

# Inhalt

## Erster Teil: Allgemeine Theorie

### 1. Matrizen und Matrizenoperationen

1.1.	Definition der Matrix. Bezeichnungen . . . . .	19
1.2.	Addition und Multiplikation von Matrizen . . . . .	21
1.3.	Quadratische Matrizen . . . . .	31
1.4.	Assoziierte Matrizen. Minoren inverser Matrizen . . . . .	38
1.5.	Inversion rechteckiger Matrizen. Die pseudoinverse Matrix . . . . .	41

### 2. Der Gaußsche Algorithmus

2.1.	Die Gaußsche Eliminationsmethode . . . . .	50
2.2.	Eine mechanische Interpretation des Gaußschen Algorithmus . . . . .	55
2.3.	Der Sylvestersche Determinantsatz . . . . .	57
2.4.	Zerlegung quadratischer Matrizen in Produkte von Dreiecksmatrizen . . . . .	59
2.5.	Übermatrizen. Das Rechnen mit Übermatrizen. Der verallgemeinerte Gaußsche Algorithmus . . . . .	66

### 3. Lineare Operatoren im $n$ -dimensionalen Vektorraum

3.1.	Vektorräume . . . . .	78
3.2.	Lineare Operatoren, die einen $n$ -dimensionalen Vektorraum in einen $m$ -dimensionalen Vektorraum abbilden . . . . .	84
3.3.	Addition und Multiplikation linearer Operatoren. . . . .	86
3.4.	Koordinatentransformationen . . . . .	87
3.5.	Äquivalente Matrizen. Der Rang eines Operators. Die Sylvestersche Ungleichung . . . . .	89
3.6.	Lineare Operatoren, die einen $n$ -dimensionalen Vektorraum in sich abbilden. . . . .	93
3.7.	Charakteristische Wurzeln und Eigenvektoren linearer Operatoren . . . . .	97
3.8.	Lineare Operatoren einfacher Struktur . . . . .	100

<b>4. Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom einer Matrix</b>	
4.1. Addition und Multiplikation von Matrizenpolynomen . . . . .	103
4.2. Rechte und linke Division von Matrizenpolynomen.	
Der verallgemeinerte Bezoutsche Satz . . . . .	106
4.3. Das charakteristische Polynom einer Matrix. Adjungierte Matrizen. . . . .	109
4.4. Die Methode von D. K. FADDEEV zur gleichzeitigen Berechnung des charakteristischen Polynoms und der adjungierten Matrix . . . . .	113
4.5. Das Minimalpolynom einer Matrix . . . . .	116
<b>5. Matrizenfunktionen</b>	
5.1. Definition der Matrizenfunktion . . . . .	121
5.2. Das Lagrange-Sylvestersche Interpolationspolynom . . . . .	126
5.3. Andere Wege zur Bestimmung von $f(A)$ . Die Komponenten der Matrix $A$ .	129
5.4. Darstellung von Funktionen durch Matrizenreihen . . . . .	134
5.5. Einige Eigenschaften von Matrizenfunktionen . . . . .	139
5.6. Die Anwendung der Matrizenfunktionen zur Integration linearer Differential- gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	143
5.7. Stabilität im Fall linearer Systeme . . . . .	151
<b>6. Äquivalente Transformationen von Polynommatrizen.</b>	
<b>Analytische Elementarteilertheorie</b>	
6.1. Elementare Transformationen von Polynommatrizen . . . . .	156
6.2. Die kanonische Form einer $\lambda$ -Matrix . . . . .	160
6.3. Invariantenteiler und Elementarteiler von Polynommatrizen . . . . .	165
6.4. Äquivalenz linearer Binome . . . . .	171
6.5. Kriterien für die Ähnlichkeit von Matrizen . . . . .	173
6.6. Normalformen von Matrizen . . . . .	174
6.7. Die Elementarteiler der Matrix $f(A)$ . . . . .	178
6.8. Eine Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix . . . . .	182
6.9. Eine weitere Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix . . . . .	185
<b>7. Die Struktur linearer Operatoren im <math>n</math>-dimensionalen Vektorraum.</b>	
<b>Geometrische Elementarteilertheorie</b>	
7.1. Das Minimalpolynom eines Vektors bzw. eines Vektorraumes (bezüglich eines gegebenen linearen Operators) . . . . .	196
7.2. Die Zerlegung eines Vektorraumes in invariante Unterräume mit teilerfremden Minimalpolynomen . . . . .	198
7.3. Kongruenzen. Quotientenräume . . . . .	201
7.4. Die Zerlegung eines Vektorraumes in zyklische invariante Unterräume .	203
7.5. Normalformen einer Matrix . . . . .	208
7.6. Invariantenteiler. Elementarteiler . . . . .	211
7.7. Die Jordansche Normalform einer Matrix . . . . .	214
7.8. Die Methode von A. N. KRYLOV zur Transformation der Säkulargleichung .	217

<b>8. Matrizengleichungen</b>	
8.1. Die Gleichung $AX = XB$ . . . . .	229
8.2. Der Spezialfall $A = B$ . Vertauschbare Matrizen . . . . .	234
8.3. Die Gleichung $AX - XB = C$ . . . . .	238
8.4. Die skalare Gleichung $f(X) = 0$ . . . . .	239
8.5. Gleichungen von Matrizenpolynomen. . . . .	240
8.6. Die $m$ -ten Wurzeln regulärer Matrizen . . . . .	243
8.7. Die $m$ -ten Wurzeln singulärer Matrizen . . . . .	246
8.8. Der Logarithmus einer Matrix. . . . .	251
<b>9. Lineare Operatoren im unitären Raum</b>	
9.1. Vorbemerkungen . . . . .	254
9.2. Metrische Räume . . . . .	255
9.3. Die Gramsche Determinante . . . . .	258
9.4. Orthogonalprojektionen . . . . .	259
9.5. Die geometrische Bedeutung der Gramschen Determinante . . . . .	262
9.6. Orthogonalisierung . . . . .	267
9.7. Orthonormalbasen . . . . .	272
9.8. Adjungierte Operatoren . . . . .	274
9.9. Normale Operatoren im unitären Raum . . . . .	277
9.10. Spektren normaler, hermitescher und unitärer Operatoren . . . . .	279
9.11. Positiv semidefinite und positiv definite hermitesche Operatoren. . . . .	283
9.12. Polare Zerlegung linearer Operatoren im unitären Raum. Cayleysche Formeln.	284
9.13. Lineare Operatoren im euklidischen Raum . . . . .	289
9.14. Die polare Zerlegung linearer Operatoren und die Cayleyschen Formeln im euklidischen Raum . . . . .	295
9.15. Vertauschbare normale Operatoren . . . . .	299
9.16. Der pseudoinverse Operator. . . . .	301
<b>10. Quadratische und hermitesche Formen</b>	
10.1. Lineare Transformationen quadratischer Formen . . . . .	304
10.2. Die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen . . . . .	306
10.3. Die Methode von LAGRANGE zur Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten. Die Jacobi'sche Gleichung . . . . .	308
10.4. Semidefinite und definite quadratische Formen . . . . .	314
10.5. Die Hauptachsentransformation quadratischer Formen . . . . .	317
10.6. Formenbüschel . . . . .	319
10.7. Extremeigenschaften der charakteristischen Wurzeln regulärer Formenbüschel . . . . .	325
10.8. Kleine Schwingungen von Systemen mit $n$ Freiheitsgraden . . . . .	332
10.9. Hermitesche Formen . . . . .	337
10.10. Hankelsche Formen . . . . .	341

<b>Zweiter Teil: Spezielle Fragen und Anwendungen</b>	
<b>11. Komplexe symmetrische, schiefsymmetrische und orthogonale Matrizen</b>	
11.1. Einige Sätze über komplexe orthogonale und unitäre Matrizen . . . . .	353
11.2. Die polare Zerlegung einer komplexen Matrix . . . . .	357
11.3. Normalformen komplexer symmetrischer Matrizen . . . . .	359
11.4. Normalformen komplexer schiefsymmetrischer Matrizen . . . . .	362
11.5. Normalformen komplexer orthogonaler Matrizen. . . . .	368
<b>12. Singuläre Matrizenbüschel</b>	
12.1. Einführung . . . . .	372
12.2. Reguläre Matrizenbüschel . . . . .	374
12.3. Singuläre Büschel . . . . .	376
12.4. Die kanonische Form singulärer Matrizenbüschel . . . . .	382
12.5. Die minimalen Indizes eines Büschels. Ein Kriterium für die strenge Äquivalenz von Matrizenbüscheln . . . . .	384
12.6. Singuläre Büschel quadratischer Formen . . . . .	387
12.7. Anwendungen in der Theorie der Differentialgleichungen . . . . .	391
<b>13. Matrizen mit nichtnegativen Elementen</b>	
13.1. Allgemeine Eigenschaften. . . . .	395
13.2. Spektraleigenschaften unzerlegbarer nichtnegativer Matrizen . . . . .	397
13.3. Zerlegbare Matrizen . . . . .	409
13.4. Die Normalform einer zerlegbaren Matrix . . . . .	417
13.5. Primitive und imprimitive Matrizen . . . . .	422
13.6. Stochastische Matrizen . . . . .	426
13.7. Grenzwahrscheinlichkeiten homogener Markovscher Ketten mit endlich vielen Zuständen . . . . .	431
13.8. Vollständig nichtnegative Matrizen . . . . .	441
13.9. Oszillationsmatrizen . . . . .	445
<b>14. Verschiedene Regularitätskriterien und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln</b>	
14.1. Das Regularitätskriterium von HADAMARD und seine Verallgemeinerungen .	454
14.2. Die Norm einer Matrix . . . . .	458
14.3. Die Verallgemeinerung des Hadamardschen Kriteriums auf Übermatrizen. .	461
14.4. Das Regularitätskriterium von FIEDLER . . . . .	463
14.5. Die Geršgorinschen Kreise und andere Lokalisierungsgebiete . . . . .	464
<b>15. Anwendungen der Matrizenrechnung zur Untersuchung linearer Differentialgleichungssysteme</b>	
15.1. Systeme linearer Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten. Grundbegriffe . . . . .	469

	Inhalt	15
15.2.	Die Ljapunovsche Transformation . . . . .	472
15.3.	Reduzierbare Systeme . . . . .	474
15.4.	Die kanonische Form reduzierbarer Systeme. Der Satz von ERUGIN . . . . .	477
15.5.	Der Matrizant . . . . .	480
15.6.	Das Produktintegral. Der Volterra'sche Infinitesimalkalkül . . . . .	486
15.7.	Differentialgleichungssysteme im Komplexen. Allgemeine Eigenschaften . . . . .	489
15.8.	Das Produktintegral im Komplexen . . . . .	492
15.9.	Isolierte singuläre Stellen . . . . .	496
15.10.	Schwach singuläre Stellen . . . . .	502
15.11.	Reduzierbare analytische Systeme . . . . .	516
15.12.	Analytische Funktionen mehrerer Matrizen und ihre Anwendung zur Untersuchung von Differentialgleichungssystemen. Die Arbeiten von LAPPO-DANILEVSKIJ . . . . .	519
<b>16.</b>	<b>Das Routh-Hurwitzsche Problem und verwandte Fragen</b>	
16.1.	Einleitung . . . . .	522
16.2.	Die Cauchyschen Indizes . . . . .	524
16.3.	Der Routhsche Algorithmus . . . . .	528
16.4.	Spezialfälle. Beispiele . . . . .	532
16.5.	Der Satz von LJAPUNOV . . . . .	536
16.6.	Der Routh-Hurwitzsche Satz . . . . .	541
16.7.	Die Formel von ORLANDO . . . . .	547
16.8.	Sonderfälle des Routh-Hurwitzschen Satzes . . . . .	548
16.9.	Die Methode der quadratischen Formen. Die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen eines Polynoms . . . . .	552
16.10.	Unendliche Hankelsche Matrizen endlichen Ranges . . . . .	555
16.11.	Die Bestimmung des Index einer gebrochenen rationalen Funktion mit Hilfe der Koeffizienten in Zähler und Nenner . . . . .	558
16.12.	Ein zweiter Beweis des Routh-Hurwitzschen Satzes . . . . .	565
16.13.	Einige Ergänzungen zum Routh-Hurwitzschen Satz. Das Stabilitätskriterium von LIÉNARD und CHIPART . . . . .	570
16.14.	Einige Eigenschaften Hurwitzscher Polynome. Ein Satz von STIELTJES. Die Darstellung Hurwitzscher Polynome mit Hilfe von Kettenbrüchen . . . . .	575
16.15.	Das Stabilitätsgebiet. Die Markovschen Parameter . . . . .	581
16.16.	Der Zusammenhang mit dem Momentenproblem . . . . .	585
16.17.	Der Zusammenhang der Hurwitzschen mit den Markovschen Determinanten . . . . .	589
16.18.	Die Sätze von MARKOV und ČEBYŠEV . . . . .	591
16.19.	Das verallgemeinerte Routh-Hurwitzsche Problem . . . . .	598

## Anhang von V. B. Lidskij

### Ungleichungen für charakteristische und singuläre Wurzeln

1.	Majorantenfolgen . . . . .	605
2.	Die Horn-Neumannschen Ungleichungen . . . . .	607

3.	Die Weylschen Ungleichungen . . . . .	611
4.	Maximal-Minimaleigenschaften von Summen und Produkten der charakteristischen Wurzeln hermitescher Operatoren . . . . .	614
5.	Ungleichungen für charakteristische und singuläre Wurzeln von Operator- summen und -produkten . . . . .	621
6.	Eine andere Aufgabenstellung bezüglich des Spektrums von Summen und Produkten hermitescher Operatoren . . . . .	624
 <b>Literatur</b> . . . . .		632
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> . . . . .		647