

# Inhalt

## Erster Teil: Allgemeine Theorie

### 1. Matrizen und Matrizenoperationen

1.1.	Definition der Matrix. Bezeichnungen . . . . .	19
1.2.	Addition und Multiplikation von Matrizen . . . . .	21
1.3.	Quadratische Matrizen . . . . .	31
1.4.	Assoziierte Matrizen. Minoren inverser Matrizen . . . . .	38
1.5.	Inversion rechteckiger Matrizen. Die pseudoinverse Matrix . . . . .	41

### 2. Der Gaußsche Algorithmus

2.1.	Die Gaußsche Eliminationsmethode . . . . .	50
2.2.	Eine mechanische Interpretation des Gaußschen Algorithmus . . . . .	55
2.3.	Der Sylvestersche Determinantensatz . . . . .	57
2.4.	Zerlegung quadratischer Matrizen in Produkte von Dreiecksmatrizen . . . .	59
2.5.	Übermatrizen. Das Rechnen mit Übermatrizen. Der verallgemeinerte Gaußsche Algorithmus . . . . .	66

### 3. Lineare Operatoren im $n$ -dimensionalen Vektorraum

3.1.	Vektorräume . . . . .	78
3.2.	Lineare Operatoren, die einen $n$ -dimensionalen Vektorraum in einen $m$ -dimensionalen Vektorraum abbilden . . . . .	84
3.3.	Addition und Multiplikation linearer Operatoren. . . . .	86
3.4.	Koordinatentransformationen . . . . .	87
3.5.	Äquivalente Matrizen. Der Rang eines Operators. Die Sylvestersche Ungleichung . . . . .	89
3.6.	Lineare Operatoren, die einen $n$ -dimensionalen Vektorraum in sich abbilden.	93
3.7.	Charakteristische Wurzeln und Eigenvektoren linearer Operatoren . . . .	97
3.8.	Lineare Operatoren einfacher Struktur . . . . .	100

**4. Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom einer Matrix**

4.1.	Addition und Multiplikation von Matrizenpolynomen . . . . .	103
4.2.	Rechte und linke Division von Matrizenpolynomen. Der verallgemeinerte Bezoutsche Satz . . . . .	106
4.3.	Das charakteristische Polynom einer Matrix. Adjungierte Matrizen. . . . .	109
4.4.	Die Methode von D. K. FADDEEV zur gleichzeitigen Berechnung des charakteristischen Polynoms und der adjungierten Matrix . . . . .	113
4.5.	Das Minimalpolynom einer Matrix . . . . .	116

**5. Matrizenfunktionen**

5.1.	Definition der Matrizenfunktion . . . . .	121
5.2.	Das Lagrange-Sylvestersche Interpolationspolynom . . . . .	126
5.3.	Andere Wege zur Bestimmung von $f(A)$ . Die Komponenten der Matrix $A$ . . . . .	129
5.4.	Darstellung von Funktionen durch Matrizenreihen . . . . .	134
5.5.	Einige Eigenschaften von Matrizenfunktionen . . . . .	139
5.6.	Die Anwendung der Matrizenfunktionen zur Integration linearer Differential- gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	143
5.7.	Stabilität im Fall linearer Systeme . . . . .	151

**6. Äquivalente Transformationen von Polynommatrizen.****Analytische Elementarteilertheorie**

6.1.	Elementare Transformationen von Polynommatrizen . . . . .	156
6.2.	Die kanonische Form einer $\lambda$ -Matrix . . . . .	160
6.3.	Invariantenteiler und Elementarteiler von Polynommatrizen . . . . .	165
6.4.	Äquivalenz linearer Binome . . . . .	171
6.5.	Kriterien für die Ähnlichkeit von Matrizen . . . . .	173
6.6.	Normalformen von Matrizen . . . . .	174
6.7.	Die Elementarteiler der Matrix $f(A)$ . . . . .	178
6.8.	Eine Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix . . . . .	182
6.9.	Eine weitere Methode zur Konstruktion der Transformationsmatrix . . . . .	185

**7. Die Struktur linearer Operatoren im  $n$ -dimensionalen Vektorraum.****Geometrische Elementarteilertheorie**

7.1.	Das Minimalpolynom eines Vektors bzw. eines Vektorraumes (bezüglich eines gegebenen linearen Operators) . . . . .	196
7.2.	Die Zerlegung eines Vektorraumes in invariante Unterräume mit teilerfremden Minimalpolynomen . . . . .	198
7.3.	Kongruenzen. Quotientenräume . . . . .	201
7.4.	Die Zerlegung eines Vektorraumes in zyklische invariante Unterräume . . . . .	203
7.5.	Normalformen einer Matrix . . . . .	208
7.6.	Invariantenteiler. Elementarteiler . . . . .	211
7.7.	Die Jordansche Normalform einer Matrix . . . . .	214
7.8.	Die Methode von A. N. KRYLOV zur Transformation der Säkulargleichung . . . . .	217

## 8.      **Matrizengleichungen**

8.1.	Die Gleichung $AX = XB$ . . . . .	229
8.2.	Der Spezialfall $A = B$ . Vertauschbare Matrizen . . . . .	234
8.3.	Die Gleichung $AX - XB = C$ . . . . .	238
8.4.	Die skalare Gleichung $f(X) = 0$ . . . . .	239
8.5.	Gleichungen von Matrizenpolynomen. . . . .	240
8.6.	Die $m$ -ten Wurzeln regulärer Matrizen . . . . .	243
8.7.	Die $m$ -ten Wurzeln singulärer Matrizen . . . . .	246
8.8.	Der Logarithmus einer Matrix. . . . .	251

## 9.      **Lineare Operatoren im unitären Raum**

9.1.	Vorbemerkungen . . . . .	254
9.2.	Metrische Räume . . . . .	255
9.3.	Die Gramsche Determinante . . . . .	258
9.4.	Orthogonalprojektionen . . . . .	259
9.5.	Die geometrische Bedeutung der Gramschen Determinante . . . . .	262
9.6.	Orthogonalisierung . . . . .	267
9.7.	Orthonormalbasen . . . . .	272
9.8.	Adjungierte Operatoren . . . . .	274
9.9.	Normale Operatoren im unitären Raum . . . . .	277
9.10.	Spektren normaler, hermitescher und unitärer Operatoren . . . . .	279
9.11.	Positiv semidefinite und positiv definite hermitesche Operatoren. . . . .	283
9.12.	Polare Zerlegung linearer Operatoren im unitären Raum. Cayleysche Formeln. . . . .	284
9.13.	Lineare Operatoren im euklidischen Raum . . . . .	289
9.14.	Die polare Zerlegung linearer Operatoren und die Cayleyschen Formeln im euklidischen Raum . . . . .	295
9.15.	Vertauschbare normale Operatoren . . . . .	299
9.16.	Der pseudoinverse Operator. . . . .	301

## 10.     **Quadratische und hermitesche Formen**

10.1.	Lineare Transformationen quadratischer Formen . . . . .	304
10.2.	Die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen . . . . .	306
10.3.	Die Methode von LAGRANGE zur Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten. Die Jacobische Gleichung . . . . .	308
10.4.	Semidefinite und definite quadratische Formen . . . . .	314
10.5.	Die Hauptachsentransformation quadratischer Formen . . . . .	317
10.6.	Formenbüschel . . . . .	319
10.7.	Extremaleigenschaften der charakteristischen Wurzeln regulärer Formenbü- schel . . . . .	325
10.8.	Kleine Schwingungen von Systemen mit $n$ Freiheitsgraden . . . . .	332
10.9.	Hermitesche Formen . . . . .	337
10.10.	Hankelsche Formen . . . . .	341

**Zweiter Teil: Spezielle Fragen und Anwendungen**

<b>11.</b>	<b>Komplexe symmetrische, schiefssymmetrische und orthogonale Matrizen</b>	
11.1.	Einige Sätze über komplexe orthogonale und unitäre Matrizen . . . . .	353
11.2.	Die polare Zerlegung einer komplexen Matrix . . . . .	357
11.3.	Normalformen komplexer symmetrischer Matrizen . . . . .	359
11.4.	Normalformen komplexer schiefssymmetrischer Matrizen . . . . .	362
11.5.	Normalformen komplexer orthogonaler Matrizen . . . . .	368
<b>12.</b>	<b>Singuläre Matrizenbüschel</b>	
12.1.	Einführung . . . . .	372
12.2.	Reguläre Matrizenbüschel . . . . .	374
12.3.	Singuläre Büschel . . . . .	376
12.4.	Die kanonische Form singulärer Matrizenbüschel . . . . .	382
12.5.	Die minimalen Indizes eines Büschels. Ein Kriterium für die strenge Äquivalenz von Matrizenbüscheln . . . . .	384
12.6.	Singuläre Büschel quadratischer Formen . . . . .	387
12.7.	Anwendungen in der Theorie der Differentialgleichungen . . . . .	391
<b>13.</b>	<b>Matrizen mit nichtnegativen Elementen</b>	
13.1.	Allgemeine Eigenschaften . . . . .	395
13.2.	Spektraleigenschaften unzerlegbarer nichtnegativer Matrizen . . . . .	397
13.3.	Zerlegbare Matrizen . . . . .	409
13.4.	Die Normalform einer zerlegbaren Matrix . . . . .	417
13.5.	Primitive und imprimitive Matrizen . . . . .	422
13.6.	Stochastische Matrizen . . . . .	426
13.7.	Grenzwahrscheinlichkeiten homogener Markovscher Ketten mit endlich vielen Zuständen . . . . .	431
13.8.	Vollständig nichtnegative Matrizen . . . . .	441
13.9.	Oszillationsmatrizen . . . . .	445
<b>14.</b>	<b>Verschiedene Regularitätskriterien und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln</b>	
14.1.	Das Regularitätskriterium von HADAMARD und seine Verallgemeinerungen . . . . .	454
14.2.	Die Norm einer Matrix . . . . .	458
14.3.	Die Verallgemeinerung des Hadamardschen Kriteriums auf Übermatrizen . . . . .	461
14.4.	Das Regularitätskriterium von FIEDLER . . . . .	463
14.5.	Die Geršgorinschen Kreise und andere Lokalisierungsgebiete . . . . .	464
<b>15.</b>	<b>Anwendungen der Matrizenrechnung zur Untersuchung linearer Differentialgleichungssysteme</b>	
15.1.	Systeme linearer Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten. Grundbegriffe . . . . .	469

15.2.	Die Ljapunovsche Transformation . . . . .	472
15.3.	Reduzierbare Systeme . . . . .	474
15.4.	Die kanonische Form reduzierbarer Systeme. Der Satz von ERUGIN . . . .	477
15.5.	Der Matrizant. . . . .	480
15.6.	Das Produktintegral. Der Volterrasche Infinitesimalkalkül . . . . .	486
15.7.	Differentialgleichungssysteme im Komplexen. Allgemeine Eigenschaften . .	489
15.8.	Das Produktintegral im Komplexen . . . . .	492
15.9.	Isolierte singuläre Stellen . . . . .	496
15.10.	Schwach singuläre Stellen . . . . .	502
15.11.	Reduzierbare analytische Systeme . . . . .	516
15.12.	Analytische Funktionen mehrerer Matrizen und ihre Anwendung zur Untersuchung von Differentialgleichungssystemen. Die Arbeiten von LAPPO-DANILEVSKIJ . . . . .	519
16.	<b>Das Routh-Hurwitzsche Problem und verwandte Fragen</b>	
16.1.	Einleitung . . . . .	522
16.2.	Die Cauchyschen Indizes . . . . .	524
16.3.	Der Routhsche Algorithmus . . . . .	528
16.4.	Spezialfälle. Beispiele . . . . .	532
16.5.	Der Satz von LJAPUNOV . . . . .	536
16.6.	Der Routh-Hurwitzsche Satz . . . . .	541
16.7.	Die Formel von ORLANDO . . . . .	547
16.8.	Sonderfälle des Routh-Hurwitzschen Satzes . . . . .	548
16.9.	Die Methode der quadratischen Formen. Die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen eines Poly- noms . . . . .	552
16.10.	Unendliche Hankelsche Matrizen endlichen Ranges . . . . .	555
16.11.	Die Bestimmung des Index einer gebrochenen rationalen Funktion mit Hilfe der Koeffizienten in Zähler und Nenner . . . . .	558
16.12.	Ein zweiter Beweis des Routh-Hurwitzschen Satzes . . . . .	565
16.13.	Einige Ergänzungen zum Routh-Hurwitzschen Satz. Das Stabilitätskriterium von LIÉNARD und CHIPART . . . . .	570
16.14.	Einige Eigenschaften Hurwitzscher Polynome. Ein Satz von STIELTJES. Die Darstellung Hurwitzscher Polynome mit Hilfe von Kettenbrüchen . . .	575
16.15.	Das Stabilitätsgebiet. Die Markovschen Parameter . . . . .	581
16.16.	Der Zusammenhang mit dem Momentenproblem. . . . .	585
16.17.	Der Zusammenhang der Hurwitzschen mit den Markovschen Determinanten	589
16.18.	Die Sätze von MARKOV und ČEBYŠEV . . . . .	591
16.19.	Das verallgemeinerte Routh-Hurwitzsche Problem . . . . .	598

## Anhang von V. B. Lidskij

### Ungleichungen für charakteristische und singuläre Wurzeln

1.	Majorantenfolgen . . . . .	605
2.	Die Horn-Neumannschen Ungleichungen . . . . .	607

16	Inhalt	
3.	Die Weylschen Ungleichungen . . . . .	611
4.	Maximal-Minimaleigenschaften von Summen und Produkten der charakteristischen Wurzeln hermitescher Operatoren . . . . .	614
5.	Ungleichungen für charakteristische und singuläre Wurzeln von Operator- summen und -produkten . . . . .	621
6.	Eine andere Aufgabenstellung bezüglich des Spektrums von Summen und Produkten hermitescher Operatoren . . . . .	624
	<b>Literatur . . . . .</b>	<b>632</b>
	<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>647</b>