

Max Koecher

Klassische elementare Analysis

v

1987

Birkhäuser Verlag · Basel · Boston

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Der goldene Schnitt

Einleitung	11
§1 <i>Elementare Eigenschaften</i>	11
1. Definition – 2. Konstruktion mit Zirkel und Lineal – 3. Konstruktion eines regulären Fünfecks – 4. PENROSE-Mosaike – 5. Zur Mystik des goldenen Schnittes	
§2 <i>Das Pentagondodekaeder</i>	15
1. Die platonischen Körper – 2. Die EULERSche Polyeder-Formel – 3. Reguläre Körper – 4. Dodekaeder und Ikosaeder – 5.* Die Ikosaeder-Gruppe	
§3 <i>Grenzprozesse für den goldenen Schnitt</i>	21
1. Numerische Berechnung – 2. Konvergenz – 3. Ein Kettenbruch – 4. Zur Approximation von Irrationalzahlen – 5. Ein Zusammenhang mit dem Dilogarithmus	
§4 <i>FIBONACCI-Zahlen</i>	24
1. Historische Bemerkungen – 2. Über die Lösung einer Rekursionsformel – 3. Anwendungen – 4. Einige Aufgaben – 5. Nicht-triviale Resultate – 6. Eine Tabelle – 7. Die Phyllotaxis (Blattstellungslehre)	
§5 <i>Algebraische Aspekte des goldenen Schnitts</i>	30
1. Der Ring $\mathbb{Z}[g]$ – 2. Die Einheiten von $\mathbb{Z}[g]$ – 3. $\mathbb{Z}[g]$ als euklidischer Ring	
§6 <i>Neueste wissenschaftliche Entdeckungen</i>	33
1. Der Kohlenstoff-Fußball – 2. Das Polio-Virus	

Kapitel II

Folgen und Reihen reeller Zahlen

Einleitung	35
§1 <i>Das LANDAUSche O-Symbol</i>	36
1. Über den Nutzen einer abkürzenden Symbolik – 2. Eine Äquivalenzrelation – 3. Das LANDAU-Symbol – 4. Die Beispiele $M \subset \mathbb{R}$ und $M \subset \mathbb{N}$ – 5. Über den Nutzen des O -Symbols – 6. Asymptotische Gleichheit – 7. Der mittlere Binomialkoeffizient – 8. Weitere Anwendungen	
§2 <i>Erste Versuche zur Konvergenzverbesserung</i>	45
1. Die Folgen $\zeta_n(s)$ – 2. Die Konvergenz von $\zeta(s)$ – 3. Zur numerischen Berechnung von $\zeta(2)$ – 4. Eine weitere Verbesserung – 5.* Noch ein Trick – 6. Zur numerischen Berechnung von $\zeta(3)$ – 7. Funktionswerte der ζ -Funktion	

§ 3	<i>Reihen mit positiven Gliedern</i>	53
1.	Problemstellung – 2. Differenzreihen – 3.* Die Standard-Beispiele	
4.*	Anwendungen auf $\zeta(s)$ – 5. Historische Bemerkungen	
§ 4*	<i>Für Fortgeschrittene: Über die Werte von $\zeta(s)$ für ungerades s</i>	58
1.	Problemstellung – 2. Die Reihen $\eta(s)$ – 3. Darstellung von $\zeta(3)$ und $\zeta(5)$	
§ 5	<i>Alternierende Reihen</i>	61
1.	Bildung von Differenzreihen – 2. Anwendung auf die LEIBNIZ-Reihe –	
3.	Historische Bemerkungen – 4. Eine Kettenbruchentwicklung	

Kapitel III

Das RIEMANNSche Integral und der Logarithmus

Einleitung	67	
§ 1	<i>Das RIEMANNSche Integral</i>	67
1.	Das Ober- und Unterintegral – 2. Der Hauptsatz über das RIEMANNSche Integral – 3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – 4. Stammfunktionen – 5. Eine Liste von Stammfunktionen – 6. Der Vektorraum der auf einem Intervall stetigen Funktionen – 7. Die Integration als Umkehrung der Differentiation	
§ 2	<i>Integrationsmethoden</i>	74
1.	Über effektive Integration – 2. Partielle Integration – 3. Substitution	
4.	Partialbruch-Zerlegung: Problemstellung – 5. Partialbruch-Zerlegung: Reduktionsschritt – 6. Integration der Grundtypen	

§ 3	<i>Numerische Integration</i>	81
1.	Vorbemerkung – 2. Die RIEMANNSchen Summen als Approximation des Integrals – 3. Uneigentliche Integrale und das Integralkriterium –	
4.	Die erste Quadraturformel – 5. Die Trapezregel	
§ 4	<i>Der Logarithmus</i>	87
1.	Vorbemerkung – 2. Der Logarithmus und seine Eigenschaften –	
3.	Beweis des Satzes – 4. Eine Methode – 5. Die harmonische Reihe –	
6.	Die STIRLINGsche Formel – 7.* Weitere logarithmische Reihen	

§ 5	<i>Die Exponentialfunktion</i>	96
1.	Vorbemerkung – 2. Die Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften –	
3.	Die allgemeine Potenz – 4. Die Limes-Darstellung der Exponentialfunktion – 5. Zinseszins-Rechnung – 6. Die STIRLINGsche Formel	

Kapitel IV

Algebraische und zahlentheoretische Anwendungen

§ 1	<i>Algebraische Anwendungen</i>	103
1.	Die reellen Zahlen als Vektorraum über \mathbb{Q} – 2. Einige Gruppenisomorphismen – 3. Die Automorphismen von \mathbb{R} – 4. Approximation algebraischer Zahlen – 5. LIOUVILLESche Transzendenten	

§ 2	<i>Einige Anwendungen aus der Zahlentheorie</i>	109
	1. Vorbemerkung – 2. Das Teilerproblem – 3. Anzahl der Gitterpunkte in einem Kreis – 4. Die Primzahlzerlegung von $n!$ – 5. Über die Verteilung der Primzahlen – 6. Eine Primzahlreihe	
§ 3	<i>Eine Summationsformel mit Anwendungen</i>	115
	1. Die GAUSS-Klammer – 2. Die EULERSche Summationsformel – 3. Potenzsummen – 4. Die ζ -Funktion – 5. Die STIRLINGsche Formel 6. Restabschätzungen – 7.* Eine allgemeine Asymptotik	
§ 4	<i>Rationalitätsfragen für Logarithmus und Exponentialfunktion</i>	125
	1. Die Ergebnisse – 2. Hilfsmittel – 3. Beweis von Satz 1A	

Kapitel V

Erzeugung von Funktionen durch unendliche Reihen

Einleitung	129
§ 1	<i>Vertauschung von Grenzprozessen bei Reihen von Funktionen</i>	130
	1. Bezeichnungen und Definitionen – 2. Kriterien für gleichmäßige Konvergenz – 3. Gleichmäßig konvergente Reihen stetiger Funktionen 4. Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit	
§ 2	<i>Potenzreihen</i>	133
	1. Festlegung einer Redeweise – 2. Konvergenzbereich einer Potenzreihe 3. Durch Potenzreihen dargestellte Funktionen – 4. Der ABELSche Grenzwertsatz – 5. O -Abschätzungen	
§ 3	<i>Exponentialfunktion und Logarithmus</i>	137
	1. Die Exponentialfunktion – 2. Der Logarithmus – 3. Berechnung von Logarithmen – 4. Anwendungen	
§ 4	<i>Sinus und Cosinus</i>	143
	1. Definition durch Reihen – 2. Ein ausgezeichneter Vektorraum – 3. Ungleichungen – 4. Über die Perioden einer durch Potenzreihen dargestellten Funktion – 5. Sinus und Cosinus als periodische Funktionen – 6. Die Standard-Parametrisierung des Einheitskreises – 7. Polarkoordinaten – 8. Fläche und Umfang des Einheitskreises – 9. Historische Bemerkungen	
§ 5	<i>Die Partialbruchentwicklung des Cotangens</i>	153
	1. Die Cotangens-Verdopplung – 2. Eine Partialbruchreihe – 3. Eindeutigkeitssatz – 4. Die Potenzreihe von $\pi x \cdot \cot \pi x$ – 5. Zur Berechnung von $\zeta(2n)$ – 6. Das Sinus-Produkt – 7. Berechnung von Partialsummen	
§ 6	<i>Der Arcustangens</i>	159
	1. Vorbemerkung – 2. Die Integraldarstellung – 3. Reihen für π – 4. Ein schneller Algorithmus für π	

Kapitel VI

Perlen der elementaren Analysis

Einleitung	163
§ 1	<i>Die BERNOULLISchen Polynome</i>	163
	1. Definition – 2. Eine Funktionalgleichung – 3. Potenzsummen – 4. Über die Nenner der BERNOULLISchen Zahlen	

§ 2	<i>Eine EULERSche Reihe</i>	170
	1. Vorbemerkung – 2. Eine trigonometrische Identität – 3. Die Reihen $P_m(x)$ – 4. Die Potenzreihe des Tangens – 5. Die erzeugende Funktion	
§ 3	<i>Summationsformeln</i>	176
	1. Die EULERSche Summationsformel – 2. Die erste POISSONSche Summationsformel – 3. Die zweite POISSONSche Summationsformel – 4. Die dritte POISSONSche Summationsformel	
§ 4	<i>Anwendungen der EULERSchen Summationsformel</i>	181
	1. Restabschätzungen – 2. Eine verallgemeinerte ζ -Reihe – 3. Die harmonische Reihe	
§ 5	<i>Anwendungen der POISSONSchen Summationsformeln</i>	184
	1. Die geometrische Reihe – 2. Die Theta-Reihe – 3.* Summation einiger spezieller Partialbruch-Reihen	
§ 6	<i>EULERSche Reihe</i>	189
	1. Vorbemerkung – 2. Der Konvergenzsatz – 3. Die Reihen $v_m(r)$ – 4. Summation der EULERSchen Reihen	
§ 7	<i>Die Gamma-Funktion</i>	193
	1. Historische Bemerkung – 2. Konvexe Funktionen – 3. Logarithmisch konvexe Funktionen – 4. Die Hauptsätze über die Gamma-Funktion 5. Beweise – 6.* Die STIRLINGsche Formel – 7.* Die LEGENDRESche Relation – 8. Die Funktionalgleichung der RIEMANNSchen Zeta-Funktion	
	Literatur	206
	Namen- und Sachverzeichnis	207