

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	xv
Zusammenfassung	xix
Abstract	xxiii
Résumé	xxvii

ERSTER UND VORBEREITENDER TEIL: PIAGETS GENETISCHE ERKENNTNISTHEORIE ALS RAHMEN DER UNTERSUCHUNGEN

1

1. Wermus' Modell COGN der kognitiven Aktivitäten

3

1.1 Die kognitiven Aktivitäten und ihre Entwicklungsfaktoren

3

Überblick über die Subsysteme des systemischen Modells COGN. * Die vier Entwicklungsstadien der Intelligenz. Der Mechanismus der majorierenden Äquilibration (Alpha-, Beta- und Gammaverhalten). * Das psychohistorische Grundprinzip und das Prinzip der kognitiven Regression als heuristische Prinzipien.

1.2 Die repräsentative Aktivität

16

Die Repräsentationsinstrumente des natürlichen Denkens. * Modellierung der repräsentativen Aktivität durch amalgamierte Prädikate mit kontextabhängigen Komponenten. Ihre Verbesserung durch Zentrierungen, Dissoziationen und Thematisierungen.

1.3 Natürliche Logiken, Schlussregeln und Deduktionen

21

Präjunkturen. Bewertungen. Reflexive Operationen als Entwicklungsfaktoren. Schwache und starke Prälogiken. * Relevanzbedingung der natürlichen Implikation. Charakteristika der natürlichen Schlussregeln und Deduktionen. Ihre Entwicklungsfaktoren.

1.4 Ontogenetische Entwicklung des Zahlschemas

32

Übergang zur transitiven Ordnungsrelation. Entwicklung von Iteration und Induktion. * Übergang zum Schema der invarianten Anzahl. Das Zahl-schema als Synthese aus Ordnungsstruktur und Inklusionsstruktur. * Progressive Arithmetisierung. Zusammenhang mit dem historischen und mathematischen Teil der Untersuchungen.

2. Historische Entwicklung des Zahlschemas 47

2.1 Die ersten Zahlworte und die heiligen Zahlen 47

Überblick über die nachzuweisenden Thesen. * Frühe Zahlen anschaulich und kontextabhängig. Frühe Zahlenreihe lückenhaft. * Der zahlhaft geordnete Kosmos als Gottesoffenbarung.

2.2 Stückzahlen und Körperzahlen 60

Herkunft des Zahlschemas aus Handlungskoordinationen und Zählgesten. * Stückzahlen als präoperative Kardinalzahlen. * Körperzahlen als präoperative Ordinalzahlen. Fehlen der Basis.

2.3 Der Schritt zum Positionssystem in Sprache und Schrift 71

Fingerzählen. Zweihand, Gezehnt, Krafthundert. * Mesopotamien: Von den Rechensteinen zu den Tontafeln. Evolution der Multiplikation. * Vom Strichsystem zum Positionssystem: Sechs Stufen von Zahldarstellungen.

2.4 Grosse Zahlen und Unendlichkeit 91

Das Schema der 'zählmächtigen Götter'. * Repräsentation grosser Zahlen durch Tiernamen und Intensivbildungen. Numerische Festlegung von zuvor unbestimmten Vielheitsbezeichnungen. * Die grösste benannte Stückzahl und ihre Überschreitung. Die Bewältigung des grossen Endlichen (Natürlich-Unendlichen) im Buddhismus, Jainismus und bei Archimedes.

3. Von der Steinzeit zu den Vorsokratikern: Das Natürlich-Unendliche 103

3.1 Zahl und Unendlichkeit in der Altsteinzeit 103

Ursprung der Mathematik in der Imitation und Rekonstruktion von kosmischen und biologischen Rhythmen auf der kognitiven Ebene. * Die Arithmetik der Mondkalender. * Arithmetische und geometrische Aspekte der Ornamentik. Unendlichkeitsdarstellungen in Labyrinth-Tanz und Labyrinth-Zeichnung.

3.2 Von der Jungsteinzeit zum Alten Orient 119

In der Jungsteinzeit: Zentraleuropäische mündliche Tradition von algebraischen Aufgabensammlungen und geometrischen Konstruktionen mit astronomischen und rituellen Anwendungen. Kognitive Verdrängung des Irrationalen mittels pythagoreischer Tripel. * Altarkonstruktionen in der vedischen Sakralgeometrie.

Progressive Chronologisierung. Das Schema des 'Weltjahres mit vier Weltperioden'. * Unsterblichkeitsvorstellungen in Israel und Indien. Die drei Entwicklungsstufen des indischen Samsara-Schemas.

3.4 Das mythische Schema der 'allumfassenden Zeit'

Seine fünf Eigenschaften. * Seine Entwicklung in Indien, Persien, Israel und Griechenland (Orphik). * Seine psychologische Anwendung: Unsterblichkeit und Himmelsreise der Seele in Indien und Griechenland (Pythagoreer, Platon, Stoiker).

3.5 Anaximanders 'Apeiron'

Das Apeiron rekonstruiert auf höherer Stufe das mythische Schema der 'allumfassenden Zeit'. * Anaximanders drei Dissoziationen und sein doppelter Finitismus. * Weiterentwicklung bei Xenophanes und im Seins-Begriff des Parmenides, welcher den Begriff des kompakten Raumes antizipiert.

4. Klassisches Griechenland: Das Potentiell-Unendliche4.1 Der Schritt zum formal-operativen Stadium des Denkens

Drei kognitive und drei mathematische Errungenschaften der Griechen. Verzeichnis von Euklids Axiomen und Postulaten. * Selektionsvorteile der Errungenschaften. Externe Entwicklungsfaktoren soziokultureller Art. Interne Faktoren werden in 4.2 bis 4.5 diskutiert. * Tabelle der griechischen Mathematiker und Epochen-einteilung.

4.2 Zenons Paradoxien des Unendlichen

Die drei Argumente gegen die Vielheit. Zenon isoliert zwei gekoppelte unendliche Prozesse. Sein Begriff der unendlichen Teilbarkeit nicht reversibel. Vergleich mit der Ontogenese. * Die vier Argumente gegen die Bewegung. Sie evozieren die Axiome der Gleichheit ('Das Ganze ist grösser als der Teil'). Vergleich mit der Ontogenese. * Die zwei Errungenschaften Zenons. Der Schritt vom Natürlich- zum Potentiell-Unendlichen.

4.3 Aristoteles' Unendlichkeitslehre und das Parallelenpostulat

Seine Unendlichkeitsbegriffe und die Lehrsätze des endlichen Universums, der ewigen Zeit und der unendlichen Zahlenreihe. * Ihre Verträglichkeit mit dem Lehrsatz von der Verwirklichung. Existenz potentiell-unendlicher Mengen und Prozesse nur im operativen, nicht im ontologischen Sinne. * Die aristotelische Geometrie ist unverträglich mit der euklidischen Geometrie. * Zur Entwicklung der Parallelen-theorie im 4. Jahrhundert.

4.4 Kreisquadratur, gehörte Winkel und Proportionenlehre

Die Kreisquadratur von Antiphon und Bryson zu Eudoxos. * Quantitative Gleichheit und gestalthafte Gleichheit von Winkeln. Vermeidung gehörnter Winkel. * Entwicklung der Proportionenlehre. Die Wechselwegnahme bei Theodoros und Theaitetos. * Der Durchbruch zur Proportionenlehre von Eudoxos.

Orthodoxe (eudoxische) und heterodoxe (atomistische) griechische Mathematik. Drei Richtungen des mathematischen Atomismus: Minima, Indivisibilia und Infinitesimalia. * Minima bei Demokrit. Sein Strikter Finitismus. Unerlässlichkeit der atomistischen Methode für die eudoxische Mathematik. * Antike Einwände gegen den Finitismus und die Antwort der Finitisten: Das Parallelenparadoxon. * Indivisibilia bei Platon und Euklid. Lösung des Kegelparadoxons durch Infinitesimalia bei Chrysipp.

5. Mittelalter: Das Aktual-Unendliche

279

5.1 Das Schema des 'absolut-unendlichen Gottes'

279

Es rekonstruiert das mythische Schema der 'allumfassenden Zeit'. Skizze seiner Entwicklung von Philo dem Juden zu Anselm von Canterbury. Biblisch belegbare Eigenschaften Gottes. Das Absolut-Unendliche bei Georg Cantor. * Tabelle der Scholastiker und Epochenenteilung.

5.2 Gottesbeweise und deduktive Theologie

293

Augustins arithmetischer Gottesbeweis. Er arbeitet im Rahmen der Robinsonarithmetik. Sein Memoria-Begriff. Sein biblisch-pythagoreisches Weltbild. * Anselms Gottesbeweis. Abhängigkeit von der Stoik. * Alanus ab Insulis und Nikolaus von Amiens. Der Schritt zur deduktiven Theologie und zur Apologetik. Ockhams zwei Prinzipien. Externe Entwicklungsfaktoren soziokultureller Art. Interne Faktoren werden in 5.3 und 5.4 diskutiert.

5.3 Die Struktur des Kontinuums

313

Scholastische Unendlichkeitsbegriffe. Der Schritt zum logisch Möglichen und zur freien Hypothesenbildung mittels des Allmachtsbegriffs. Explorationsaktivität ohne Selektion. * Mittelalterliche Argumente gegen das Punkt-Kontinuum. Rettungsversuch von Grosseteste. * Ein Infinitesimalien-Kontinuum bei Gregor von Rimini. Ein finitistisches Minima-Kontinuum bei Gerardus Odonis und Nikolaus von Autrecourt. Letzterer antizipiert Giordano Bruno und den modernen Strikten Finitismus. * Anwendung gehörnter Winkel in Biologie und Sündenlehre.

5.4 Paradoxien der Mengenlehre

334

Islamische, jüdische und sabische Denker: Das Problem der Ewigkeit der Welt und vier daraus sich ergebende mengentheoretische Paradoxien. Lösung durch den Juden Crescas und den Sabier Thâbit ben Qurra. * Christliche Denker: Bonaventura und Thomas von Aquin. * Allmähliche Dissoziation von Teilmengen- und Injektionsrelation bei Heinrich von Harclay, Wilhelm von Alnwick und Gregor von Rimini. Das Überabzählbare im Kontext von Referenztheorie (John Dorr) und Astrologiebekämpfung (Nikolaus von Oresme).

5.5 Kurzer Ausblick ins 17. Jahrhundert

356

Unendlichkeitslehre und Philosophie der Mathematik bei Pater Malebranche. Transfinite Zahlen bei Wallis, Gandi und Fontenelle. * Eine Antizipation der Russellschen Antinomie bei Tosca.

6. Philosophische Ansätze des Strikten Finitismus 367

6.1 Die Finitismen von Hilbert, Gentzen und Turing 367

Identifikation von H-Finitismus und primitiv rekursiver Arithmetik. Die Erweiterung zum G-Finitismus. * Die Frage nach der Notwendigkeit abstrakter Begriffe. Die beiden Aspekte des H-Finitismus. * Operative und repräsentative Endlichkeit der Erkenntnis gemäss dem H-Finitismus und dem T-Finitismus.

6.2 Der phänomenologische Finitismus von Oskar Becker 386

Die Frage nach der empirischen Existenz des Transfiniten. Die Figur des offenen Horizontes. * Transfinite Strukturkomplifikation des Denkens nach Becker und Wermus.

6.3 Zenonische Situationen und ausführbare Prozesse 398

Yessenin-Volpinsche Zahlenreihen. Daraus sich ergebende Modifikationen von Logik und Arithmetik. * Zirkularität des Versuches, grosse Zahlen als Strichreihen zu konstruieren. Zenonische Situationen. * Der Begriff des 'ausführbaren Prozesses' und weitere strikt finitistische Gedanken bei Borel, Lusin, van Dantzig, Bernays und Wittgenstein.

6.4 Das grosse Endliche als Modell des Transfiniten 414

These: Transfinite Begriffe und Methoden dienen der Erfassung des grossen Endlichen, Unüberblickbaren, sehr Komplizierten. * Naturwissenschaftliche Begründung. * Historische Begründung. Gedankenexperiment eines alternativen Evolutionsverlaufes, der auch in der Neuzeit zur strikt finitistischen Einführung des Transfiniten geführt hätte.

6.5 Das Forschungsprogramm des Strikten Finitismus 424

Abgrenzung gegenüber anderen Philosophien der Mathematik. Der Strikte Finitismus als Beispiel zum Prinzip der kognitiven Regression. Ziel des Strikten Finitismus ist die formale Rekonstruktion des Natürlich-Unendlichen und darauf aufbauend der klassischen Mathematik, unter Verzicht auf das Unendlichkeitsaxiom.

7. Mathematische Ansätze des Strikten Finitismus zur Arithmetik 431

7.1 Grade der Endlichkeit 431

Grundbegriffe der Turing-Rekursivität. * Subrekursive Funktionenklassen. Grzegorzcyk-Hierarchie und Wainer-Hierarchie. Schnell wachsende Funktionen. * Grundbegriffe der polynomialen Berechenbarkeit. Cooksche Hypothese. * Rabins probabilistische Algorithmen als Beispiel einer majorierenden Äquilibration.

Trachtenbrots Theorem: In formalen Systemen der Mengenlehre gibt es weder eine stärkste noch eine schwächste Endlichkeitsdefinition. Unvollständigkeit der Mengenlehre, weil die Äquivalenz gewisser Endlichkeitsdefinitionen unbeweisbar. * Auch im Intuitionismus gibt es mehrere nichtäquivalente Endlichkeitsbegriffe von verschiedenem konstruktivem Grad.

Aus drei Theoremen Parikhs geht hervor, dass der H-Finitismus kein sicheres Fundament der Mathematik: Faktische Unentscheidbarkeit von Gleichheiten zwischen primitiv rekursiven Termen. Primitiv rekursive Terme verhalten sich in quasikonsistenten Arithmetiken wie unendliche Zahlen. Nichtwohlbestimmtheit der Exponentialfunktion. * Als Konsequenz daraus die Arithmetik PB. Verhältnis von PB zu anderen arithmetischen Systemen.

Hilberts Axiome der euklidischen Geometrie als Vergleichsbasis. * Inzidenzaxiome. Galoiskörper als Koordinatenkörper. * Ordnungsaxiome: Anomale Tripel. Kongruenzaxiome: Zwei Sorten von Strecken. Trotz Fehlen der Stetigkeitsaxiome Vollständigkeit. * Der euklidische Kern einer finiten Geometrie. Geschickt gewählte Folgen solcher euklidischer Kerne konvergieren gegen die infinitistische Geometrie. Rehabilitation der Geometrie von Aristoteles.

Der euklidische Kern modelliert die Alltagserfahrungen. Ausserhalb die Anomalien von Atomphysik und Kosmologie. Interpretation der Nukleonenzahl als grösste Restprimzahl des euklidischen Kerns des Universums. Eddingtons Quantenarithmetik. * Strikt finitistische Einführung der Zeit. Alle physikalischen Grössen werden periodisch. Existenz periodischer Funktionen, die streng monoton sind. Finitistische Erklärung der konstanten Massendichte.

Jede endliche Teilmenge von FIN hat ein endliches Modell. FIN ist in einem gewissen Sinne schwächer als PA. * Trotzdem sind die klassischen Sätze der Analysis beweisbar. Alle Zahlen von FIN sind rational, aber einige davon verhalten sich wie irrationale Zahlen. In FIN gibt es auch Sätze, die kein infinitistisches Analogon haben. Analysis ohne Unendlichkeitsaxiom ist somit möglich.

9.1 Die finiten Modelle S_{ji} der Kardinalzahltheorie von Kaluza 535

Die Mengenlehre ZF und die infinitistische Kardinalzahltheorie als Vergleichsbasis. * Definition der finiten Modelle. Für $i = 0$ erhält man die klassische finite Kardinalzahltheorie. Für wachsendes i treten immer mehr Sätze der transfiniten Kardinalzahltheorie hervor. * Durch einen Limesprozess sowie dessen Verfeinerung lassen sich noch mehr klassische Sätze gewinnen. * Diese werden dadurch in dreifacher Auffächerung klassifiziert. Die transfinite Kardinalzahltheorie entpuppt sich als ein approximatives Rechnen mit grossen endlichen Zahlen.

9.2 Die unscharfe Mengenlehre (fuzzy set theory) 554

Kornhaufen- und Kahlkopfparadoxon schon in der Antike bei Eubulides. Exakte Behandlung unscharfer Begriffe erst seit Zadeh (1965). * Grundbegriffe und einige Sätze. Der Goguen-Verband. Verminderung des Wahrheitswertes bei langen Deduktionsketten. * Weitere unscharfe Theorien und unscharfe Logiken. * Thomas von Aquins Gottesbeweise im Lichte der unscharfen Mengenlehre.

9.3 Die alternative Mengenlehre AST von Vopěnka 573

AST als Basis einer natürlichen oder phänomenologischen Mathematik. * Der neue Begriff der Halbmenge. Das Halbmengenaxiom leugnet das Komprehensionsschema. Halbmengen als unübersichtliche Teilmengen spielen die Rolle der klassisch unendlichen Mengen. Vop-Finitheit. Das Hotel Vopěnka. * Das Axiom der Horizontüberschreitung formalisiert technische Innovationen. * Die Theorie der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen im Rahmen von AST.

9.4 Das algorithmische Modell SFT von Engeler 592

SFT beschreibt metatheoretisch die Ideen strikt finitistischer Mathematiker zur Mengenlehre. Diese führen im Modell der hereditär endlichen Mengen in beschränkter Zeit und mit beschränkter Phantasie Gedankenexperimente durch, welche durch Programme beschränkter Komplexität dargestellt werden. Sätze, welche von fast allen dieser Mathematiker einsehbar sind, heissen strikt finitistisch wahr. * Sämtliche Axiome von ZFC sind strikt finitistisch wahr. Die Theorie SFT ist widerspruchsfrei, unvollständig und unverträglich mit der intuitionistischen Logik.

ANHANG 605

Bibliographie	607
Verzeichnis der Namen	641
Verzeichnis der Entwicklungsprozesse	649