

Inhaltsverzeichnis

I	Gruppen	1
§ 1	Halbgruppen, Gruppen und Untergruppen	1
1.1	Innere Verknüpfungen und Halbgruppen	1
1.2	Beispiele	2
1.3	Definition einer Gruppe	4
1.4	Abschwächung der Gruppenaxiome	4
1.5	Translationen und Kürzungsregeln	5
1.6	Definition einer Untergruppe	6
1.7	Erzeugung von Untergruppen	7
1.8	Untergruppen von \mathbb{Z} , Kongruenzen und Restklassen	8
1.9	Beispiele	11
§ 2	Homomorphismen und Normalteiler	21
2.1	Definition eines Homomorphismus	21
2.2	Beispiele	22
2.3	Nebenklassen	27
2.4	Ordnung und Index	28
2.5	Beispiele	30
2.6	Definition eines Normalteilers	33
2.7	Homomorphismen und Normalteiler	34
2.8	Faktorgruppen	35
2.9	Beispiele	36
§ 3	Isomorphiesätze und Produkte von Gruppen	39
3.1	Isomorphiesätze	39
3.2	Äußeres direktes Produkt	41
3.3	Inneres direktes Produkt	42
3.4	Äußeres semidirektes Produkt*	45
3.5	Inneres semidirektes Produkt*	46
3.6	Beispiele*	49
3.7	Zyklische Gruppen	55
3.8	Teilbarkeit ganzer Zahlen	56
3.9	Produkte zyklischer Gruppen	59
3.10	Untergruppen zyklischer Gruppen	60
3.11	Die Eulersche φ -Funktion	61
3.12	Primrestklassengruppen	63

3.13	Der euklidische Algorithmus	65
3.14	Beispiele	66
§ 4	Operationen von Gruppen auf Mengen	73
4.1	Definition einer Operation	73
4.2	Beispiele und Satz von CAYLEY	74
4.3	Bahnenraum und Standgruppe	75
4.4	Die Klassengleichung	76
4.5	Zyklenzerlegung einer Permutation	78
4.6	Beispiele	80
§ 5	Symmetriegruppen*	85
5.1	Regelmäßige n -Ecke und die Diedergruppe	85
5.2	Endliche Untergruppen von $O(2)$	87
5.3	Symmetrien des Tetraeders	89
5.4	Symmetrien von Würfel und Oktaeder	91
5.5	Symmetrien von Ikosaeder und Dodekaeder	94
5.6	Die Klassengleichung der Ikosaedergruppe	98
5.7	Endliche Untergruppen von $SO(3)$	100
5.8	Symmetrien von Fußbällen	100
§ 6	Struktursätze*	102
6.1	Summen zyklischer Gruppen	102
6.2	Zählung von zyklischen Summanden	103
6.3	Primärzerlegung	105
6.4	Zerlegung von endlichen abelschen p -Gruppen	107
6.5	Elementarteiler	111
6.6	Beispiele	113
6.7	Torsionsuntergruppen	114
6.8	Freie abelsche Gruppen	115
6.9	Endlich erzeugte abelsche Gruppen	120
6.10	Beispiele	121
6.11	Satz von CAUCHY und p -Gruppen	122
6.12	Die Sätze von SYLOW	124
6.13	Beispiele	127
§ 7	Einfache und auflösbare Gruppen*	136
7.1	Einfache Gruppen	136
7.2	Kommutatorgruppen	138
7.3	Beispiele	139
7.4	Auflösbare Gruppen	140
7.5	Auflösbarkeit von p -Gruppen	143
7.6	Beispiele	143
II	Ringe	145
§ 1	Grundbegriffe	145
1.1	Definition eines Rings	145
1.2	Einheiten, Körper, Unterringe	147
1.3	Ringhomomorphismen	149
1.4	Beispiele	149

1.5	Polynomringe	155
1.6	Grad eines Polynoms	159
1.7	Division mit Rest	160
1.8	Nullstellen und Werte von Polynomen	163
1.9	Einheitswurzeln in \mathbb{C}	164
1.10	Polynome in mehreren Veränderlichen*	166
1.11	Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers	170
1.12	Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe	171
1.13	Quotientenkörper	172
1.14	Beispiele	174
§ 2	Ideale und Restklassenringe	176
2.1	Definition von Idealen	176
2.2	Ideale und Einheiten	177
2.3	Restklassenringe	178
2.4	Isomorphiesätze	179
2.5	Beispiele	180
2.6	Hauptidealringe und noethersche Ringe	184
2.7	Euklidische Ringe	185
2.8	Beispiele	187
2.9	Der Hilbertsche Basissatz*	189
2.10	Operationen mit Idealen*	192
2.11	Der Chinesische Restesatz*	193
2.12	Beispiele*	195
2.13	Primideale und maximale Ideale	198
2.14	Beispiele	199
2.15	Existenz maximaler Ideale und das Lemma von ZORN*	202
§ 3	Teilbarkeit in Integritätsringen	206
3.1	Teiler und assoziierte Elemente	206
3.2	Irreduzible Elemente und Primelemente	207
3.3	Teilerketten	209
3.4	Primzahlen	211
3.5	Faktorielle Ringe	214
3.6	Gemeinsame Teiler und Vielfache	215
3.7	Polynomringe über faktoriellen Ringen	217
3.8	Irreduzibilitätskriterien für Polynome	221
3.9	Beispiele	223
3.10	Ringe holomorpher Funktionen*	225
3.11	Quadratische Zahlkörper*	226
3.12	Quadratische Zahlringe*	229
3.13	Einheiten in quadratischen Zahlringen*	232
3.14	Euklidische quadratische Zahlringe*	235
3.15	Faktorzerlegung in quadratischen Zahlringen*	239
3.16	Ideale als ideale Zahlen*	244

III Körpererweiterungen	247
§ 1 Grundbegriffe	247
1.1 Charakteristik und Primkörper	247
1.2 Grad einer Körpererweiterung	248
1.3 Adjunktion von Elementen	250
1.4 Algebraische und transzendente Elemente	251
1.5 Das Minimalpolynom	252
1.6 Beispiele	255
1.7 Algebraische Körpererweiterungen	258
1.8 Algebraisch abgeschlossene Körper	260
§ 2 Konstruktion von Körpererweiterungen	264
2.1 Symbolische Adjunktion von Nullstellen	264
2.2 Fortsetzung von Körperisomorphismen	265
2.3 Zerfällungskörper eines Polynoms	267
2.4 Beispiele	272
2.5 Der algebraische Abschluss*	276
§ 3 Einfache und mehrfache Nullstellen	281
3.1 Vielfachheit von Nullstellen und formale Ableitung	281
3.2 Separabilität	284
3.3 Der Frobenius-Homomorphismus	285
3.4 Endliche Körper	286
3.5 Beispiele	289
3.6 Algebraischer Abschluss eines endlichen Körpers	293
3.7 Der Satz vom primitiven Element	294
3.8 Beispiele	295
3.9 Resultanten*	296
3.10 Diskriminanten*	302
3.11 Beispiele*	304
§ 4 Galois-Erweiterungen	309
4.1 Symmetrische Polynome	309
4.2 Relative Automorphismen und Fixkörper	313
4.3 Gruppenordnung und Körpergrad	315
4.4 Galois-Erweiterungen	317
4.5 Der Hauptsatz der Galois-Theorie	319
4.6 Beispiele	321
4.7 Der Fundamentalsatz der Algebra*	324
4.8 Diskriminante und Galois-Gruppe*	329
4.9 Galois-Theorie endlicher Körper*	330
§ 5 Lösung von Polynomgleichungen*	333
5.1 Quadratische Gleichungen	333
5.2 Kubische Gleichungen	334
5.3 Beispiele	337
5.4 Gleichungen vierten Grades	339
5.5 Beispiele	344
5.6 Kreisteilung in Charakteristik Null	348
5.7 Kreisteilung in Charakteristik $p > 0$	352

5.8	Reine Polynome	355
5.9	Zyklische Erweiterungen	357
5.10	Lösbarkeit von Polynomgleichungen	360
5.11	Die allgemeine Polynomgleichung	363
5.12	Gleichungen fünften Grades und das Ikosaeder	365
5.13	Darstellung von Einheitswurzeln	368
5.14	Beispiele	371
5.15	Das Umkehrproblem der Galois-Theorie	375
§ 6	Geometrische Konstruktionen	378
6.1	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	379
6.2	Der Körper der konstruierbaren Punkte	380
6.3	Struktur des Körpers der konstruierbaren Punkte	382
6.4	Unlösbarkeit klassischer Konstruktionsaufgaben	386
6.5	Konstruktion von regelmäßigen n -Ecken*	388
6.6	Andere Regeln für Konstruktionsverfahren	392
Anhang Platonische Körper		393
Literaturverzeichnis		399
Index		409
Symbolverzeichnis		409