

Wolfgang Böhm
Günther Gose
Jürgen Kahmann

Methoden der Numerischen Mathematik

Mit 78 Bildern



Friedr. Vieweg & Sohn

Braunschweig / Wiesbaden

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
I Grundbegriffe	1
1 Algorithmen und Fehlerfortpflanzung	1
1.1 Algorithmen	1
1.2 Realisierung von Algorithmen	2
1.3 Die Beurteilung von Algorithmen	2
1.4 Aufgaben und Ergänzungen	3
2 Matrizen	4
2.1 Bezeichnungen	4
2.2 Matrizenprodukte	5
2.3 Das Schema von Falk	6
2.4 Rang und Determinante	7
2.5 Norm und Konvergenz	8
2.6 Aufgaben und Ergänzungen	9
II Lineare Gleichungen und Ungleichungen	10
3 Der Algorithmus von Gauß	10
3.1 Rückwärtseinsetzen	10
3.2 Der Algorithmus von Gauß	11
3.3 Pivotsuche	12
3.4 Aufgaben und Ergänzungen	13
4 Die LR-Zerlegung	14
4.1 Die LR-Zerlegung von A	14
4.2 LR-Zerlegung mit Pivotsuche	15
4.3 Lineare Gleichungssysteme	16
4.4 Aufgaben und Ergänzungen	17
5 Das Austauschverfahren	18
5.1 Variablentausch	18
5.2 Schema und Algorithmus	19
5.3 Inversion	20
5.4 Lineare Gleichungen	21
5.5 Aufgaben und Ergänzungen	23

6	Die Cholesky-Zerlegung	23
6.1	Symmetrische Zerlegung	23
6.2	Existenz und Eindeutigkeit	25
6.3	Symmetrische lineare Gleichungssysteme	25
6.4	Nachiteration	26
6.5	Aufgaben und Ergänzungen	27
7	Die QR-Zerlegung	28
7.1	Die Householdertransformation	28
7.2	Der Algorithmus von Householder	28
7.3	Lineare Gleichungssysteme	30
7.4	Aufgaben und Ergänzungen	31
8	Relaxation	32
8.1	Koordinatenrelaxation	32
8.2	Konvergenz bei diagonaldominanten Matrizen	34
8.3	Das Minimumproblem	35
8.4	Konvergenz bei symmetrischen, positiv definiten Matrizen	37
8.5	Geometrische Deutung	37
8.6	Aufgaben und Ergänzungen	38
9	Lineares Ausgleichen	39
9.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	39
9.2	Die Verwendung der QR-Zerlegung	40
9.3	Anwendung	40
9.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	42
9.5	Anwendung	43
9.6	Geometrische Deutung und Dualität	43
9.7	Aufgaben und Ergänzungen	44
10	Lineare Optimierung	45
10.1	Lineare Ungleichungen und lineares Programm	45
10.2	Eckentausch und Simplexverfahren	46
10.3	Elimination	48
10.4	Ausgleichen nach Tschebyscheff	50
10.5	Aufgaben und Ergänzungen	51
III	Iteration	53
11	Vektoriteration	53
11.1	Das Eigenwertproblem für Matrizen	53
11.2	Die Modalmatrix	54
11.3	Vektoriteration nach von Mises	54

11.4	Inverse Iteration	56
11.5	Verbesserung einer Näherung	58
11.6	Aufgaben und Ergänzungen	59
12	Der LR-Algorithmus	59
12.1	Der Algorithmus von Rutishauser	59
12.2	Der Konvergenzbeweis	60
12.3	Betragsgleiche Eigenwertpaare	62
12.4	Aufgaben und Ergänzungen	63
13	Eindimensionale Iteration	64
13.1	Kontrahierende Abbildungen	64
13.2	Fehlerabschätzungen	65
13.3	Konvergenzgeschwindigkeit	66
13.4	Das Δ^2 -Verfahren von Aitken	67
13.5	Geometrische Konvergenzbeschleunigung	68
13.6	Nullstellen	69
13.7	Aufgaben und Ergänzungen	70
14	Mehrdimensionale Iteration	71
14.1	Kontrahierende Abbildungen	71
14.2	Konvergenzgeschwindigkeit	72
14.3	Konvergenzbeschleunigung	72
14.4	Nullstellen von Systemen	73
14.5	Aufgaben und Ergänzungen	73
15	Nullstellen von Polynomen	74
15.1	Das Horner-Schema	74
15.2	Das erweiterte Horner-Schema	75
15.3	Einfache Nullstellen	76
15.4	Das Verfahren von Bairstow	77
15.5	Das erweiterte Horner-Schema für quadratische Faktoren	78
15.6	Aufgaben und Ergänzungen	79
16	Das Verfahren von Bernoulli	80
16.1	Lineare Differenzgleichungen	80
16.2	Matrixschreibweise	80
16.3	Das Verfahren von Bernoulli	81
16.4	Inverse Iteration	82
16.5	Aufgaben und Ergänzungen	82
17	Das QD-Schema	84
17.1	Der LR-Algorithmus für tridiagonale Matrizen	84
17.2	Das QD-Schema für Polynome	86

17.3	Betragsgleiche Wurzelpaare	87
17.4	Aufgaben und Ergänzungen	88
IV	Interpolation und diskrete Approximation	89
18	Interpolation	89
18.1	Interpolationspolynome	89
18.2	Lagrange-Polynome	90
18.3	Lagrange-Interpolation	91
18.4	Newton-Interpolation	93
18.5	Mehrdimensionale Interpolation	94
18.6	Flächen von Coons und Gordon	95
18.7	Das Lemma von Aitken	97
18.8	Das Schema von Neville	98
18.9	Aufgaben und Ergänzungen	100
19	Diskrete Approximation	100
19.1	Die Talentwicklung	100
19.2	Das Stützpolynom	101
19.3	Tschebyscheff-Approximation	103
19.4	Tschebyscheff-Polynome	104
19.5	Die Minimumeigenschaft	105
19.6	Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen	106
19.7	Das Ökonomisieren eines Polynoms	107
19.8	Die Methode der kleinsten Quadrate	107
19.9	Die Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome	108
19.10	Aufgaben und Ergänzungen	109
20	Bézierpolynome	110
20.1	Bernsteinpolynome	110
20.2	Bézier-Polynome	111
20.3	Die Konstruktion von Punkt und Tangente	112
20.4	Bézier-Flächen	114
20.5	Aufgaben und Ergänzungen	115
21	Splines und Subsplines	116
21.1	Bézier-Kurven	116
21.2	Differenzierbarkeitsbedingungen	117
21.3	Kubische Splines und Subsplines	118
21.4	Die Minimaleigenschaft	120
21.5	Aufgaben und Ergänzungen	121

V	Numerische Differentiation und Integration	122
22	Numerische Differentiation und Integration	122
22.1	Differentiation des Stützpolynoms	122
22.2	Fehlerabschätzung für die numerische Differentiation	123
22.3	Integration des Stützpolynoms	124
22.4	Summation	126
22.5	Fehlerabschätzung für die numerische Integration	127
22.6	Aufgaben und Ergänzungen	128
23	Extrapolation	129
23.1	Näherungsfolgen	129
23.2	Richardson-Extrapolation	130
23.3	Wiederholte Richardson-Extrapolation	131
23.4	Romberg-Integration	132
23.5	Aufgaben und Ergänzungen	133
24	Einschrittverfahren für Differentialgleichungen	134
24.1	Diskretisierung	134
24.2	Der Diskretisierungsfehler	135
24.3	Die Verfahren von Runge-Kutta	137
24.4	Paare von Runge-Kutta-Verfahren	140
24.5	Schrittweitensteuerung	140
24.6	Aufgaben und Ergänzungen	142
25	Lineare Mehrschrittverfahren für Differentialgleichungen	143
25.1	Diskretisierung	143
25.2	Die Konvergenz eines Mehrschrittverfahrens	145
25.3	Die Wurzelbedingung	145
25.4	Hinreichende Konvergenzbedingung	146
25.5	Die Anlaufrechnung	148
25.6	Prediktor-Korrektor-Verfahren	149
25.7	Die Schrittweitensteuerung	150
25.8	Vergleich von Einschritt- und Mehrschrittverfahren	151
25.9	Aufgaben und Ergänzungen	151
26	Die Methoden von Ritz und Galerkin	152
26.1	Das Prinzip der minimalen Energie	152
26.2	Die Methode von Ritz	153
26.3	Die Methode von Galerkin	155
26.4	Zusammenhang	157
26.5	Aufgaben und Ergänzungen	157

27	Die Methode der finiten Elemente	158
27.1	Finite Elemente	158
27.2	Univariate Splines	159
27.3	Bivariate Splines	161
27.4	Numerische Beispiele	162
27.5	Lokale Koordinaten	168
27.6	Aufgaben und Ergänzungen	169
28	Literatur-Hinweise	170
	Sachwortregister	171