierens: Das Denken tritt, wenn es mit dem Entdecken, der »Heuristik«, fertig geworden ist, in Form von »Beweisen« auf; von Beweisen, die Schritt für Schritt in anscheinend unerbittlicher Strenge zum angestrebten Theorem, Korollar oder Hilfssatz als dessen Ziel hinführen. So dass am Ende das von den einen herbeigesehnte, von anderen womöglich gehasste *quod erat demonstrandum* (= was zu beweisen war), kurz: *q. e. d.*, hingesetzt werden kann. Heute ziehen viele das Zeichen \square als Markierung für das Ende von Beweisen vor. Man will nicht mit Restbeständen von Latein unnötig irritieren. Verhasst, ob nun *q. e. d.* oder \square , ist dies alles vielleicht deshalb, weil es wie der abschließende, eine unangenehme Art von Selbstzufriedenheit signalisierende Triumphgestus derer wirkt, die es können – und du kannst es vielleicht nicht.

Das Beharren auf einer solchen zielstrebigem Unerbittlichkeit, das keine phantasievolle Abschweifung, nicht den spontan eingeschobenen Schnörkel, nicht den raschen Gedankensprung dulden will: Das alles heißt für Mephisto, der den anklopfenden Wissenschafts-Novizen ordentlich verunsichern möchte, das Denken in Spanische Stiefel zu zwingen.