

<b>1</b>	<b>Logik, Mengen, Zahlensysteme</b>	<b>21</b>
1.1	Aussagenlogik	21
1.1.1	Allgemeines	21
1.1.2	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen	23
1.1.3	BOOLEsche Algebra	25
1.1.4	Normalformen	27
1.2	Prädikatenlogik	29
1.3	Mengen	30
1.3.1	Allgemeines	30
1.3.2	Mengenoperationen	33
1.3.3	Beziehungen, Gesetze, Rechenregeln	35
1.3.4	Relationen	36
1.3.5	Intervalle	38
1.3.6	Unscharfe Mengen	38
1.4	Zahlensysteme	40
1.4.1	Polyadische Zahlensysteme	40
1.4.2	Römisches Zahlensystem	45
<b>2</b>	<b>Arithmetik</b>	<b>46</b>
2.1	Menge der reellen Zahlen	46
2.1.1	Standard-Zahlenmengen	46
2.1.2	Grundoperationen an reellen Zahlen	48
2.1.2.1	Die vier Grundrechenarten	48
2.1.2.2	Proportionen, Verhältnisgleichungen	52
2.1.2.3	Prozentrechnung	53
2.1.2.4	Näherung	54
2.1.2.5	Fehlerrechnung	55
2.1.2.6	Betrag und Signum	56
2.1.2.7	Summen- und Produktzeichen	57
2.1.3	Potenzen und Wurzeln	59
2.1.4	Logarithmen	61
2.1.5	Fakultät und Binomialkoeffizient	63
2.2	Menge der komplexen Zahlen	66
2.2.1	Grundbegriffe	66
2.2.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen	69
2.2.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	70
2.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	71
2.2.5	Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen	73
2.3	Kombinatorik	74
2.3.1	Permutationen	74

---

2.3.2	Variationen . . . . .	76
2.3.3	Kombinationen . . . . .	77
2.4	Folgen . . . . .	79
2.4.1	Allgemeines . . . . .	79
2.4.2	Schranken, Grenzen, Grenzwert einer Folge . . . . .	80
2.4.3	Arithmetische und geometrische Folgen . . . . .	83
2.4.4	Finanzmathematik . . . . .	86
2.4.4.1	Zinsrechnung . . . . .	86
2.4.4.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	87
2.4.4.3	Rentenrechnung . . . . .	88
2.4.4.4	Schuldenentlastung, Annuität . . . . .	89
3	<b>Algebra (Gleichungen)</b> . . . . .	91
3.1	Allgemeines . . . . .	91
3.2	Lineare algebraische Gleichungen . . . . .	95
3.2.1	Lineare Gleichungen/Ungleichungen mit einer Variablen	95
3.2.2	Lineare Gleichungen/Ungleichungen mit mehreren Variablen . . . . .	97
3.3	Nichtlineare Gleichungen . . . . .	100
3.3.1	Nichtlineare algebraische Gleichungen . . . . .	101
3.3.1.1	Quadratische Gleichungen/Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	101
3.3.1.2	Quadratisches Gleichungssystem mit zwei Variablen . . . . .	102
3.3.1.3	Kubische Gleichungen . . . . .	104
3.3.1.4	Gleichungen 4. Grades . . . . .	105
3.3.1.5	Symmetrische Gleichungen . . . . .	106
3.3.1.6	Algebraische Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	107
3.3.1.7	HORNER-Schema . . . . .	108
3.3.1.8	Wurzelgleichungen mit einer Variablen . . . . .	110
3.3.2	Transzendente Gleichungen . . . . .	111
3.3.2.1	Exponentialgleichungen . . . . .	111
3.3.2.2	Logarithmische Gleichungen . . . . .	111
3.3.2.3	Goniometrische Gleichungen . . . . .	112
3.3.2.4	Betragsgleichungen, Betragsungleichungen . . . . .	113
3.4	Numerische Verfahren . . . . .	114
3.4.1	Verfahren von MULLER für Polynome . . . . .	114
3.4.2	Fixpunktiteration . . . . .	117
3.4.3	NEWTONSches (Tangenten-)Näherungsverfahren . . . . .	119
3.4.4	Sekantenmethode (Regula falsi) . . . . .	121
3.4.5	Einschliessungsverfahren . . . . .	122
3.5	Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	124
3.5.1	Allgemeines . . . . .	124

---

3.5.2	Iterationsverfahren . . . . .	125
3.5.3	Quadratisch konvergentes NEWTON-Verfahren . . . . .	126
3.6	Grafische Lösung von Gleichungen . . . . .	127
<b>4</b>	<b>Elementare (klassische) Geometrie . . . . .</b>	<b>129</b>
4.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie . . . . .	129
4.1.1	Winkel . . . . .	129
4.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz, Symmetrie . . . . .	131
4.1.3	Dreieck . . . . .	134
4.1.3.1	Schiefwinkliges Dreieck . . . . .	135
4.1.3.2	Gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck . . . . .	140
4.1.3.3	Rechtwinkliges Dreieck . . . . .	141
4.1.4	Vierecke . . . . .	143
4.1.4.1	Trapez . . . . .	143
4.1.4.2	Parallelogramme . . . . .	144
4.1.4.3	Unregelmäßige Vierecke mit Umkreis bzw. Inkreis . . . . .	145
4.1.5	Vielecke (Polygone) . . . . .	146
4.1.5.1	Ebene sternförmige $n$ -Ecke . . . . .	146
4.1.5.2	Regelmäßige (reguläre) Vielecke . . . . .	146
4.1.5.3	Einige bestimmte regelmäßige Vielecke . . . . .	147
4.1.5.4	Konstruktion der einfachen regelmäßigen Vielecke . . . . .	148
4.1.6	Der Kreis . . . . .	149
4.1.6.1	Sätze zum Kreis . . . . .	149
4.1.6.2	Kreisberechnungen . . . . .	150
4.2	Geometrische Körper (Stereometrie) . . . . .	152
4.2.1	Allgemeines . . . . .	152
4.2.2	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielfläche) . . . . .	154
4.2.2.1	Prismatische Körper . . . . .	154
4.2.2.2	Pyramide, Pyramidenstumpf . . . . .	155
4.2.2.3	Prismoid . . . . .	156
4.2.2.4	Die fünf regelmäßigen Polyeder (PLATONische Körper) . . . . .	157
4.2.3	Krummflächig begrenzte Körper . . . . .	159
4.2.3.1	Zylinder, Zylinderabschnitt . . . . .	159
4.2.3.2	Kegel, Kegelstumpf . . . . .	160
4.2.3.3	Kugel . . . . .	161
4.2.3.4	Tonne, Torus . . . . .	163
4.2.3.5	Fraktale Geometrie . . . . .	163
4.3	Sphärische Trigonometrie . . . . .	165
4.3.1	Allgemeines . . . . .	165
4.3.2	Rechtwinkliges sphärisches Dreieck . . . . .	166
4.3.3	Schiefwinkliges sphärisches Dreieck . . . . .	167

---

4.3.4	Berechnung sphärischer Dreiecke . . . . .	169
4.3.5	Mathematische Geografie . . . . .	170
<b>5</b>	<b>Lineare Algebra . . . . .</b>	<b>173</b>
5.1	Vektorraum . . . . .	173
5.2	Matrizen . . . . .	177
5.2.1	Matrizenarten, Definitionen . . . . .	177
5.2.1.1	Allgemeines . . . . .	177
5.2.1.2	Quadratische Matrizen . . . . .	179
5.2.1.3	Inverse Matrix, (Um-) Kehrmatrix $\mathbf{A}^{-1}$ . . . . .	185
5.2.1.4	Rang einer Matrix . . . . .	186
5.2.1.5	Matrizennormen . . . . .	187
5.2.1.6	Grenzwert, Differenzialquotient, Integral . . . . .	188
5.2.2	Matrizingesetze . . . . .	188
5.2.2.1	Gleichheit und Summe zweier Matrizen . . . . .	188
5.2.2.2	Multiplikation von Matrizen . . . . .	188
5.2.3	Matrizingleichungen . . . . .	191
5.2.4	Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen .	192
5.2.5	Numerische Verfahren . . . . .	195
5.2.5.1	HOUSEHOLDER-Orthogonalisierung (-Transformation) . . . . .	195
5.2.5.2	QR-Verfahren . . . . .	196
5.2.5.3	Vektoriteration (Potenzmethode, v.-MISES-Verfahren) . . . . .	197
5.3	Determinanten . . . . .	198
5.3.1	Determinante einer quadratischen Matrix . . . . .	198
5.3.2	Berechnung von Determinanten . . . . .	199
5.3.3	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	201
5.3.4	Praktische Berechnung einer Determinante . . . . .	202
5.4	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	203
5.4.1	Allgemeines . . . . .	203
5.4.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	204
5.4.3	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme . . . . .	206
5.4.3.1	Einfacher und verketteter GAUSSscher Algorithmus . . . . .	207
5.4.3.2	GAUSSscher Algorithmus für Systeme mit gleicher Matrix $\mathbf{A}$ und $m$ rechten Seiten . . . . .	211
5.4.3.3	GAUSS-JORDAN-Verfahren zur Matrixinversion	212
5.4.3.4	GAUSSscher Algorithmus für symmetrische, positiv definite Koeffizientenmatrix, CHOLESKY-Verfahren . . . . .	213
5.4.3.5	Gleichungssysteme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix . . . . .	214

---

5.4.3.6	GAUSS-SEIDELSches Iterationsverfahren	214
5.4.3.7	Austauschverfahren	218
5.4.4	CRAMERSche Regel	218
5.4.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	219
5.5	Lineare Optimierung	221
5.5.1	Allgemeines	221
5.5.2	Grafische Lösung für zwei Variable	223
5.5.3	Simplexalgorithmus	224
5.6	Abbildungen	228
5.6.1	Lineare Abbildungen	228
5.6.2	Affine Abbildungen	231
5.6.2.1	Allgemeines	231
5.6.2.2	Allgemeine, nicht winkeltreue affine Abbildungen	236
5.6.2.3	Ähnlichkeitsabbildungen	239
5.6.2.4	Kongruenzabbildungen	240
5.7	Koordinatentransformation	243
5.7.1	Allgemeines	243
5.7.2	Orthogonale Koordinatentransformation in der Ebene	244
5.7.3	Orthogonale Koordinatentransformation im Raum	245
<b>6</b>	<b>Vektoren, Analytische Geometrie</b>	<b>249</b>
6.1	Vektoren, Grundlagen	249
6.2	Vektoralgebra	254
6.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	254
6.2.2	Multiplikation von Vektoren	256
6.2.2.1	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	256
6.2.2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt)	256
6.2.2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	258
6.2.2.4	Mehrfache Produkte von Vektoren	260
6.3	Koordinatensysteme	261
6.3.1	Allgemeines	261
6.3.2	Ebene (2D-)Koordinatensysteme	262
6.3.3	Räumliche (3D-)Koordinatensysteme	263
6.4	Punkte, Kurven 1. Ordnung	266
6.4.1	Punkte	266
6.4.2	Gerade, Strahl, Strecke	267
6.4.2.1	Punktmengen, Teilung einer Strecke	267
6.4.2.2	Gleichungen einer Geraden in der $(x, y)$ -Ebene	269
6.4.2.3	Gleichungen einer Geraden im Raum	271
6.4.2.4	Abstand eines Punktes von einer Geraden	274
6.4.3	Mehrere Geraden	275
6.4.3.1	Schnittpunkt zweier Geraden	275
6.4.3.2	Schnittwinkel zweier Geraden	277

---

6.4.3.3	Abstand zweier Geraden . . . . .	279
6.4.3.4	Drei und mehr Geraden . . . . .	280
6.5	Ebenen . . . . .	281
6.5.1	Eine Ebene . . . . .	281
6.5.1.1	Gleichungen einer Ebene im Raum . . . . .	281
6.5.1.2	Richtungskosinus der Normalen einer Ebene .	285
6.5.1.3	Abstand eines Punktes $P_1$ von einer Ebene .	286
6.5.1.4	Durchstoßpunkt $D$ einer Geraden durch eine Ebene . . . . .	287
6.5.1.5	Winkel $\varphi$ zwischen Gerade und Ebene . . . . .	288
6.5.2	Zwei Ebenen . . . . .	289
6.5.3	Drei und mehr Ebenen . . . . .	290
6.5.4	Flächeninhalt, Schwerpunkt, Volumen . . . . .	290
6.6	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte) . . . . .	292
6.6.1	Allgemeines . . . . .	292
6.6.2	Kreis . . . . .	294
6.6.2.1	Gleichungen des Kreises . . . . .	294
6.6.2.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis .	296
6.6.2.3	Tangente und Normale eines Kreises . . . . .	297
6.6.2.4	Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis	297
6.6.2.5	Potenz $p$ eines Punktes in Bezug auf einen Kreis . . . . .	298
6.6.2.6	Kreisbüschel . . . . .	299
6.6.3	Ellipse . . . . .	299
6.6.3.1	Gleichungen der Ellipse . . . . .	299
6.6.3.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse .	301
6.6.3.3	Tangente, Normale und Durchmesser einer Ellipse . . . . .	302
6.6.3.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Ellipse	303
6.6.3.5	Krümmung einer Ellipse . . . . .	303
6.6.3.6	Haupt- und Nebenkreis einer Ellipse . . . . .	304
6.6.3.7	Flächeninhalt und Umfang von Ellipse, Ellipsensegment und Ellipsensektor . . . . .	304
6.6.3.8	Ellipsenkonstruktionen . . . . .	305
6.6.4	Parabel . . . . .	307
6.6.4.1	Gleichungen der Parabel . . . . .	307
6.6.4.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel	309
6.6.4.3	Tangente und Normale einer Parabel . . . . .	310
6.6.4.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Parabel	310
6.6.4.5	Krümmung einer Parabel . . . . .	311
6.6.4.6	Parabelsegment, Parabelbogen, Brennstrahl .	311
6.6.4.7	Parabelkonstruktionen . . . . .	312
6.6.5	Hyperbel . . . . .	313
6.6.5.1	Gleichungen der Hyperbel . . . . .	314

---

6.6.5.2	Schnittpunkt einer Geraden mit einer Hyperbel	316
6.6.5.3	Tangente und Normale einer Hyperbel	317
6.6.5.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Hyperbel	318
6.6.5.5	Krümmung einer Hyperbel	319
6.6.5.6	Hyperbelsegment und Hyperbelsektor	320
6.6.5.7	Hyperbelkonstruktionen	320
6.7	Flächen 2. Ordnung	322
6.7.1	Allgemeines	322
6.7.2	Kugel	323
6.7.3	Ellipsoid	324
6.7.4	Hyperboloid	325
6.7.5	Kegel	327
6.7.6	Zylinder	328
6.7.7	Paraboloid	329
6.8	Hauptachsentransformation	331
7	<b>Funktionen</b>	340
7.1	Allgemeines	340
7.1.1	Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	340
7.1.2	Funktionen mit mehreren Variablen	344
7.2	Rationale Operationen mit Funktionen	346
7.3	Grenzwerte, Unbestimmte Ausdrücke	347
7.3.1	Grenzwert einer Funktion	347
7.3.2	Unbestimmte Ausdrücke	350
7.4	Eigenschaften reller Funktionen	352
7.4.1	Ausgewählte Eigenschaften von Funktionen	352
7.4.2	Nullstellen einer Funktion	354
7.4.3	Stetigkeit einer Funktion	355
7.5	Rationale Funktionen	357
7.5.1	Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	357
7.5.1.1	Ganzrationale Funktion 1. Grades (lineare Funktion)	357
7.5.1.2	Ganzrationale Funktion 2. Grades (quadratische Funktion)	357
7.5.1.3	Ganzrationale Funktion 3. Grades (kubische Funktion)	358
7.5.2	Zerlegung von Funktionen in Linearfaktoren	358
7.5.3	Interpolation	359
7.5.3.1	Allgemeines	359
7.5.3.2	Interpolationsformel von LAGRANGE	360
7.5.3.3	Interpolationsformel von NEWTON	361
7.5.3.4	Interpolationsformel von GREGORY-NEWTON	362

7.5.3.5	Interpolation durch kubische Polynomsplines	364
7.5.3.6	BÉZIER-Splines	366
7.5.4	Gebrochenrationale Funktion	368
7.5.5	Potenzfunktion	369
7.5.6	Sonstige (elementare) Funktionen	370
7.6	Nichtrationale Funktionen	373
7.6.1	Wurzelfunktion	373
7.6.2	Exponentialfunktionen	374
7.6.3	Logarithmusfunktionen	376
7.6.4	Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen	377
7.6.4.1	Allgemeines	377
7.6.4.2	Goniometrische Beziehungen	380
7.6.4.3	Allgemeine Sinusfunktion (harmonische Funktion)	385
7.6.4.4	Modulation	386
7.6.4.5	Überlagerung (Superposition) von Schwingungen	388
7.6.4.6	Multiplikation von Funktionen	390
7.6.4.7	Komplexe Zeigerdarstellung von Sinusgrößen	391
7.6.5	Zyklotrische Funktionen, Arkusfunktionen	392
7.6.6	Hyperbelfunktionen	396
7.6.7	Areafunktionen	400
7.7	Algebraische Kurven höherer Ordnung	403
7.7.1	Kurven 3. Ordnung	403
7.7.2	Kurven 4. Ordnung	405
7.8	Zykloiden (Rollkurven)	406
7.8.1	Gewöhnliche (gespitzte) Zykloide	406
7.8.2	Epizykloiden	407
7.8.3	Hypozykloiden	409
7.9	Spirallinien	411
7.9.1	Logarithmische Spirale	411
7.9.2	ARCHIMEIDISCHE Spirale	412
7.9.3	Hyperbolische Spirale	412
7.10	Sonstige Kurven	413
7.10.1	Kettenlinie	413
7.10.2	Traktrix (Schleppkurve)	413
7.11	Komplexe Funktionen	414
7.11.1	Allgemeines	414
7.11.2	Konforme Abbildungen	416
7.11.2.1	Lineare und quadratische konforme Abbildungen	416
7.11.2.2	Inversion (Stürzung)	418

---

<b>8</b>	<b>Differentialrechnung</b>	421
8.1	Funktionen einer Variablen	421
8.1.1	Allgemeines	421
8.1.2	Erste Ableitungen der elementaren Funktionen	423
8.1.3	Differenzierungsregeln, Ableitungsregeln	424
8.1.3.1	Grundregeln	424
8.1.3.2	Höhere Ableitungen und Differenziale	426
8.1.3.3	Differenziation impliziter Funktionen $F(x, y) = 0$	427
8.1.3.4	Differenziation von Funktionen in Parameterform	428
8.1.3.5	Differenziation von Funktionen in Polarkoordinaten	428
8.1.4	Grafische Differenziation	429
8.1.5	Numerische Differenziation	429
8.1.6	Logarithmische Differenziation	430
8.1.7	Mittelwertsätze	431
8.2	Funktionen mehrerer Variablen	432
8.2.1	Partielle Ableitung 1. Ordnung	432
8.2.2	Höhere partielle Ableitungen	433
8.2.3	Totale Ableitungen für zwei Variable	434
8.3	Anwendungen, Differentialgeometrie	436
8.3.1	Ebene Kurven	436
8.3.1.1	Bogenelement, Differential der Bogenlänge	436
8.3.1.2	Tangente und Normale	436
8.3.1.3	Zwei Kurven	438
8.3.1.4	Monotonie und Krümmungsverhalten einer Funktion	439
8.3.1.5	Lokale Extrema von Funktionen	443
8.3.1.6	Besondere Punkte einer Kurve	447
8.3.1.7	Asymptoten	449
8.3.1.8	Einhüllende Kurven (Enveloppe)	450
8.3.1.9	Kurvendiskussion	450
8.3.2	Raumkurven	450
8.3.2.1	Darstellungen in kartesischen Koordinaten	450
8.3.2.2	Bogenelement einer Raumkurve	451
8.3.2.3	Tangente und Normale einer Raumkurve	451
8.3.2.4	Krümmung einer Raumkurve	455
8.3.2.5	Windung (Torsion)	456
8.3.3	Flächen im Raum	457
8.3.4	Extremstellen von Funktionen mit mehreren Variablen	464
<b>9</b>	<b>Integralrechnung</b>	467
9.1	Allgemeines	467
9.1.1	Unbestimmtes Integral	467

---

9.1.2	Bestimmtes Integral (RIEMANNSCHES Integral) . . . . .	468
9.1.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	471
9.2	Grundintegrale, Stammintegrale . . . . .	473
9.3	Integrationsregeln und -verfahren . . . . .	474
9.3.1	Grundregeln . . . . .	474
9.3.2	Integration durch Substitution . . . . .	474
9.3.3	Partielle Integration (Produktintegration) . . . . .	478
9.3.4	Integration nach Partialbruchzerlegung . . . . .	478
9.3.5	Integration nach Reihenentwicklung . . . . .	481
9.3.6	Grafische Integration . . . . .	483
9.4	Numerische Integration . . . . .	484
9.4.1	Allgemeines . . . . .	484
9.4.2	NEWTON-COTES-Formeln . . . . .	485
9.4.2.1	Rechteckformel . . . . .	487
9.4.2.2	Sehnentrapezformel . . . . .	488
9.4.2.3	SIMPSONSche Formel, KEPLERSche Fassformel . . . . .	489
9.4.2.4	NEWTONSche 3/8-Formel . . . . .	490
9.4.2.5	Tangententrapezformel . . . . .	491
9.4.3	GAUSSSches Quadraturverfahren . . . . .	491
9.4.4	ROMBERG-Quadraturverfahren . . . . .	492
9.5	Bereichsintegrale, Gebietsintegrale . . . . .	495
9.5.1	Zweidimensionales Bereichsintegral, Doppelintegral . .	495
9.5.2	Raumintegral, Volumenintegral, Dreifachintegral . . .	498
9.6	Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	499
9.6.1	Geometrische Anwendungen . . . . .	499
9.6.1.1	Flächeninhalte (Quadratur) . . . . .	499
9.6.1.2	Bogenlänge (Rektifikation) . . . . .	502
9.6.1.3	Mantelflächen von Rotationskörpern . . . . .	502
9.6.1.4	Volumen von Rotationskörpern (Kubatur) . . . . .	502
9.6.1.5	Volumen eines Körpers . . . . .	503
9.6.2	Technisch-physikalische Anwendungen . . . . .	504
9.6.2.1	Bewegungen, Kinematik . . . . .	504
9.6.2.2	Arbeit . . . . .	504
9.6.2.3	Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen	505
9.6.2.4	Momente 1. Grades . . . . .	505
9.6.2.5	Schwerpunkte . . . . .	507
9.6.2.6	Momente 2. Grades (Festigkeitslehre) . . . . .	509
9.6.2.7	Massenmomente 2. Grades (Dynamik) . . . . .	510
10	<b>Vektoranalysis . . . . .</b>	<b>512</b>
10.1	Vektorfunktionen . . . . .	512
10.2	Felder . . . . .	513
10.3	Gradient eines skalaren Feldes . . . . .	516

---

10.4 Divergenz eines Vektorfeldes . . . . .	518
10.5 Rotation eines Vektorfeldes . . . . .	520
10.6 Kurvenintegrale (Linienintegrale) . . . . .	522
10.6.1 Kurvenintegral erster Art . . . . .	522
10.6.2 Kurvenintegral (zweiter Art) . . . . .	523
10.7 Flächenintegrale (Oberflächenintegrale) . . . . .	528
10.7.1 Flächenintegral erster Art . . . . .	528
10.7.2 Flächenintegral zweiter Art . . . . .	529
10.8 Integralsätze . . . . .	531
10.8.1 GAUSSscher Integralsatz . . . . .	531
10.8.2 STOKEsscher Integralsatz . . . . .	533
<b>11 Differenzialgleichungen . . . . .</b>	<b>536</b>
11.1 Allgemeines . . . . .	536
11.1.1 Differenzialgleichungen, Arten . . . . .	536
11.1.2 Gewöhnliche Differenzialgleichungen . . . . .	537
11.2 Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	542
11.2.1 Differenzialgleichung mit trennbaren Variablen . . . . .	542
11.2.2 Gleichgradige Differenzialgleichung 1. Ordnung . . . . .	544
11.2.3 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	545
11.2.3.1 Homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung . . . . .	545
11.2.3.2 Inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung . . . . .	546
11.2.4 Totale Differenzialgleichung . . . . .	548
11.2.5 Integrierender Faktor . . . . .	549
11.2.6 BERNOULLIscHe Differenzialgleichung . . . . .	550
11.2.7 RICCATIscHe Differenzialgleichung . . . . .	550
11.2.8 CLAIRAUTscHe Differenzialgleichung . . . . .	551
11.3 Differenzialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	552
11.3.1 Sonderfälle, Erniedrigung der Ordnung . . . . .	552
11.3.2 Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	554
11.3.3 Homogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten . . . . .	555
11.3.4 Inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	556
11.3.5 Inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten . . . . .	560
11.3.6 BESSELscHe Differenzialgleichung . . . . .	562
11.3.7 Anwendungsfall Schwingungen . . . . .	564
11.4 Differenzialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	567
11.5 Lineare Differenzialgleichungssysteme . . . . .	571

11.6 Näherungslösungen für Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	573
11.6.1 Verfahren unbestimmter Koeffizienten . . . . .	573
11.6.2 Iterationsverfahren . . . . .	575
11.7 Anfangswertprobleme . . . . .	576
11.7.1 Allgemeines . . . . .	576
11.7.2 Explizite Einschrittverfahren . . . . .	579
11.7.2.1 Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY . . . . .	579
11.7.2.2 HEUN-Verfahren . . . . .	581
11.7.2.3 Klassisches Verfahren von RUNGE-KUTTA . . . . .	581
11.7.2.4 Einbettungsformeln . . . . .	582
11.7.3 Mehrschrittverfahren . . . . .	582
11.7.3.1 Explizitverfahren von ADAMS-BASHFORTH . . . . .	583
11.7.3.2 Prädiktor-Korrektor-Verfahren von ADAMS-MOULTON . . . . .	583
11.7.4 Extrapolationsverfahren von BULIRSCH-STOER-GRAGG . . . . .	585
11.8 Randwertprobleme . . . . .	585
11.8.1 Allgemeines . . . . .	585
11.8.2 Schießverfahren . . . . .	587
11.8.3 Direkte Differenzenapproximation . . . . .	588
11.9 Partielle Differenzialgleichungen . . . . .	591
11.9.1 Allgemeines . . . . .	591
11.9.2 Partielle Differenzialgleichung 1. Ordnung . . . . .	591
11.9.3 Partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung . . . . .	593
<b>12 Reihen, F- und L-Transformation . . . . .</b>	<b>595</b>
12.1 Unendliche Reihen . . . . .	595
12.1.1 Unendliche Zahlenreihen . . . . .	595
12.1.2 Summen einiger konvergenter Zahlenreihen . . . . .	598
12.1.3 Potenzreihen . . . . .	599
12.1.3.1 Allgemeines . . . . .	599
12.1.3.2 Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen . . . . .	601
12.1.4 Numerische Berechnung von Reihen . . . . .	604
12.1.5 Zusammenstellung fertig entwickelter Reihen . . . . .	605
12.1.6 Näherungsformeln . . . . .	609
12.2 FOURIER-Reihen . . . . .	611
12.2.1 FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion . . . . .	611
12.2.2 Numerische harmonische Analyse . . . . .	617
12.2.3 Ausgewählte FOURIER-Reihen . . . . .	618
12.3 FOURIER-Transformation . . . . .	624
12.4 LAPLACE-Transformation . . . . .	627
12.4.1 LAPLACE-Transformation, Allgemeines . . . . .	627
12.4.2 Rechenregeln der LAPLACE-Transformation . . . . .	629

---

12.4.3 Anwendungen der LAPLACE-Transformation . . . . .	632
12.4.3.1 Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen . . . . .	632
12.4.3.2 Test linearer Übertragungsglieder . . . . .	636
12.4.4 Korrespondenztabelle der LAPLACE-Transformationen . . . . .	639
<b>13 Statistik, Stochastik . . . . .</b>	<b>643</b>
13.1 Beschreibende (deskriptive) Statistik . . . . .	643
13.1.1 Grundbegriffe . . . . .	643
13.1.2 Lageparameter . . . . .	647
13.1.3 Streuungsparameter . . . . .	652
13.1.4 Korrelation . . . . .	655
13.1.5 Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	657
13.1.5.1 Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	657
13.1.5.2 Ausgleichende Gerade . . . . .	658
13.1.5.3 Ausgleichende Parabel . . . . .	659
13.1.5.4 Multiple Regression . . . . .	660
13.1.6 Fehlerfortpflanzung . . . . .	661
13.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	665
13.2.1 Zufallsexperiment und Ereignis . . . . .	665
13.2.2 Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	667
13.2.3 Sätze über Wahrscheinlichkeiten . . . . .	668
13.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse . . . . .	670
13.2.5 Zufällige Variable . . . . .	673
13.2.6 Kenngrößen von zufälligen Variablen . . . . .	676
13.2.6.1 Erwartungswert . . . . .	676
13.2.6.2 Varianz und Standardabweichung . . . . .	678
13.2.6.3 Schiefe und Exzess . . . . .	680
13.2.7 Ausgewählte diskrete Verteilungen . . . . .	681
13.2.7.1 Diskrete Gleichverteilung . . . . .	681
13.2.7.2 BERNOULLI-Verteilung . . . . .	682
13.2.7.3 Binomialverteilung . . . . .	682
13.2.7.4 POISSON-Verteilung . . . . .	685
13.2.7.5 Hypergeometrische Verteilung . . . . .	687
13.2.7.6 Geometrische Verteilung . . . . .	688
13.2.8 Ausgewählte stetige Verteilungen . . . . .	689
13.2.8.1 Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung) . . . . .	689
13.2.8.2 Normalverteilung . . . . .	689
13.2.8.3 Exponentialverteilung . . . . .	695
13.2.8.4 $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	696
13.2.8.5 $t$ -Verteilung (STUDENT-Verteilung) . . . . .	697
13.3 Schließende (induktive) Statistik . . . . .	698
13.3.1 Grundbegriffe . . . . .	698
13.3.2 Punktschätzungen . . . . .	699

---

13.3.3 Intervallschätzungen . . . . .	701
13.3.3.1 Konfidenzintervall für den Anteil $p$ . . . . .	702
13.3.3.2 Konfidenzintervalle für den Erwartungswert $\mu$ .	703
13.3.3.3 Konfidenzintervall für die Varianz $\sigma^2$ . . . . .	706
13.3.4 Hypothesentests . . . . .	707
13.3.4.1 Allgemeines über Tests . . . . .	707
13.3.4.2 Test über den Anteil $p$ . . . . .	709
13.3.4.3 Tests über den Erwartungswert $\mu$ . . . . .	712
13.3.4.4 Test über die Varianz $\sigma^2$ . . . . .	715
13.3.4.5 $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	716
<b>14 Integraltabellen . . . . .</b>	<b>719</b>
14.1 Integrale rationaler Funktionen . . . . .	720
14.1.1 Integrale mit $ax + b$ . . . . .	720
14.1.2 Integrale mit $ax + b, cx + d$ . . . . .	723
14.1.3 Integrale mit $ax^2 + bx + c$ . . . . .	724
14.1.4 Integrale mit $a^2 \pm x^2$ . . . . .	726
14.1.5 Integrale mit $a^3 \pm x^3$ . . . . .	729
14.1.6 Integrale mit $a^4 + x^4, a^4 - x^4$ . . . . .	730
14.2 Integrale nichtrationaler Funktionen . . . . .	730
14.2.1 Integrale mit $\sqrt{x^n}$ und $(a^2 \pm b^2 x)^m$ . . . . .	730
14.2.2 Integrale mit $\sqrt{(ax + b)^n}$ . . . . .	731
14.2.3 Integrale mit $\sqrt{(ax + b)^n}, \sqrt{(cx + d)^m}$ . . . . .	733
14.2.4 Integrale mit $\sqrt{(a^2 + x^2)^n}$ . . . . .	735
14.2.5 Integrale mit $\sqrt{(a^2 - x^2)^n}$ . . . . .	738
14.2.6 Integrale mit $\sqrt{(x^2 - a^2)^n}$ . . . . .	740
14.2.7 Integrale mit $\sqrt{(ax^2 + bx + c)^n}$ . . . . .	743
14.3 Integrale transzendorter Funktionen . . . . .	746
14.3.1 Integrale mit $e^{ax}$ (Exponentialfunktionen) . . . . .	746
14.3.2 Integrale der Hyperbelfunktionen . . . . .	747
14.3.3 Integrale mit $\ln x$ (logarithmische Funktion) . . . . .	749
14.3.4 Integrale mit $\sin ax$ . . . . .	750
14.3.5 Integrale mit $\cos ax$ . . . . .	753
14.3.6 Integrale mit $\sin ax$ und $\cos ax$ bzw. $\cos bx$ . . . . .	756
14.3.7 Integrale mit $\tan ax$ bzw. $\cot ax$ . . . . .	760
14.3.8 Integrale der Arkusfunktionen . . . . .	762
14.3.9 Integrale der Areafunktionen . . . . .	763
14.4 Bestimmte und uneigentliche Integrale . . . . .	764
<b>Anhang . . . . .</b>	<b>772</b>
<b>Sachwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>783</b>