

INHALT

Einleitung des Herausgebers	XIII
1. Ziele der <i>Grundlagen der Arithmetik</i>	XIV
2. Hauptprobleme und Inhalt der <i>Grundlagen</i>	XV
3. Zur Beurteilung der <i>Grundlagen</i>	XX
Abkürzungen und Zitierhinweise	XXIII

Gottlob Frege *Die Grundlagen der Arithmetik*

Einleitung	3
§ 1. In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf die Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar.	13
§ 2. Die Prüfung muss sich schliesslich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises.	13
§ 3. Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, apriori oder aposteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke.	14
§ 4. Die Aufgabe dieses Buches.	15
I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze.	16
Sind die Zahlformeln beweisbar?	16
§ 5. Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt.	16
§ 6. Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Grass- manns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft.	17
§ 7. Mills Meinung, dass die Definitionen der einzelnen	

	Zahlen beobachtete Thatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet.	19
§ 8.	Zur Rechtmässigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Thatsachen nicht erforderlich. 	21
	Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten?	22
§ 9.	Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen.	22
§ 10.	Gründe dagegen, dass die Additionsgesetze inductive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induction ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen.	23
§ 11.	Leibnizens „Eingeboren“.	25
	Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch-apriori oder analytisch?	26
§ 12.	Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnissgrund.	26
§ 13.	Unterschied von Arithmetik und Geometrie.	28
§ 14.	Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet.	28
§ 15.	Ansichten von Leibniz und St. Jevons.	29
§ 16.	Dagegen Mills Herabsetzung des „kunstfertigen Handhabens der Sprache.“ Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten.	29
§ 17.	Unzulänglichkeit der Induction. Vermuthung, dass die Zahlgesetze analytische Urtheile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Werthschätzung der analytischen Urtheile.	30
II.	Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl.	32
§ 18.	Nothwendigkeit den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen.	32
§ 19.	Die Definition darf nicht geometrisch sein.	32
§ 20.	Ist die Zahl definirbar? Hankel. Leibniz.	33

Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äussern Dinge?	34
§ 21. Meinungen von M. Cantor und E. Schröder.	34
§ 22. Dagegen Baumann: die äussern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab.	34
§ 23. Mills Meinung, dass die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar. 	36
§ 24. Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden.	36
§ 25. Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen.	38
Ist die Zahl etwas Subjectives?	39
§ 26. Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung passt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objectives.	39
§ 27. Die Zahl ist nicht, wie Schloemilch will, Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe.	41
Die Anzahl als Menge.	43
§ 28. Thomaes Namengebung.	43
III. Meinungen über Einheit und Eins.	44
Drückt das Zahlwort „Ein“ eine Eigenschaft von Gegenständen aus?	44
§ 29. Vieldeutigkeit der Ausdrücke „μὴνς“ und „Einheit.“ E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjectiv „Ein“ enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Praedicat dienen.	44
§ 30. Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen.	45

§ 31.	Baumanns Merkmale der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objecte zugeführt (Locke).	45
§ 32.	Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird.	46
§ 33.	Die Untheilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar.	47
	Sind die Einheiten einander gleich?	48
§ 34.	Die Gleichheit als Grund für den Namen „Einheit.“ E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraction von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich. 	48
§ 35.	Die Verschiedenheit ist sogar nothwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E. Schröder. St. Jevons.	49
§ 36.	Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stösst auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons.	50
§ 37.	Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins.	51
§ 38.	„Eins“ ist Eigennamen, „Einheit“ Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definirt werden. Unterschied von „und“ und +	51
§ 39.	Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von „Einheit“ verdeckt.	52
	Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden.	53
§ 40.	Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons. . .	53
§ 41.	Der Zweck wird nicht erreicht.	55
§ 42.	Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen.	55
§ 43.	Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1.	56
§ 44.	Jevons' Abstrahiren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1	

sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen.	57
Lösung der Schwierigkeit.	59
§ 45. Rückblick.	59
§ 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere.	60
§ 47. Die Thatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objectivität des Begriffes.	60
§ 48. Auflösung einiger Schwierigkeiten.	61
§ 49. Bestätigung bei Spinoza.	62
§ 50. E. Schröders Ausführung.	62
§ 51. Berichtigung derselben.	63
§ 52. Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche. . .	64
§ 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl.	64
§ 54. Einheit kann man das Subject einer Zahlangabe nennen. Untheilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit. 	65
IV. Der Begriff der Anzahl.	66
Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand. . .	66
§ 55. Versuch, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen.	66
§ 56. Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Theil ist.	66
§ 57. Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen.	67
§ 58. Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar.	68
§ 59. Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschliessen, weil er unvorstellbar ist. . . .	69
§ 60. Selbst concrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muss die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt.	69

§ 61.	Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objective Gegenstand ist räumlich.	70
	Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen.	71
§ 62.	Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit.	71
§ 63.	Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches [Kennzeichen]. Logisches Bedenken, dass die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird.	71
§ 64.	Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Richtung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks.	72
§ 65.	Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird.	73
§ 66.	Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend.	74
§ 67.	Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, dass man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist.	75
§ 68.	Die Anzahl als Umfang eines Begriffes.	76
§ 69.	Erläuterung.	76
	Ergänzung und Bewährung unserer Definition.	77
§ 70.	Der Beziehungsbegriff.	77
§ 71.	Die Zuordnung durch eine Beziehung.	79
§ 72.	Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl. 	80
§ 73.	Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung giebt, welche die unter F fallenden Gegenstände den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet.	81
§ 74.	Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich“ zukommt.	82
§ 75.	Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist.	83
§ 76.	Erklärung des Ausdrucks „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m.“	84

§ 77.	1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt.	84
§ 78.	Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind	85
§ 79.	Definition des Folgens in einer Reihe.	86
§ 80.	Bemerkungen hierzu. Objectivität des Folgens.	86
§ 81.	Erklärung des Ausdrucks „x gehört der mit y endenden φ -Reihe an“.	87
§ 82.	Andeutung des Beweises, dass es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe giebt.	88
§ 83.	Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber.	88
	Unendliche Anzahlen.	89
§ 84.	Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl“ zukommt, ist eine unendliche.	89
§ 85.	Die cantorschen unendlichen Anzahlen; „Mächtigkeit“. Abweichung in der Benennung.	90
§ 86.	Cantors Folgen in der Succession und mein Folgen in der Reihe.	91
V.	Schluss.	91
§ 87.	Die Natur der arithmetischen Gesetze.	91
§ 88.	Kants Unterschätzung der analytischen Urtheile.	92
§ 89.	Kants Satz: „Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden“. Kants Verdienst um die Mathematik.	93
§ 90.	Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlusskette.	94
§ 91.	Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich.	95
	Andere Zahlen.	96
§ 92.	Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel.	96
§ 93.	Die Zahlen sind weder räumlich ausser uns noch subjectiv. 	96
§ 94.	Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes verbürgt nicht, dass etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises.	97

§ 95. Man darf nicht ohne Weiteres (c - b) als ein Zeichen ansehen, das die Subtractionsaufgabe löst.	97
§ 96. Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen.	98
§ 97. Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden. . . .	99
§ 98. Hankels Erklärung der Addition.	99
§ 99. Mangelhaftigkeit der formalen Theorie.	100
§ 100. Versuch, complexe Zahlen dadurch nachzuweisen, dass die Bedeutung der Multiplication in besonderer Weise erweitert wird.	100
§ 101. Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig.	101
§ 102. Die blosse Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung.	101
§ 103. Kossaks Erklärung der complexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung.	102
§ 104. Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für die neuen Zahlen festzusetzen.	103
§ 105. Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter.	104
§ 106-109. Rückblick 	105-108

Anmerkungen des Herausgebers	109
--	-----

Literaturverzeichnis	140
--------------------------------	-----

a. Schriften Freges	140
-------------------------------	-----

b. Andere zitierte Literatur	141
--	-----

Namenregister	143
-------------------------	-----